Tema 7. Crecimiento económico a largo plazo

Autores: Juan Acosta Ballesteros, Carmen Álvarez Albelo, Carlos Bethencourt Marrero, Rosa Marina González Marrero, Fernando Perera Tallo, Mª Gracia Rodríguez Brito **http://bit.ly/8l8DDu**

1 INTRODUCCIÓN

Una de las cuestiones cruciales en Macroeconomía es el análisis de la evolución de la producción a lo largo del tiempo. Empíricamente, se observa que la producción de la inmensa mayoría de países tiene una tendencia a crecer, aunque la tasa a la que lo hacen sufre variaciones a lo largo del tiempo. En Macroeconomía se suele hacer un análisis separado de las fluctuaciones cíclicas o de corto plazo de la producción y de otras variables relevantes, que es lo que se denominaría Macroeconomía a corto plazo, y la tendencia de la producción a crecer en periodos largos de tiempo, que se estudia en la parte de Macroeconomía que se denomina Teoría del Crecimiento o crecimiento a largo plazo. Aunque, evidentemente, estas dos maneras de analizar la realidad macroeconómica están muy relacionadas, hay un cambio de énfasis en distintos ámbitos macroeconómicos:

- Variables nominales y monetarias: las variables nominales y monetarias juegan un papel muy importante en la Macroeconomía del corto plazo cuando existen rigideces en los precios, ya sea de los bienes o de los factores (el trabajo). En este contexto, como ya hemos visto, las variables nominales y monetarias pueden tener efectos reales cuando los agentes no son capaces de prever los cambios de esas variables y se equivocan en sus predicciones o expectativas. Cuando los agentes tienen tiempo para ajustar los precios (los salarios) y sus expectativas, las variables nominales y monetarias no afectan a las variables reales y por tanto son totalmente irrelevantes. Es por ello que en crecimiento a largo plazo no estudiamos variables nominales y monetarias.

- Fluctuaciones del nivel de empleo: este importante aspecto de la macroeconomía se estudia en la macroeconomía a corto plazo, mientras que en la Macroeconomía a largo plazo no analizamos fluctuaciones en el nivel de empleo. Por esta razón tratamos la cantidad de trabajo per cápita (el nivel natural de empleo) como una variable exógena.

- Variables agregadas y per cápita: al comparar niveles de bienestar entre distintos países o entre distintas épocas de un mismo país, las variables agregadas, tales como la producción agregada o el consumo agregado, son totalmente irrelevantes. El hecho de que India tenga un PIB agregado mucho mayor que Luxemburgo no significa que India sea un país más rico que Luxemburgo, porque la población de India es muchísimo mayor que la de Luxemburgo. En la variable que nos tenemos que fijar para comparar si un país es más rico que otro es en el PIB per cápita, es decir, el PIB dividido por la población. Esta variable nos dice el valor de la producción que le correspondería a cada habitante de un país, si la producción se distribuyera de forma igualitaria entre la población. De esta manera, el PIB per cápita es una variable que describe mucho mejor si un país es más o menos rico. Es por ello que en crecimiento a largo plazo nos centramos en variables per cápita y sus tasas de crecimiento, no en variables agregadas.

Este cambio en el énfasis que le vamos a dar a distintos los aspectos de la realidad macroeconómica aconseja hacer el siguiente cambio de notación:

- Mayúsculas y minúsculas: hasta ahora, en líneas generales, hemos usado letras mayúsculas para denotar variables nominales, mientras que hemos usado letras minúsculas para denotar variables reales. Dado que, por las razones expuestas en el párrafo anterior, en este tema no vamos a usar variables nominales, las mayúsculas denotarán variables agregadas mientras que las minúsculas denotarán variables per cápita.

- Tipo de interés: hasta ahora hemos denotado por *r* el tipo de interés nominal. En este tema *r* pasará a ser el tipo de interés real.

Si comparamos el modelo de Solow con respecto al estudiado para el corto plazo hay dos importantes simplificaciones:

- No hay Estado, es decir, no hay gasto público, impuestos, etc. No obstante, tendremos la oportunidad de analizar el papel del Estado y el efecto de sus políticas fiscales en la colección de problemas.
- La economía es cerrada, es decir, no realiza transacciones con el exterior. No obstante, no es demasiado complicado incorporar dichos flujos externos a modelos de crecimiento económico tales como el modelo de Solow. De hecho, en el apéndice III se analiza una versión del modelo de Solow en una economía abierta.

2 LA ACUMULACIÓN DE FACTORES: MODELO DE SOLOW

2.1 Tecnología

Vamos a considerar que se usan dos factores productivos: capital K y trabajo L, y que la producción de cada empresa viene dada por una función de producción con rendimientos constantes a escala y todas las demás propiedades habituales[1]:

$$Y_t = F(K_t, L_t)$$

donde $F(K,L)$ presenta rendimientos constantes a escala:

$$\forall \lambda > 1 \quad F(\lambda K, \lambda L)$$

Los rendimientos de cada factor son decrecientes. Es decir, la productividad marginal del trabajo tiende a reducirse a medida que vamos incorporando nuevas unidades de trabajo, y lo mismo ocurre con el capital:

$$F''_{K^2}(K,L) < 0; \quad F''_{L^2}(K,L) < 0$$

La productividad marginal del trabajo aumenta con la cantidad de capital utilizado y la productividad marginal del capital aumenta con la cantidad de trabajo utilizada[2]:

[1] Continuidad y diferenciabilidad de segundo orden, estrictamente creciente, concavidad y cuasiconcavidad estricta, $F(0,0) = 0$.

[2] Los rendimientos constantes a escala junto a los rendimientos decrecientes de cada factor implican que la productividad marginal del trabajo aumenta con la cantidad de capital utilizado, y la productividad marginal del capital aumenta con la cantidad de trabajo utilizada. Si definimos $f\left(\frac{K}{L}\right) = F\left(\frac{K}{L}, 1\right)$ entonces:

$$F''_{LK}(K,L) = F''_{KL}(K,L) > 0$$

El hecho de que las derivadas cruzadas de los factores sean positivas y las derivadas segundas de cada factor sean negativas implica que cuanto más escaso es un factor, en término relativos, más productivo es. Por ejemplo, si aumenta el capital, el capital se hace más abundante y el trabajo más escaso en términos relativos. Dado que la segunda derivada de la función de producción con respecto al capital es negativa, $F''_{K^2}(K,L) < 0$, un incremento del capital hace que caiga el producto marginal del capital, esto es, cae el producto marginal del factor que se ha hecho más abundante. Por el contrario, dado que las segundas derivadas cruzadas de la producción con respecto al trabajo y al capital son positivas, $F''_{LK}(K,L) > 0$, el producto marginal del trabajo aumenta. Por tanto, el producto marginal del factor que se ha hecho relativamente más escaso aumenta. Como veremos, el producto marginal de cada factor es igual al precio del uso de ese factor. Los supuestos que hemos introducido sobre las segundas derivadas parciales de la función de producción implican que los países "pobres", con una menor cantidad de capital per cápita, tienen menores salarios y una mayor rentabilidad del capital que los países ricos, países con mayor capital per cápita.

La evolución del capital viene determinada por la siguiente ecuación de acumulación del capital:

$$K_{t+1} = K_t + I_t - \delta K_t$$

El capital en el siguiente periodo K_{t+1} es igual al capital presente K_t, más la inversión (bruta) realizada en el presente I_t, menos la parte del capital presente δK_t que se deprecia. Suponemos que el capital se deprecia a una tasa constante δ que llamamos tasa de depreciación.

2.2 De variables agregadas a variables per cápita

Vamos a suponer que la población N_t crece a una tasa constante que vamos a denotar por *n*:

$$n = \frac{N_{t+1} - N_t}{N_t} \quad \Leftrightarrow \quad N_{t+1} = (1+n)N_t$$

En el análisis subsiguiente es conveniente redefinir las variables en términos per cápita. Las variables per cápita las denotaremos en minúscula mientras que las variables agregadas las denotaremos con mayúscula:

Capital per cápita: $k_t = \dfrac{K_t}{N_t}$

Trabajo per cápita: $l_t = \dfrac{L_t}{N_t}$

$$F(K,L) = f\left(\frac{K}{L}\right)L \Rightarrow F'_K(K,L) = f'\left(\frac{K}{L}\right) \Rightarrow F''_{K^2}(K,L) = f''\left(\frac{K}{L}\right)\frac{1}{L} < 0; \quad F'_{KL}(K,L) = -f''\left(\frac{K}{L}\right)\left(\frac{K}{L^2}\right) > 0$$

Producción bruta per cápita: $y_t = \frac{Y_t}{N_t}$

Una característica importante de los rendimientos constantes a escala es que la producción per capita se puede poner en función de la cantidad de factores per capita, es decir, la producción per capita es una función creciente de la cantidad de capital per capita y la cantidad de trabajo per capita.

$$Y_t = F(K_t, L_t) \Rightarrow \frac{Y_t}{N_t} = \frac{1}{N_t} F(K_t, L_t) = F\left(\frac{K_t}{N_t}, \frac{L_t}{N_t}\right) \Rightarrow$$
$$y_t = F(k_t, l_t)$$

Además el producto marginal de los factores se puede poner en función de la cantidad de factores en términos per cápita[3]:

$$F'_K(K_t, L_t) = F'_K(k_t, l_t)$$
$$F'_L(K_t, L_t) = F'_L(k_t, l_t)$$

La acumulación del capital per cápita se deriva partiendo de la ecuación de acumulación del capital agregado y teniendo en cuenta la dinámica de la población:

$$K_{t+1} = I_t + (1-\delta)K_t \Rightarrow$$
$$\frac{K_{t+1}}{N_{t+1}} \frac{N_{t+1}}{N_t} = \frac{I_t}{N_t} + (1-\delta)\frac{K_t}{N_t} \Rightarrow (1+n)k_{t+1} = i_t + (1-\delta)k \Rightarrow$$

$$\boxed{k_{t+1} = \frac{i_t + (1-\delta)k_t}{1+n}}$$

La cantidad de capital per cápita del siguiente periodo k_{t+1} depende positivamente de la cantidad per cápita de inversión i_t y del capital per cápita inicial k_t, ya que la parte del capital que no se deprecia $(1-\delta)k_t$ pasa a formar parte del capital del siguiente periodo. La cantidad de capital per cápita del siguiente periodo k_{t+1} es una función decreciente de la tasa de depreciación δ, ya que cuanto mayor es la tasa de depreciación menor es la cantidad de capital que pasa a formar parte del capital del siguiente periodo, y es también decreciente en la tasa de natalidad *n*, ya que cuanto mayor es la tasa de natalidad mayor es el número de personas en el siguiente periodo, y como el capital per cápita es el capital dividido por el número de personas, cuantas más personas menor es el capital per cápita para un nivel de capital agregado dado. Para entender mejor el efecto del crecimiento de la población en la acumulación de capital per cápita, vamos a

[3] Cuando hay rendimientos constantes a escala el producto marginal de los factores a nivel agregado son iguales a los productos marginales de la cantidad per cápita de factores:

$$F(K,L) = N\,F\left(\frac{K}{N}, \frac{L}{N}\right) \Rightarrow \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} = N \frac{\partial F\left(\frac{K}{N}, \frac{L}{N}\right)}{\partial (L/N)} \frac{\partial \left(\frac{L}{N}\right)}{\partial L} \Rightarrow$$
$$F'_L(K,L) = N\,F'_L\left(\frac{K}{N}, \frac{L}{N}\right)\frac{1}{N} = F'_L\left(\frac{K}{N}, \frac{L}{N}\right) = F'_L(k,l)$$

definir inversión de mantenimiento $i^m(k)$ como la inversión necesaria para que el capital per cápita permanezca constante:

$$i^m(k) \overset{Def}{\Leftrightarrow} k = \frac{i^m(k)+(1-\delta)k}{1+n} \Leftrightarrow i^m(k)+(1-\delta)k=(1+n)k \Leftrightarrow i^m(k)=(1+n)k-(1-\delta)k$$

$$i^m(k)=(n+\delta)k$$

Vemos que si queremos que el capital per cápita permanezca constante, tenemos que compensar por un lado la depreciación, que hace que no todo el capital del presente llegue al siguiente periodo, y por otro lado tenemos que compensar el crecimiento de la población, que hace que al dividirse el stock de capital agregado entre más personas, el capital que le toca a cada una sea menor, por lo que hay que tener un mayor stock de capital agregado para que el capital per cápita permanezca constante, lo cual implica un mayor nivel de inversión. Para entenderlo a nivel intuitivo, suponga que una familia tiene un stock de capital igual a k y quiere que cada uno de sus $1+n$ descendientes tengan el mismo stock de capital en el siguiente periodo. La cantidad del capital de la familia que llegará al siguiente periodo es $(1-\delta)k$, por lo que para compensar la depreciación tendrá que hacer una inversión igual a δk, haciendo esa inversión compensará la depreciación y al siguiente periodo llegarán k unidades de capital, con lo que uno de sus descendientes tendrá k unidades de capital, pero para que los n descendientes restantes tengan también un stock de capital de k unidades, la familia tendrá que realizar una inversión de nk unidades de capital. Por tanto en total necesitará hacer una inversión de $\delta k+nk=(\delta+n)k$ unidades.

2.3 Problema de maximización de la empresa:

Las empresas elegirán en cada periodo la cantidad de trabajo que van a contratar, L_t, y la cantidad de inversión que van a realizar, I_t (donde I_t es la inversión bruta). Van a tomar sus decisiones para maximizar el valor presente descontado de los beneficios netos de la empresa (ver apéndice), es decir, neto de la depreciación del capital. Por tanto, elegirán la cantidad de trabajo L_t y la cantidad de inversión I_t de tal manera que se consiga ese objetivo:

$$\max_{L_t,I_t}\left[F(K_t,L_t)-w_tL_t-r_tK_t-\delta K_t\right]+\frac{\left[F(K_{t+1},L_{t+1})-w_{t+1}L_{t+1}-r_{t+1}K_{t+1}-\delta K_{t+1}\right]}{(1+r_{t+1})}+\dots$$

$$s.a.: K_{t+1}=I_t+(1-\delta)K_t$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\max_{L_t,I_t}\left[F(K_t,L_t)-w_tL_t-r_t^BK_t\right]+\frac{\left[F(K_{t+1},L_{t+1})-w_{t+1}L_{t+1}-r_{t+1}^BK_{t+1}\right]}{(1+r_{t+1})}+\dots$$

$$s.a.: K_{t+1}=I_t+(1-\delta)K_t$$

donde r_t es el tipo de interés (real) neto, es decir, lo que hay que pagar por la financiación del capital sin tener en cuenta la parte del capital que se deprecia, mientras que tipo de interés bruto, $r_t^B\equiv\delta+r_t$, incluirías no solo el pago por la financiación del capital sino también la parte del capital que se deprecia; w_t es el salario real. Evidentemente elegir la cantidad de inversión en el presente (periodo t) es lo mismo que elegir capital en el siguiente periodo (periodo t+1), por tanto el problema de maximización de la empresa se puede rescribir de la siguiente manera:

$$\max_{L_t, K_{t+1}} \left[F(K_t, L_t) - w_t L_t - r_t^B K_t\right] + \frac{\left[F(K_{t+1}, L_{t+1}) - w_{t+1} L_{t+1} - r_{t+1}^B K_{t+1}\right]}{(1 + r_{t+1})} + \ldots$$

2.3.1 La demanda de trabajo

La condición de primer orden del problema de maximización de beneficios de la empresa con respecto al trabajo sería como sigue:

$$F'_L(K_t, L_t) - w_t = 0 \Rightarrow F'_L(K_t, L_t) = w_t$$

Esta condición nos dice que se contrata trabajo hasta el punto en que el producto marginal del trabajo se iguale al coste de una unidad de trabajo, es decir, el salario w_t. Si por ejemplo el producto marginal del trabajo fuera menor que el salario, aumentando en una unidad la cantidad de trabajo, aumentarían más los ingresos de la empresa (que se incrementaría en el producto marginal del trabajo) que los costes (que se incrementaría en el salario w_t). Por tanto, se podría aumentar los beneficios contratando más trabajo, hasta alcanzar el punto en que el producto marginal del trabajo se iguale al salario. A partir de esta condición obtendríamos la demanda de trabajo. No obstante, dado que en crecimiento a largo plazo lo que nos interesa son las variables per cápita vamos a reescribir el producto marginal del trabajo en función del capital y el trabajo per cápita[4]:

$$F'_L(K_t, L_t) = F'_L(k_t, l_t)$$

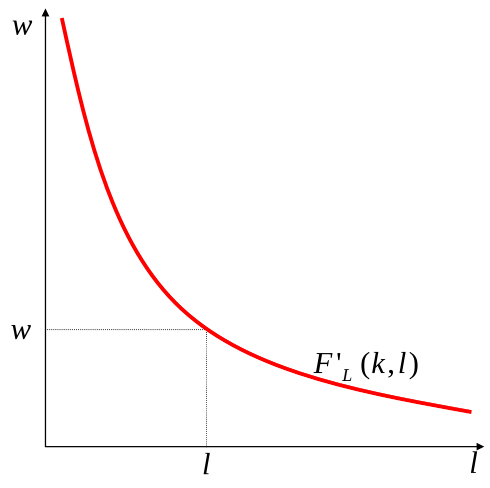
Usando la anterior fórmula en la condición de optimalidad del trabajo por parte de la empresa obtendríamos la demanda de trabajo en términos per cápita:

$$F'_L(k_t, l_t) = w_t$$

La demanda de trabajo per cápita se representa en el espacio cantidad de trabajo/salario (como ya lo hemos hecho en macroeconomía del corto plazo):

[4] Cuando hay rendimientos constantes a escala el producto marginal de los factores a nivel agregado son iguales a los productos marginales de la cantidad per cápita de factores.

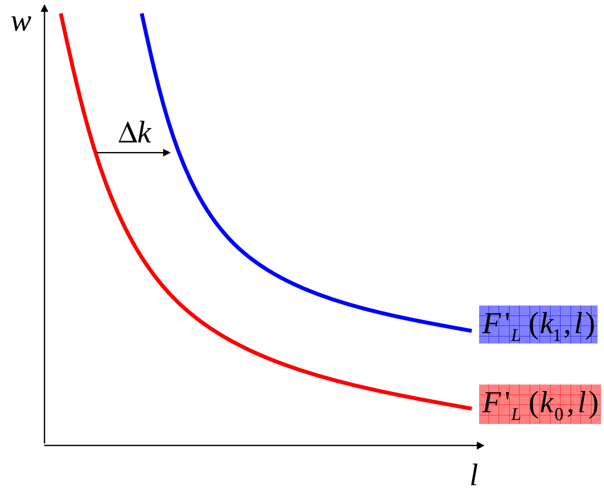
Demanda de trabajo per cápita



Dado que la productividad marginal del trabajo presenta rendimientos decrecientes, la demanda de trabajo es una función decreciente del salario.

Si el capital per cápita aumenta, esto hace que la productividad marginal del trabajo aumente y por tanto aumenta la demanda de trabajo por parte de la empresa:

Efecto de un incremento de capital p.c. sobre la demanda de trabajo p.c.



2.3.2 La demanda de inversión

La condición de primer orden del problema de maximización de beneficios de la empresa con respecto al capital del siguiente periodo sería:

Autores: Juan Acosta Ballesteros, Carmen Álvarez Albelo, Carlos Bethencourt Marrero, Rosa Marina González Marrero, Fernando Perera Tallo, Mª Gracia Rodríguez Brito **http://bit.ly/8l8DDu**

$$\frac{F'_K(K_{t+1},L_{t+1})-r^B_{t+1}}{(1+r_{t+1})}=0 \Rightarrow \boxed{F'_K(K_{t+1},L_{t+1})=r^B_{t+1}}$$

donde $r^B_{t+1}\equiv\delta+r_{t+1}$ es el tipo de interés bruto. Esta condición significa que la empresa invertirá en bienes de capital hasta el punto que el producto marginal del capital $F'_K(K_{t+1},L_{t+1})$ en el siguiente periodo se iguale al coste de financiar una unidad más de inversión r^B_{t+1}. Si por ejemplo el producto marginal del capital en el siguiente periodo fuera mayor que el coste de financiar la inversión en una unidad de capital, invirtiendo una unidad más en el presente (t) se incrementarían los ingresos el siguiente periodo en el producto marginal del capital $F'_K(K_{t+1},L_{t+1})$, mientras que el pago a los acreedores a la empresa sólo aumentaría en el tipo de interés bruto r^B_{t+1}, menos que los ingresos. Es decir, si la empresa invierte más se incrementaría el valor descontado de los beneficios. Por tanto, la empresa incrementaría la inversión hasta el punto en el que los ingresos en el siguiente periodo derivados de invertir una unidad más en capital, el producto marginal del capital $F'_K(K_{t+1},L_{t+1})$, se igualen al coste de financiar dicha unidad, el tipo de interés bruto r^B_{t+1}. Por tanto, la demanda de capital del siguiente periodo se definiría de la siguiente manera:

$$K^d_{t+1}\overset{Def}{\Leftrightarrow}F'_K(K^d_{t+1},L_{t+1})=r^B_{t+1}$$

Demanda de inversión: una vez que se sabe la demanda de capital del siguiente periodo (aquella que hace el producto marginal del capital igual al tipo de interés bruto), la demanda de inversión de la empresa será aquella necesaria para alcanzar dicho nivel de capital[5]:

$$K_{t+1}=I_t+(1-\delta)K_t \Rightarrow I_t=K_{t+1}-(1-\delta)K_t$$

$\boxed{I^d_t=K^d_{t+1}-(1-\delta)K_t}$, donde $K^d_{t+1}\overset{Def}{\Leftrightarrow}F'_K(K^d_{t+1},L_{t+1})=r^B_{t+1}$

Vemos que cuanto mayor es el stock de capital en el periodo t, menor es la inversión necesaria para alcanzar la demanda de capital del siguiente periodo, donde el producto marginal del capital del siguiente periodo se iguale al tipo de interés bruto. Por tanto, la demanda de inversión es decreciente en la cantidad de capital existente. Otro factor importante que afecta a la inversión es el tipo de interés, cuanto mayor es el tipo de interés, mayor es el coste de financiar una unidad de capital y por tanto menores son los incentivos de las empresas a invertir. Esto es, la inversión es una función decreciente del tipo de interés (como ocurría en la macroeconomía del corto plazo).

La condición de optimalidad del capital del siguiente periodo también se puede poner en términos del capital y el trabajo per cápita:

[5] Otra manera de definir la demanda de la inversión, es sustituir la ecuación de acumulación del capital dentro de la condición de primer orden del capital del siguiente periodo:

$$I^d_t\overset{Def}{\Leftrightarrow}F'_K(I^d_t+(1-\delta)K_t,L_{t+1})=r^B_{t+1}$$

$$\boxed{F'_K(k_{t+1}, l_{t+1}) = r^B_{t+1}}$$

Utilizando la ecuación de acumulación de capital per cápita, podemos reescribir la anterior condición de primer orden en función de la inversión:

$$k_{t+1} = \frac{i_t + (1-\delta)k_t}{1+n} \Rightarrow i_t = (1+n)k_{t+1} - (1-\delta)k_t$$

$$i^d_t = (1+n)k^d_{t+1} - (1-\delta)k_t \text{ donde } k^d_{t+1} \overset{Def}{\Leftrightarrow} F'_K(k^d_{t+1}, l_{t+1}) = r^B_{t+1}$$

2.4 Consumidores

Hay N_t consumidores en el mercado. Los consumidores son los propietarios del trabajo, por lo que reciben rentas laborales $w_t L_t$, prestan recursos a las empresas (financiación externa) por los que reciben intereses $r^B_t K_t$ y son propietarios de las empresas, por lo que reciben los beneficios de las empresas $F(K_t, L_t) - w_t L_t - r^B_t K$. Por tanto, la renta bruta de los consumidores Y_t es igual a la producción (bruta) de la economía Y^s_t:

$$Y_t = w_t L_t + r^B_t K_t + \left[F(K_t, L_t) - w_t L_t - r^B_t K_t\right] = F(K_t, L_t)$$

$$\boxed{Y_t = F(K_t, L_t) = Y^s_t}$$

Suponemos que cada consumidor consume la fracción (1-*s*) de su renta (bruta) y ahorra la fracción *s* de la renta (bruta). Este supuesto nos permite obtener unas funciones de demanda de consumo y ahorro per cápita que no dependen de la distribución de la renta:

$$c_t = (1-s)y_t$$
$$s_t = sy_t$$

2.5 Nivel natural de empleo

Dada la separación que existe en macroeconomía entre ciclos y crecimiento a largo plazo, las fluctuaciones en el empleo se consideran cuando se estudian ciclos pero no cuando se analiza crecimiento a largo plazo. En el medio plazo los salarios son flexibles, y por tanto el salario de equilibrio coincide con el negociado y el nivel de empleo de equilibrio es igual al nivel natural de empleo. Vamos a considerar que el nivel natural de empleo en términos per cápita l_n es constante. Esto no significa necesariamente que no exista desempleo, simplemente estamos suponiendo que la tasa de paro es constante a lo largo del tiempo e igual a su nivel natural (nivel del al tasa de paro cuando los agentes no se equivocan en sus expectativas de precios)[6]. Este supuesto

[6] Si la población activa per cápita (tasa de actividad) la denotamos como l_{pe} (nivel de empleo per capita de pleno empleo) y la tasa natural de desempleo la denotamos por u_n, entonces el nivel natural de empleo per cápita sería: $l_n = (1-u_n)l_{pe}$. Por tanto, estamos suponiendo implícitamente que tanto la tasa natural de paro, u_n, como la tasa de actividad, l_{pe}, son constantes, es decir, no varían a lo largo del tiempo, pero eso no significa que no haya paro.

implica que el nivel de empleo per capita es igual al nivel natural que no fluctúa a largo plazo[7].

2.6 Equilibrio

Para que haya equilibrio las siguientes condiciones se tienen que cumplir:

- Los consumidores tienen que estar consumiendo c_t y ahorrando s_t aquellas cantidades que desean:

  $$c_t = (1-s)y_t$$
  $$s_t = sy_t$$

  donde $y_t = y_t^S$.

- Las empresas tienen que estar contratando la cantidad de trabajo, invirtiendo y produciendo las cantidades que desean. Esto es, las empresas están eligiendo aquellas combinaciones de trabajo l_t^d, capital del siguiente periodo k_{t+1}, inversión i_t y producción y_t^s que maximizan el valor presente descontado de sus beneficios, además la inversión determina el capital del siguiente periodo k_{t+1}:

  $$F'_L\left(k_t, l_t^d\right) = w_t$$
  $$F'_K\left(k_{t+1}, l_{t+1}^d\right) = r_{t+1}^B$$
  $$y_t^s = F(k_t, l_t^d)$$
  $$k_{t+1} = \frac{i_t + (1-\delta)k_t}{1+n}$$

- Hay equilibrio en el mercado de trabajo: la demanda de trabajo por parte de las empresas l_t^d tiene que igualarse al nivel natural de empleo per capita:

  $$l_t^d = l_n$$

- Hay equilibrio en el mercado de recursos financieros: la demanda de fondos por parte de las empresas para financiar la inversión i_t, tiene que ser igual a la oferta de fondos por parte de los consumidores, que es igual a sus ahorros s_t:

  $$i_t = s_t$$

- Hay equilibrio en el mercado de bienes: la oferta de bienes por parte de las empresas y_t^s tiene que ser igual a la demanda de bienes por parte de los

[7] Por tanto estamos suponiendo implícitamente que el salario negociado sería una función creciente del capital per cápita, es decir, que la fuerza laboral en países ricos (con un nivel de capital mayor) disfrutarían de un salario mayor que en los países pobres: $w_n(\underset{+}{k}, \underset{-}{l_n}) = F'_L(\underset{+}{k}, \underset{-}{l_n})$

consumidores, el consumo c_t, más la demanda de inversión i_t por parte de las empresas:

$$y_t^s = c_t + i_t$$

Ahora procedemos a analizar cada uno de los mercados de la economía: el de trabajo, el de recursos financieros y el de bienes.

2.7 Mercado de trabajo

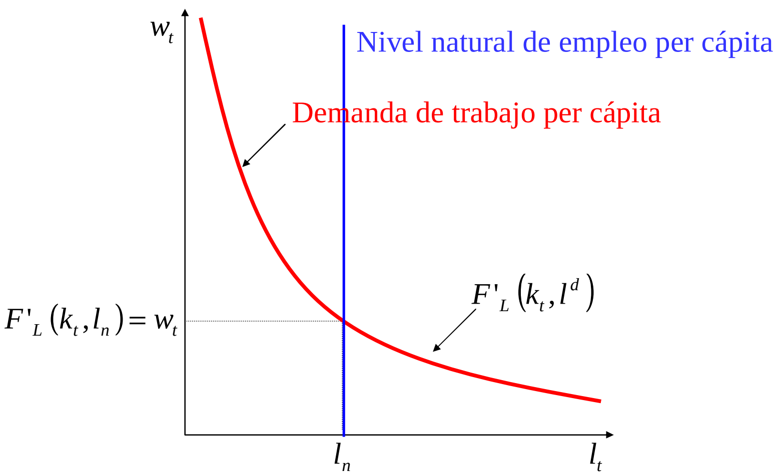
Para que haya equilibrio en el mercado de trabajo, la demanda de trabajo por parte de las empresas se tiene que igualar a la tasa natural de empleo. La demanda de trabajo viene dada por la condición que iguala el producto marginal del trabajo al salario: las empresas contratarán trabajo hasta alcanzar dicho punto. El supuesto de rendimientos constantes a escala implica que esta condición no sólo se da a nivel de empresas individuales sino también a nivel agregado, ya que cuando hay rendimientos constantes a escala da lo mismo que existan muchas empresas en la economía que sólo exista una. Para que haya equilibrio en el mercado de trabajo, la demanda de trabajo se tiene que igualar al nivel natural de empleo per capita:

$l_t^d = l_n$, donde $l_t^d \overset{Def}{\Leftrightarrow} w_t = F'_L\left(k_t, l^d\right)$

Por tanto en equilibrio:

$$w_t = F'_L(k_t, l_n)$$

Mercado de trabajo en términos per cápita



2.8 Mercado de recursos financieros

Las empresas de la economía necesitan fondos para financiar la inversión, por tanto la demanda de fondos prestables en esta economía es igual a la demanda de inversión. Mientras que los consumidores ahorran, y esos ahorros constituyen la oferta de fondos prestables de la economía. Para que haya equilibrio en el mercado de recursos financieros, la oferta de fondos se tendrá que igualar a la demanda de fondos. Pero antes de analizar el equilibrio del mercado de recursos financieros, vamos a analizar la demanda de mercado de inversión.

2.8.1 Demanda de mercado de inversión

Para que haya equilibrio en el mercado de trabajo la cantidad de trabajo contratada por las empresas l_t^d tiene que ser igual en equilibrio al nivel natural de empleo per cápita. Si substituimos esta condición de equilibrio en el mercado de factores $l_{t+1}^d = l_n$ en la condición de optimalidad del capital del siguiente periodo, obtendríamos la expresión que nos daría de forma implícita el stock de capital deseado en el siguiente periodo o demanda de mercado de capital del siguiente periodo[8]:

$$k_{t+1}^d \overset{Def}{\Leftrightarrow} F'_K\left(k_{t+1}^d, l_n\right) = r_{t+1}^B$$

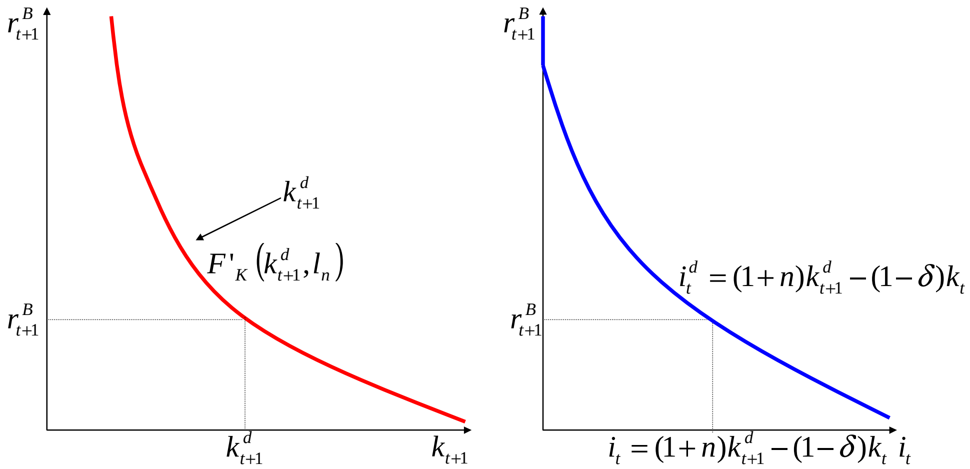
La demanda de inversión es la inversión necesaria en el presente para alcanzar el stock de capital deseado en el siguiente periodo (la demanda de capital del siguiente periodo):

$$k_{t+1} = \frac{i_t + (1-\delta)k_t}{1+n} \Leftrightarrow i_t = (1+n)k_{t+1} - (1-\delta)k_t$$

$$i_t^d = (1+n)k_{t+1}^d - (1-\delta)k_t \text{ donde } k_{t+1}^d \overset{Def}{\Leftrightarrow} F'_K\left(k_{t+1}^d, l_n\right) = r_{t+1}^B$$

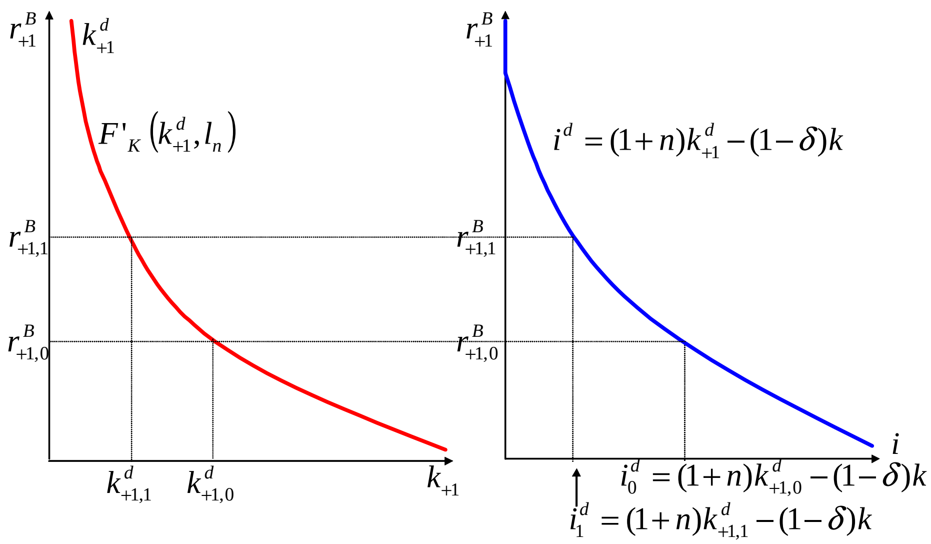
[8] En realidad, la demanda de capital del siguiente periodo a nivel de empresa individual sería el resultado de sustituir la demanda de trabajo por parte de la empresa $l^d(w_{+1}, k_{+1}) \overset{Def}{\Leftrightarrow} F'_L(k_{+1}, l^d(w_{+1}, k_{+1})) = w_{+1}$, dentro de la condición de optimalidad del capital del siguiente periodo. En el caso de rendimientos constantes a escala, esto nos daría una función de demanda de capital del siguiente periodo y de inversión perfectamente elástica en el tipo de interés y decreciente en el nivel de salarios futuros. Para obtener la demanda de capital del siguiente periodo agregada, lo que hemos hecho es sustituir el nivel natural de empleo (no la demanda de trabajo por parte de las empresas) dentro de la condición de optimalidad del capital del siguiente periodo, ya que en equilibrio la demanda de trabajo es igual al nivel natural de empleo.

Demanda de mercado de capital en el siguiente periodo (dado el nivel de trabajo del siguiente periodo) **Demanda de mercado de inversión (dado el nivel de trabajo del siguiente periodo)**



En el gráfico siguiente, vemos que cuanto mayor es el tipo de interés bruto menor es la demanda de capital del siguiente periodo y, por tanto, la demanda de inversión (en el presente). Esto se debe a que cuanto mayor es el tipo de interés, mayor es el coste de financiar la inversión y menor son los incentivos a invertir. Las empresas eligen un nivel de inversión en el que el producto marginal del capital del siguiente periodo se iguala al tipo de interés bruto. Si sube el tipo de interés bruto, el producto marginal del capital del siguiente periodo también tendrá que ser mayor, lo que implica, dado los rendimientos decrecientes del capital, un menor capital en el siguiente periodo y una menor demanda de inversión. Por tanto podemos concluir que la demanda de capital del siguiente periodo y la demanda de inversión son funciones decrecientes del tipo de interés.

Cuanto mayor es el tipo de interés, más costoso es el capital y menos se demanda, por lo que las demandas de capital del siguiente periodo y de inversión son decrecientes:



Autores: Juan Acosta Ballesteros, Carmen Álvarez Albelo, Carlos Bethencourt Marrero, Rosa Marina González Marrero, Fernando Perera Tallo, Mª Gracia Rodríguez Brito **http://bit.ly/8l8DDu**

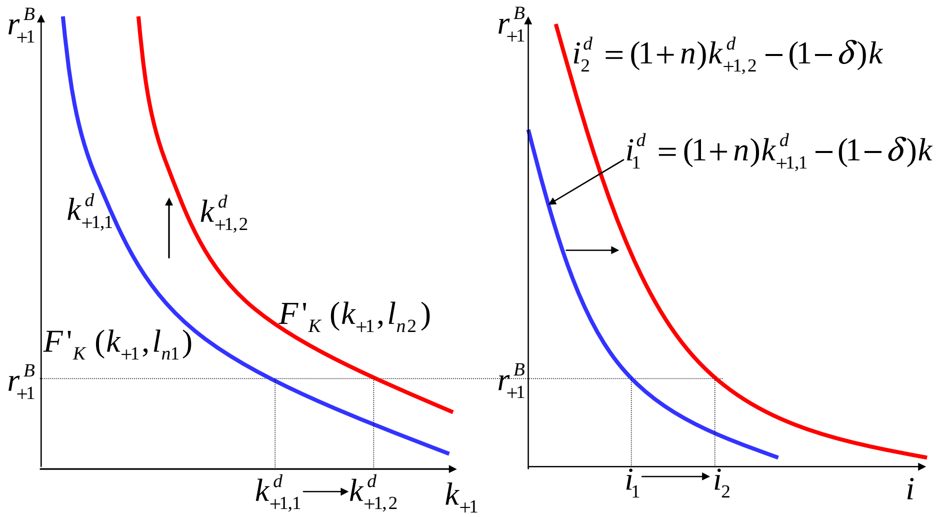
<u>Efecto de un incremento del nivel natural de empleo per cápita:</u> si por alguna causa hubiera algún cambio estructural en el mercado de trabajo o en las variables demográficas[9] que hiciera que *y* aumentara el nivel natural de empleo per cápita l_n, esto haría que el trabajo se hiciera más abundante, con lo que para un nivel dado de capital aumentaría el producto marginal del capital, lo que implicaría un incremento de la demanda de capital del siguiente periodo. Al aumentar el capital deseado en el siguiente periodo, aumenta la demanda de inversión:

$$\uparrow l_n \Rightarrow \uparrow F'_k\left(k_{+1}^d, l_n\right) \Rightarrow \uparrow k_{+1}^d \Rightarrow \uparrow i^d = (1+n)\uparrow k_{+1}^d - (1-\delta)k$$

A nivel gráfico, un incremento del nivel natural de empleo implica un desplazamiento hacia arriba del producto marginal del capital y, por tanto, de la curva de demanda del capital del siguiente periodo. Como consecuencia, se produce un desplazamiento hacia la derecha de la curva de demanda de inversión.

Efecto de un incremento del nivel natural de empleo per capita:
Aumenta le PMg del capital y la rentabilidad del capital del siguiente periodo y de la inversión.

Demanda capital siguiente periodo Demanda de inversión



<u>Efecto de un incremento del capital per cápita sobre la inversión:</u> cuando cambia el stock de capital presente, no cambia la demanda de capital en el siguiente periodo, pero

[9] Las variables demográficas, como la tasa de natalidad o la esperanza de vida, pueden afectar al nivel per capital de empleo. Por ejemplo, un incremento de la esperanza de vida haría que se reduciera el número de personas en edad de trabajar en términos per capita y esto podría reducir la tasa de actividad y el nivel natural de empleo per capita. Si la población activa per cápita (tasa de actividad) la denotamos como l_{pe} (nivel de empleo per capita de pleno empleo) y la tasa natural de desempleo la denotamos por u_n, entonces el nivel natural de empleo per cápita sería: $l_n = (1-u_n)l_{pe}$. Note que al nivel natural de empleo per cápita le afectarían tanto cambios en el mercado de trabajo, que afecta a la tasa natural de desempleo u_n, como cambios en variables demográficas, tales como la esperanza de vida, que afectaría a la población activa per cápita l_{pe}. Uno de los debates en macroeconomía es el efecto del envejecimiento de la población.

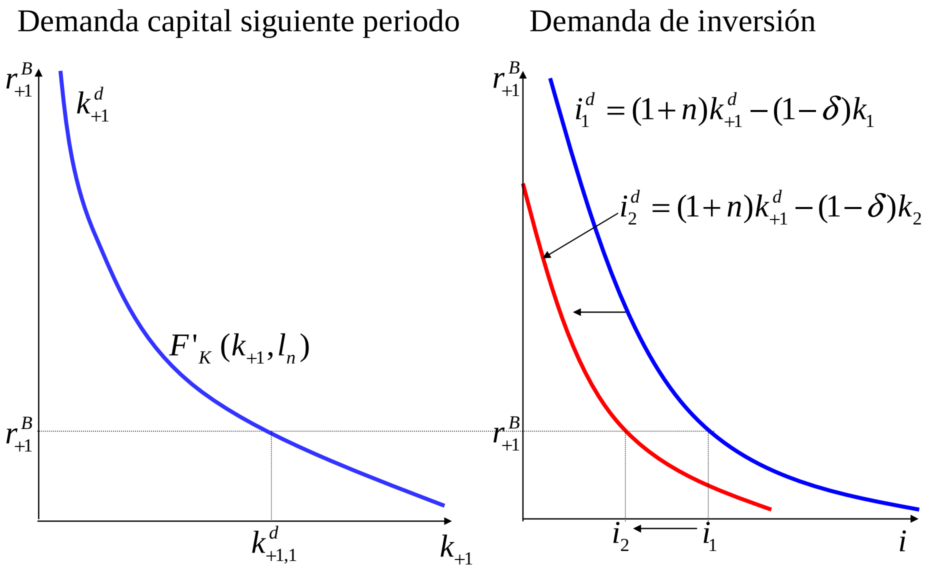
Autores: Juan Acosta Ballesteros, Carmen Álvarez Albelo, Carlos Bethencourt Marrero, Rosa Marina González Marrero, Fernando Perera Tallo, Mª Gracia Rodríguez Brito **http://bit.ly/8l8DDu**

sí cambia la demanda de inversión, que disminuye, ya que se necesita menos inversión para alcanzar el stock de capital deseado. Gráficamente, la curva de demanda de inversión se desplaza hacia la izquierda en la cuantía $(1-\delta)\Delta k$. Por tanto, la demanda de inversión es una función decreciente del stock de capital existente:

$$\downarrow i^d = (1+n)k_{+1}^d - (1-\delta) \uparrow k$$

donde el capital presente y la inversión presente aparecen sin subíndice y el capital demandado en el siguiente periodo aparece con el subíndice +1 para indicar un periodo más adelante. Un incremento del capital presente implica un desplazamiento de la curva de demanda de inversión hacia la izquierda, como se representa en la siguiente gráfica.

Efecto de un incremento del capital sobre la demanda de inversión:
Reduce la inversión necesaria para alcanzar el nivel deseado de capital del siguiente periodo



Un ejemplo para entender de manera intuitiva el efecto del capital presente sobre la inversión es el de una persona que quiera construir una casa de cinco pisos, si no ha construido ningún piso tendrá que invertir para construir cinco pisos, más que si ya ha construido un piso, en cuyo caso sólo necesitará invertir para construir cuatro pisos. Es decir, cuantos más pisos haya construido, esto es, cuanto más capital presente tenga, menos necesitará invertir para terminar los cinco pisos, su stock de capital deseado.

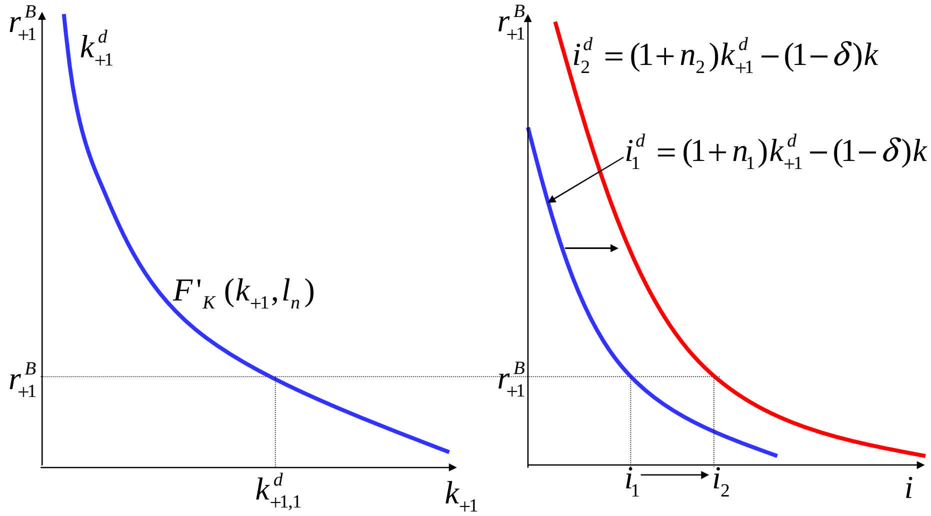
Efecto de un cambio en la tasa de crecimiento de la población: cuando cambia la tasa de crecimiento de la población *n*, el capital per cápita deseado en el siguiente periodo no cambia, pero ahora para alcanzar el mismo nivel de capital per cápita hay que invertir más. Para entender por qué, vamos a suponer que estamos en una economía donde la tasa de depreciación es 1 (no queda nada del stock de capital pasado) y tenemos una familia con 1+n descendentes. Si la familia quiere que su descendencia tenga un nivel de capital per cápita igual a k^*, y si sólo tiene un descendiente, la inversión que tiene que realizar es de k^* unidades, si tiene dos descendientes tendrá que invertir k^* unidades por descendiente, es decir 2 k^* unidades, si tiene $1+n$ descendientes, tendrá que invertir $(1+n)k^*$ unidades. Por tanto, cuanto mayor es la tasa de crecimiento de la población, más inversión es necesaria para alcanzar el mismo nivel de capital per cápita. Esto significa que cuanto mayor es el crecimiento de la población, mayor es la demanda de inversión, ya que para alcanzar el capital per cápita deseado en el siguiente periodo, que no cambia con la tasa de crecimiento de la población, se necesita hacer una inversión mayor.

$$\uparrow i^d = (1 + \uparrow n)k_{+1}^d - (1-\delta)k$$

Un incremento de la tasa de natalidad no afecta al capital demandado en el siguiente periodo, pero si afecta a la curva de demanda de inversión, que se desplaza hacia la derecha, como se representa en el siguiente gráfico:

Efecto de un incremento de la tasa de crecimiento de la población:
Incrementa la inversión necesaria para alcanzar el nivel deseado de capital del siguiente periodo

Demanda capital siguiente periodo Demanda de inversión



<u>Efecto de un incremento en la tasa de depreciación:</u> cuando aumenta la tasa de depreciación del capital, el capital per cápita deseado en el siguiente periodo para un determinado <u>tipo de interés bruto</u>[10] no cambia, pero sin embargo, para alcanzar el mismo nivel de capital per cápita hay que invertir más, ya que la parte del capital presente que se conserva en el siguiente periodo es menor. Esto significa que cuanto mayor es la tasa de depreciación del capital, mayor es la demanda de inversión, ya que para alcanzar el capital per cápita deseado, que no cambia con la tasa de depreciación si se conserva el mismo tipo de interés bruto, se necesita hacer una inversión mayor.

$$\uparrow i^d = (1+n)k_{+1}^d - (1 - \uparrow \delta)k = (1+n)k_{+1}^d - k + \uparrow \delta k$$

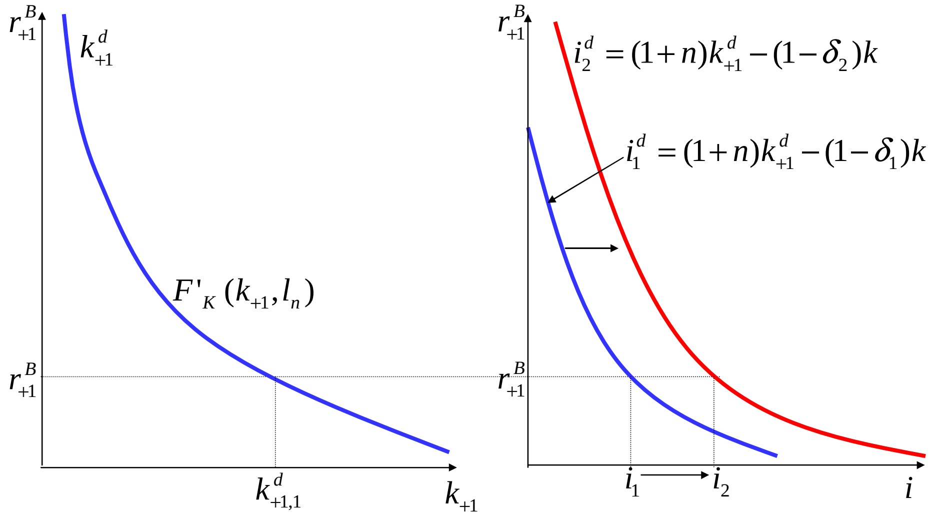
Un incremento de la tasa de depreciación no afecta al capital demandado en el siguiente periodo (manteniendo el tipo de interés bruto constante), pero sí afecta a la curva de

[10] Si en lugar de fijarse el tipo de interés bruto, se fijara el tipo de interés neto, el efecto sería distinto, como se explica en el apéndice II.

demanda de inversión, que se desplaza hacia la derecha, como se representa en el siguiente gráfico.

Efecto de un incremento de la tasa de depreciación:
Incrementa la inversión necesaria para alcanzar el nivel deseado de capital del siguiente periodo

Demanda capital siguiente periodo Demanda de inversión



Resumiendo, la demanda de capital del siguiente periodo depende negativamente del tipo de interés bruto, porque cuanto mayor es el coste de financiación menor son los incentivos a invertir, y depende positivamente del nivel natural de empleo, porque cuanto mayor es el nivel natural de empleo mayor es el producto marginal del capital. La demanda de inversión decrece con el tipo de interés bruto, porque afecta negativamente de la demanda de capital del siguiente periodo, dado que aumenta los costes de financiar la inversión. La demanda de inversión aumenta con el nivel natural de empleo, ya que afecta positivamente al producto marginal del capital y por tanto a la rentabilidad de la inversión. Además, la demanda de inversión aumenta con la tasa de natalidad y de depreciación, que hacen que para alcanzar el nivel de capital deseado en el siguiente periodo se necesite más inversión. Finalmente, la demanda de inversión decrece con el stock de capital presente, que tiene el efecto opuesto al de las tasas de depreciación y natalidad: cuanto mayor es el capital del presente menor es la inversión necesaria para alcanzar el nivel de capital deseado en el siguiente periodo:

$$i^d\left(\underset{-}{r_{+1}^B}, \underset{+}{l_n}, \underset{-}{k}, \underset{+}{n}, \underset{+}{\delta}\right) = (1+n)k_{+1}^d\left(\underset{-}{r_{+1}^B}, \underset{+}{l_n}\right) - (1-\delta)k$$

Autores: Juan Acosta Ballesteros, Carmen Álvarez Albelo, Carlos Bethencourt Marrero, Rosa Marina González Marrero, Fernando Perera Tallo, Mª Gracia Rodríguez Brito **http://bit.ly/8l8DDu**

Cuadro resumen

Efecto de distintas variables sobre la demanda de capital del siguiente periodo, k_{+1}^d, y sobre la demanda de inversión, $i^d = (1+n)k_{+1}^d - (1-\delta)k$

Variable	k_{+1}^d	i^d	Mecanismo
r_{+1}^B	-	-	Aumenta el coste de financiar la inversión
l_n	+	+	Aumenta el producto marginal del capital y la rentabilidad de la inversión
k	No afecta	-	Reduce la inversión necesaria para alcanzar el nivel deseado de capital del siguiente periodo
n	No afecta	+	Incrementa la inversión necesaria para alcanzar el nivel deseado de capital del siguiente periodo
δ	No afecta	+	Incrementa la inversión necesaria para alcanzar el nivel deseado de capital del siguiente periodo

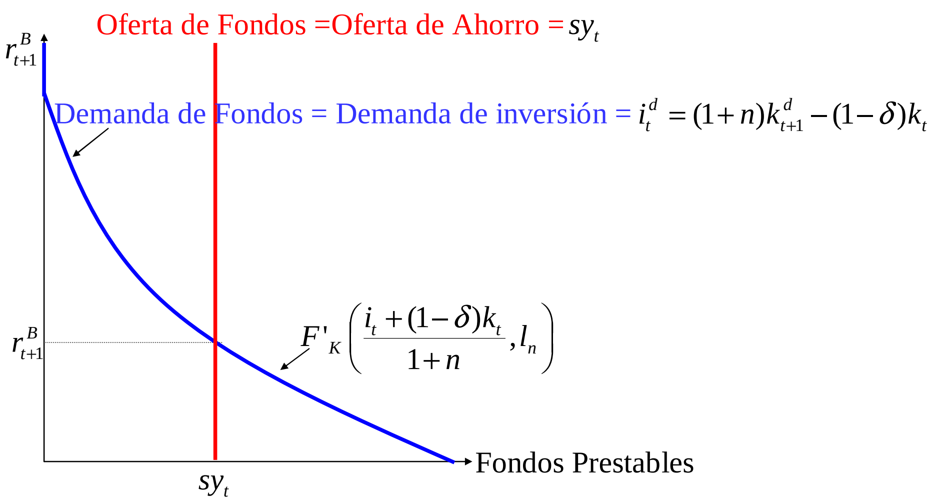
2.8.2 Equilibrio en el mercado de fondos

Para que haya equilibrio en el mercado de fondos, la demanda de fondos, que es igual a la financiación que necesitan las empresas para realizar la inversión, se tiene que igualar a la oferta de fondos, que es igual al ahorro de los consumidores:

$$i_t^d = sy_t \text{ donde } i_t^d = (1+n)k_{t+1}^d - (1-\delta)k_t \text{ donde } k_{t+1}^d \overset{Def}{\Leftrightarrow} F'_K\left(k_{t+1}^d, l_n\right) = r_{t+1}^B$$

Por tanto, en equilibrio la cantidad de inversión la determina el ahorro, ya que en este modelo el ahorro es perfectamente inelástico con respecto al tipo de interés, mientras que el tipo de interés bruto del siguiente periodo será igual al producto marginal del capital en el siguiente periodo.

Mercado de Recursos Financieros en términos per cápita



Mercado de bienes:

La condición de equilibrio del mercado de trabajo implica que la oferta de bienes por parte de las empresas de la economía es simplemente la correspondiente al stock capital existente en la economía y al nivel natural de empleo:

$$\left.\begin{array}{l} l^d_t = l_n \\ y^s_t = F(k_t, l^d_t) \end{array}\right\} \Rightarrow y^s_t = F(k_t, l_n)$$

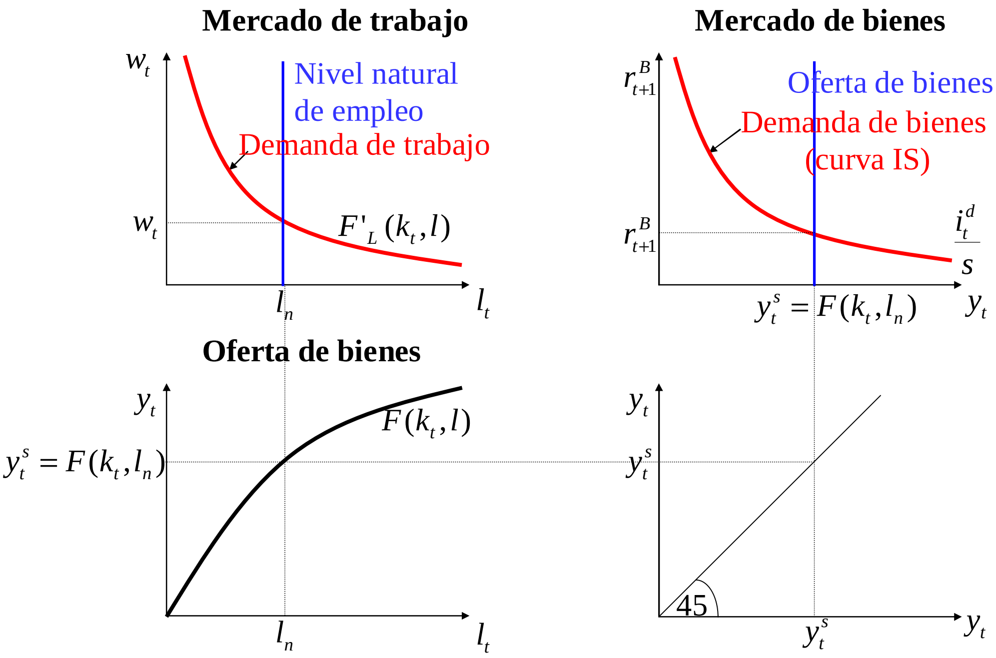
La demanda de bienes vendría dada por la demanda de bienes de consumo por parte de los hogares $c_t = (1-s)y_t$, más la demanda de bienes de inversión por parte de las empresas i^d_t. Utilizando la identidad renta gasto $y_t = y^d_t$ obtenemos la demanda agregada de bienes de la economía, que en realidad sería una función decreciente del tipo de interés. La representación gráfica de la demanda de bienes de la economía en el espacio renta tipo de interés se conoce como curva IS, que ya estudiamos en la macroeconomía a corto plazo:

$$\left.\begin{array}{l} y^d_t = c_t + i^d_t = (1-s)y_t + i^d_t \\ y^d_t = y_t \end{array}\right\} \Rightarrow y^d_t = \frac{i^d_t}{s}$$

El equilibrio en el mercado de bienes ocurrirá cuando la oferta de bienes por parte de las empresas se iguales a la demanda de bienes:

$$y^s_t = F(k_t, l_n) = y^d_t = \frac{i^d_t}{s}$$

Autores: Juan Acosta Ballesteros, Carmen Álvarez Albelo, Carlos Bethencourt Marrero, Rosa Marina González Marrero, Fernando Perera Tallo, Mª Gracia Rodríguez Brito **http://bit.ly/8l8DDu**



Si la renta es igual a la demanda de bienes de la economía (curva IS), entonces el mercado de fondos esta en equilibrio:

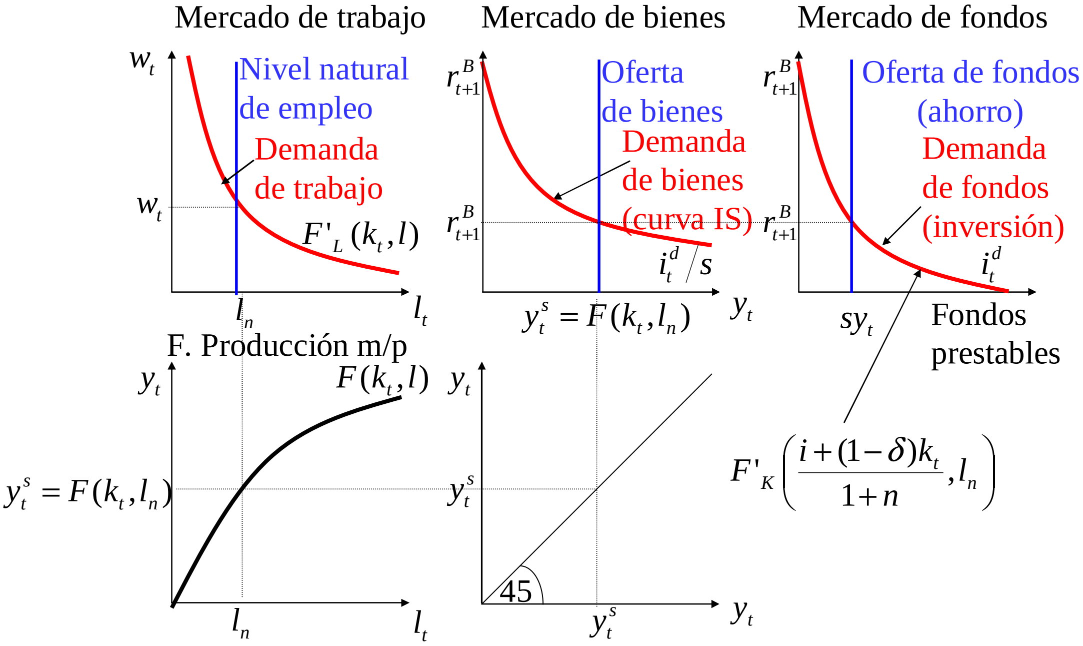
$$y_t = (1-s)y_t + i^d_t \Leftrightarrow sy_t = i^d_t$$

Dado que para que haya equilibrio en el mercado de bienes la renta tiene que ser igual a la demanda agregada (el equilibrio es en un punto de la curva IS), si hay equilibrio en el mercado de bienes, hay equilibrio en el mercado de fondos. De hecho, el nombre de la curva IS viene de la expresión en inglés "Investment-Savings curve" (curva inversión ahorro), ya que dicha curva se puede derivar de la condición de equilibrio en el mercado de fondos: la inversión tiene que ser igual en equilibrio al ahorro.

Equilibrio de la economía a medio plazo:

El equilibrio de la economía a medio plazo se puede representar en el siguiente gráfico donde aparecen las condiciones de equilibrio del mercado de trabajo, del mercado de bienes y del mercado de fondos.

Equilibrio a medio Plazo



La diferencia más importante de este gráfico que representa el equilibrio de la economía a medio plazo con respecto al corto plazo es que no aparece el gráfico del espacio renta precios (donde se representaba la demanda agregada y la oferta agregada en el equilibrio de corto plazo). La razón de ello es que en el medio plazo, dado que los salarios y los precios son flexibles, los cambios en las variables nominales, tales como un cambio en la oferta monetaria, sólo afecta a las variables nominales pero no a las variables reales. Por ejemplo, un incremento en la oferta monetaria haría que aumentara los precios de los bienes y los salarios en la misma proporción, por lo que los salarios en términos reales no se verían afectados, lo que haría que el resto de las variables reales, nivel de empleo, producción,....etc. tampoco se vieran afectadas. De hecho, los precios aumentarían en la misma proporción que la oferta monetaria, lo que implica que ni siquiera la oferta monetaria en términos reales se movería. Por tanto, dada esta "dicotomía clásica" entre variables reales y nominales, el estudio de las variables nominales tales como los precios y la oferta monetaria, tiene mucho más interés en el corto plazo, donde tienen efectos sobre las variables reales, que en el medio y largo plazo, donde, en general, se las suele obviar.

Comportamiento dinámico del capital:

Dada la ecuación de acumulación del capital en términos per cápita, la condición de equilibrio en el mercado de recursos financieros y de trabajo, y la identidad renta/producción, es fácil obtener la ley de movimiento del capital per cápita en equilibrio:

Ecuación de acumulación del capital per capita: $k_{t+1} = \dfrac{i_t + (1-\delta)k_t}{1+n}$

Equilibrio en el mercado de Fondos: $i_t = sy_t$

$\Rightarrow$

Identidad renta producción: $y_t = y_t^s = F(k_t, l_n)$

$$k_{t+1} = \frac{sF(k_t, l_n) + (1-\delta)k_t}{1+n}$$

La anterior ecuación la denominaremos ecuación de acumulación del capital per cápita de equilibrio o capital per capita del siguiente periodo. Esta curva la podemos reescribir de la siguiente manera:

$$k_{t+1} = \frac{i_t + (1-\delta)k_t}{1+n} = \frac{i_t + (1-\delta)k_t - (1+n)k_t + (1+n)k_t}{1+n} = k_t + \frac{i_t - (\delta+n)k_t}{1+n}$$

Sustituyendo la condición de equilibrio del mercado de fondos $i_t = sF(k_t, l_n)$ obtenemos la siguiente expresión:

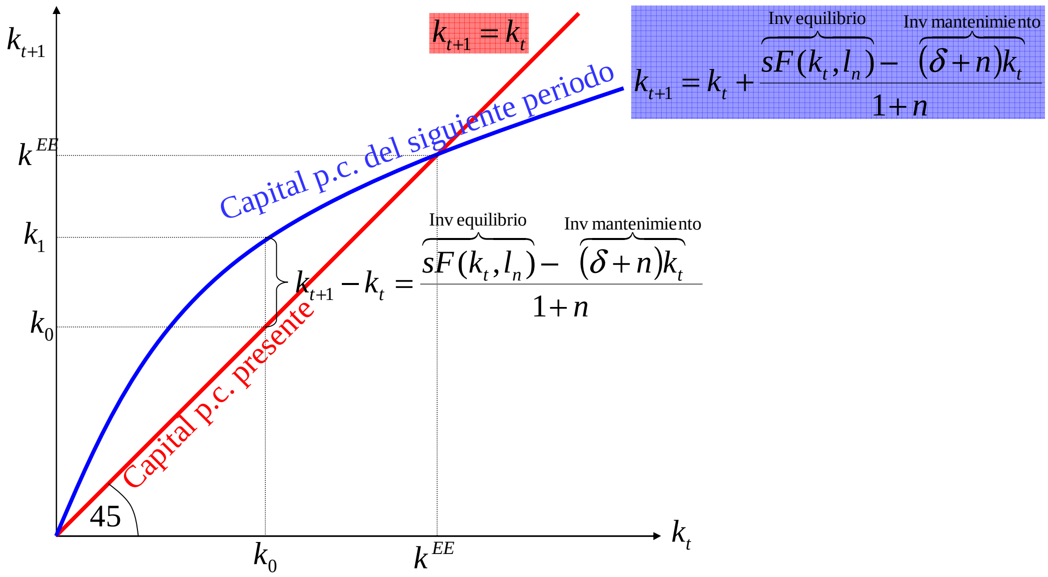
$$k_{t+1} = k_t + \frac{\overbrace{sF(k_t, l_n)}^{\text{Inv equilibrio}} - \overbrace{(\delta+n)k_t}^{\text{Inv mantenimiento}}}{1+n}$$

Vemos que si la inversión de equilibrio supera a la de mantenimiento, el capital del siguiente periodo aumenta, en caso contrario disminuye:

$$k_{t+1} - k_t = \frac{\overbrace{sF(k_t, l_n)}^{\text{Inv equilibrio}} - \overbrace{(\delta+n)k_t}^{\text{Inv mantenimiento}}}{1+n}$$

En el siguiente gráfico se representa la ecuación capital per capita del siguiente periodo:

Acumulación de Capital per cápita en el equilibrio



En el anterior gráfico se representa la curva (en azul) que representa la ecuación de acumulación del capital a la que denominaremos curva de capital del siguiente periodo. Esta curva nos dice para un nivel de capital en el presente, el capital del siguiente periodo. Por ejemplo si en el presente el nivel de capital per cápita es k_0, esta curva nos indica que en el siguiente periodo el capital per cápita será k_1. En el anterior gráfico también aparece representada la línea de 45 grados (en rojo), que nos indica para un determinado de capital en el eje horizontal (de accisas) el mismo nivel de capital en el eje vertical (de ordenadas). Es decir, para un determinado nivel de capital en el presente, la línea de 45 grados nos indica ese mismo nivel de capital. Por lo que llamaremos a la línea de 45 grados, curva del capital presente. Matemáticamente, la curva de capital presente sería: $k_{t+1} = k_t$. Si la curva de acumulación de capital está por encima de la recta de 45 grados, significa que el capital del siguiente periodo va a ser superior al del presente, como ocurre por ejemplo cuando del capital en el presente es igual a k_0. Esto significa que la inversión de equilibrio está por encima de la de mantenimiento, y la distancia vertical entre la curva de capital del siguiente periodo y la curva de capital presente para un nivel de capital dado k_0, es igual a lo que aumentaría el capital en el siguiente periodo si en el presente tuviéramos ese nivel de capital:

$$k_{t+1} - k_t = \overbrace{k_t + \frac{sF(k_t, l_n) - (\delta+n)k_t}{1+n}}^{\text{Capital del siguiente periodo}} - \overbrace{k_t}^{\substack{\text{Capital}\\ \text{Presente}}} = \frac{sF(k_t, l_n) - (\delta+n)k_t}{1+n}$$

Si la curva de capital del siguiente periodo está por debajo de la curva de capital presente, ocurre exactamente lo contrario: la inversión de equilibrio es inferior a la de mantenimiento y por tanto el capital del siguiente periodo es disminuye con respecto al del presente. Vemos que hay un nivel de capital per capita en el que la ecuación de acumulación del capital (o curva de capital del siguiente periodo) corta con la recta de 45 grados (capital del presente). Esto significa que si empezamos en ese nivel de capital per cápita, la inversión de equilibrio coincidirá con la de mantenimiento y por tanto en el siguiente periodo tendremos el mismo nivel de capital per cápita, lo que implica que dentro de dos periodos, tres periodos o n periodos tendremos el mismo nivel de capital per cápita. Es decir, si el capital per capita inicial es aquel en el que la curva de capital presente corta con la de capital en el siguiente periodo, entonces, ese será el nivel de capital per cápita que tendrá la economía para siempre. Es por ello que a ese nivel de capital per cápita lo llamamos capital per cápita del estado estacionario[11]:

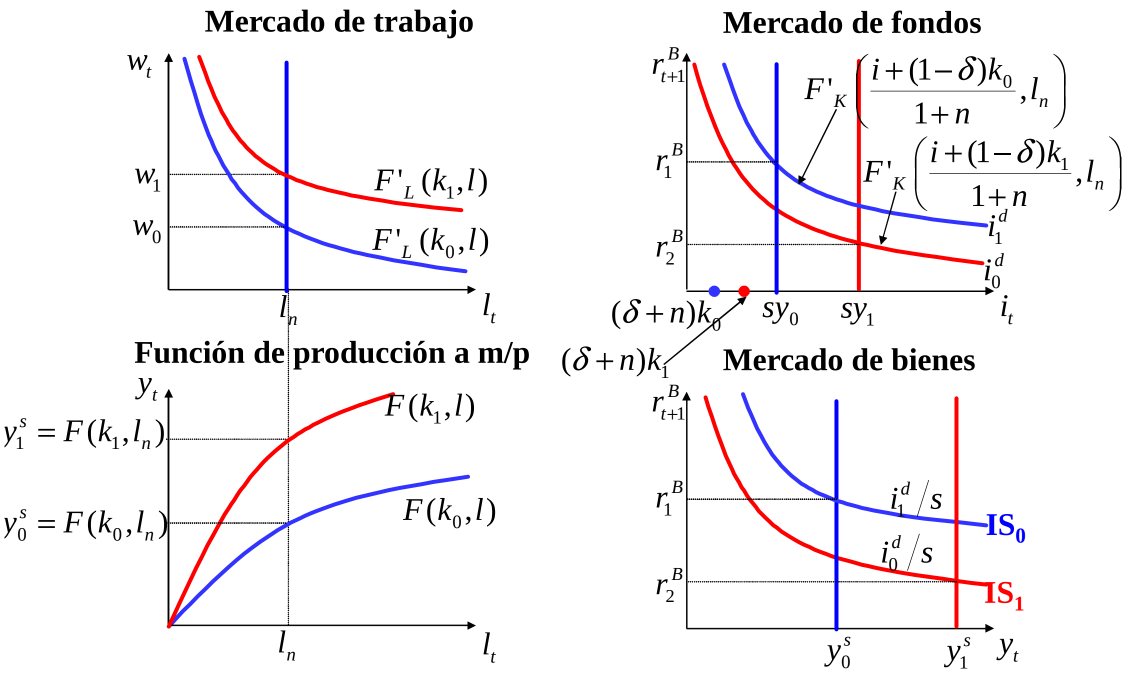
$$k^{EE} \overset{Def}{\Leftrightarrow} k^{EE} = k^{EE} + \frac{sF(k^{EE}, l_n) - (\delta + n)k^{EE}}{1+n} \Leftrightarrow sF(k^{EE}, l_n) = (n+\delta)k^{EE}$$

Por tanto en el estado estacionario la inversión de equilibrio, que es igual al ahorro, es igual a la inversión de mantenimiento $(n+\delta)k^{EE}$, es decir, al nivel de inversión per cápita que se necesita para que el capital per capita permanezca constante. Para ello se tiene que compensar la parte del capital que se deprecia δk y además se tiene que compensar el hecho de que la población crezca, lo que hace que el stock de capital se "reparta" entre un mayor número de personas. Si queremos que el capital que "le toque" a cada persona no disminuya al aumentar la población, tenemos que hacer que el stock de capital crezca a la misma tasa que la población y, por tanto, se necesita una inversión igual a nk.

Transición de la economía cuando el capital inicial es inferior al del estado estacionario:

Cuando el capital per cápita inicial es inferior al del estado estacionario, la inversión de equilibrio es superior a la de mantenimiento, con lo que la tasa de crecimiento del capital per cápita es positiva, como podemos ver en el gráfico superior, lo que implica que el capital per cápita del siguiente periodo será mayor que el inicial. En el siguiente gráfico se representa lo que ocurre en los distintos mercados de la economía cuando el capital per capita aumenta. En color azul aparecen representados las distintos mercados en el periodo inicial 0, cuando el stock de capital es k_0, inferior al del estado estacionario, mientras que la situación de los mercados en el siguiente periodo, periodo 1, se representa en líneas rojas.

[11] Las siguientes condiciones, llamadas condiciones de Inada, son suficientes para garantizar la existencia de estado estacionario: $\lim_{K\to+\infty} F'_K(K,L) = 0$; $\lim_{K\to 0} F'_K(K,L) = +\infty$

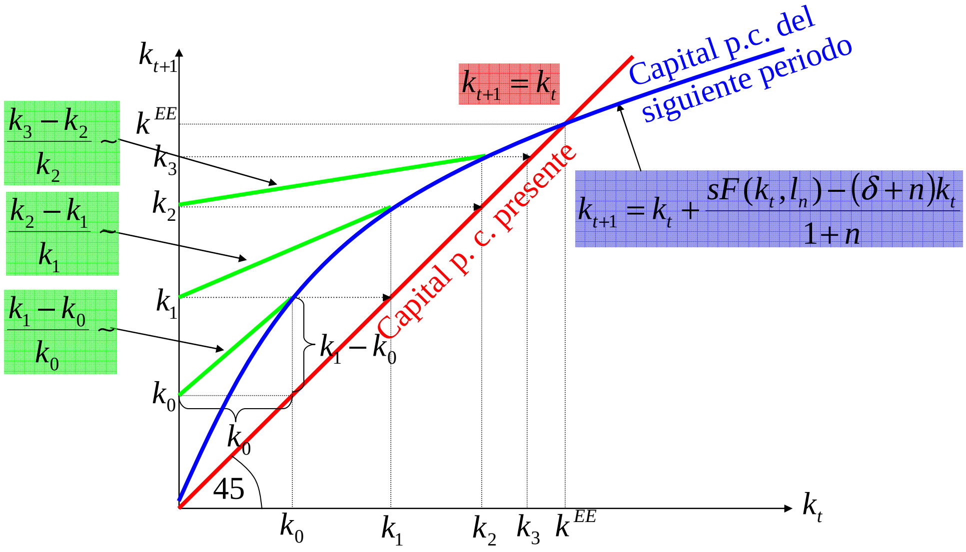


Dado que el capital per cápita es menor al del estado estacionario, la inversión de mantenimiento está por debajo de la inversión de equilibrio. Esto se ve reflejado en el equilibrio inicial en el mercado de fondos (en azul), donde en el momento inicial 0 la inversión de equilibrio, que es igual al ahorro sy_0, es mayor que la inversión de mantenimiento $(\delta+n)k_0$ (que se indica con un punto azul). Esto implica que el capital aumenta en el siguiente periodo, teniendo los siguientes efectos sobre los distintos mercados en el siguiente periodo 1 (representado con curvas en rojo). Dado que el nivel natural de empleo per cápita no varía, la cantidad per cápita contratada de trabajo tampoco lo hace. Ahora bien, el incremento en el capital per cápita implica que aumenta la productividad marginal del trabajo y, por tanto, la demanda de trabajo. Pero este incremento en la demanda de trabajo sólo se traduce en un incremento del salario, no en la cantidad de empleo per cápita que viene fijada por el nivel natural de empleo. A pesar de que la cantidad de trabajo per cápita en el periodo 1 es igual a la del periodo 0, la producción per cápita sí aumenta debido al efecto directo que tiene el incremento del capital per cápita sobre la producción per cápita en la economía (gráfico inferior izquierdo), reflejado en el desplazamiento hacia arriba de la función de producción a medio plazo. El incremento de la producción y por tanto de la renta se traduce en un incremento del ahorro lo que hace que aumente la oferta de fondos (gráfico superior derecho). El incremento del capital no afecta a la demanda de capital del siguiente periodo, pero sí a la demanda de inversión que cae como consecuencia de la menor distancia del capital deseado en el siguiente periodo con el existente en el presente ($\downarrow i^d = (1+n)k_{+1}^d - (1-\delta)\uparrow k$). Por tanto en el mercado de fondos se incrementa la oferta (ahorro) y disminuye la demanda de fondos (inversión), produciéndose una caída del tipo de interés y un incremento de los fondos prestados, que implica una mayor inversión en el equilibrio[12]. La oferta de bienes, como ya vimos en el gráfico inferior izquierdo, aumenta, mientras que la demanda de inversión y por tanto la demanda de bienes disminuye, desplazándose la curva IS hacia la izquierda. Como consecuencia aumenta la producción, el gasto y la renta de equilibrio, pero para ello, el tipo de interés tiene que bajar hasta que coincida con el tipo de interés que equilibra el mercado de fondos, ya que como hemos visto, si el mercado de fondos está en equilibrio también lo está el mercado de bienes. En resumen, a lo largo de la transición de un capital per cápita inicial por debajo del de el estado estacionario, los salarios aumentan como consecuencia del incremento de la demanda de trabajo, la producción per cápita también aumenta como consecuencia del incremento del capital per cápita, mientras que el tipo de interés cae como consecuencia del incremento del ahorro y la caída de la demanda de inversión. A pesar de la caída de la demanda de inversión, la inversión efectiva (de equilibrio) aumenta como consecuencia de la caída del tipo de interés, ya que sabemos que en el equilibrio la inversión tiene que ser igual al ahorro que aumenta.

En el siguiente gráfico vemos como cuando el capital inicial en el momento 0, k_0, es menor que el del estado estacionario, la curva de capital per cápita del siguiente periodo pasa por encima de la curva del capital presente (recta de 45 grados). Por tanto, la inversión de equilibrio es mayor que la de mantenimiento y como consecuencia el capital del siguiente periodo va a ser superior al inicial, es decir, el capital per cápita está creciendo a tasas positivas.

[12] No obstante, hay que tener en cuenta que esta mayor inversión no implica una mayor tasa de crecimiento. Para darnos cuanta de por qué, se ha representado en el gráfico del mercado de fondos (superior derecho) la inversión de mantenimiento, definida como la cantidad de inversión necesaria para mantener el stock de capital per cápita constante, es decir, la inversión que tenemos que realizar para compensar el efecto de la depreciación y el incremento de la población sobre el capital per cápita $(\delta + n)k$. La inversión de mantenimiento se representa en el gráfico superior derecho (mercado de fondos) con un punto de color. Evidentemente la inversión de mantenimiento es proporcional al capital y, por tanto, al aumentar el capital, aumenta a la misma tasa que el capital, mientras que las cantidades de renta y de ahorro van aumentando a tasas cada vez menores con el incremento del capital, debido a los rendimientos decrecientes del capital. Esto hace que las tasas de crecimiento del capital sean cada vez menores. Finalmente, en el gráfico inferior derecho aparece representado el mercado de bienes.

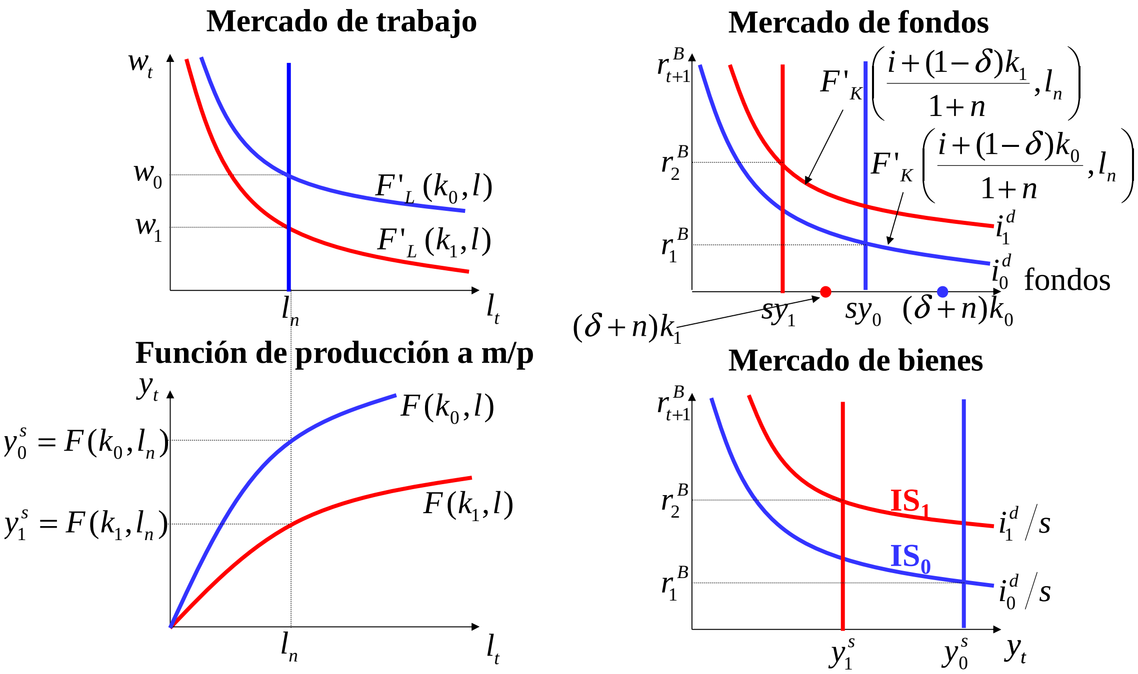
Dinámica del capital per cápita cuando k_0 < k^{EE}: El capital va aumentando pero a tasas cada vez menores, acercándose paulatinamente al capital del estado estacionario



Dado el capital per cápita inicial en el momento 0, k_0, la curva de capital per cápita del siguiente periodo nos dice el capital per cápita del periodo 1, k_1. A través de la recta 45 grados (curva del capital per capita presente) podemos trasladar el capital per cápita del periodo 1, k_1, al eje horizontal (eje de abscisas), y utilizando de nuevo la curva de capital per cápita del siguiente periodo, podemos obtener el capital del periodo 2, y utilizando de nuevo el mismo procedimiento, el capital del periodo 3 y así sucesivamente podemos generar la dinámica de capital per cápita. Vemos que el capital per cápita va aumentando acercándose paulatinamente al capital per cápita del estado estacionario. En este gráfico también se ven reflejadas las tasas de crecimiento. Si en el gráfico superior (capital presente-capital siguiente periodo) trazamos una recta del punto $(0, k_0)$ al punto (k_0, k_1) (línea en verde), la pendiente de esa recta es igual a $(k_1 - k_0)/k_0$, que es la tasa de crecimiento del capital per cápita en el periodo 1. Haciendo lo mismo para los siguientes periodos, vemos que la rectas que van del punto $(0, k_t)$ al punto (k_t, k_{t+1}) cada vez tienen menos pendiente, lo que significa que las tasas de crecimiento son positivas pero decrecientes en el tiempo.

Transición de la economía cuando el capital inicial es superior al del estado estacionario:

Cuando el capital per cápita inicial es mayor que el del estado estacionario, la inversión de equilibrio es superior a la de mantenimiento, con lo que el stock de capital per capita disminuye en el siguiente periodo. En el siguiente gráfico vemos el efecto de esta disminución del capital del siguiente periodo en los distintos mercados de la economía. En color azul aparecen representados los distintos mercados en el periodo inicial 0, cuando el stock de capital es k_0, superior al del estado estacionario, mientras que la situación de los mercados en el siguiente periodo, periodo 1, se representa en líneas rojas.



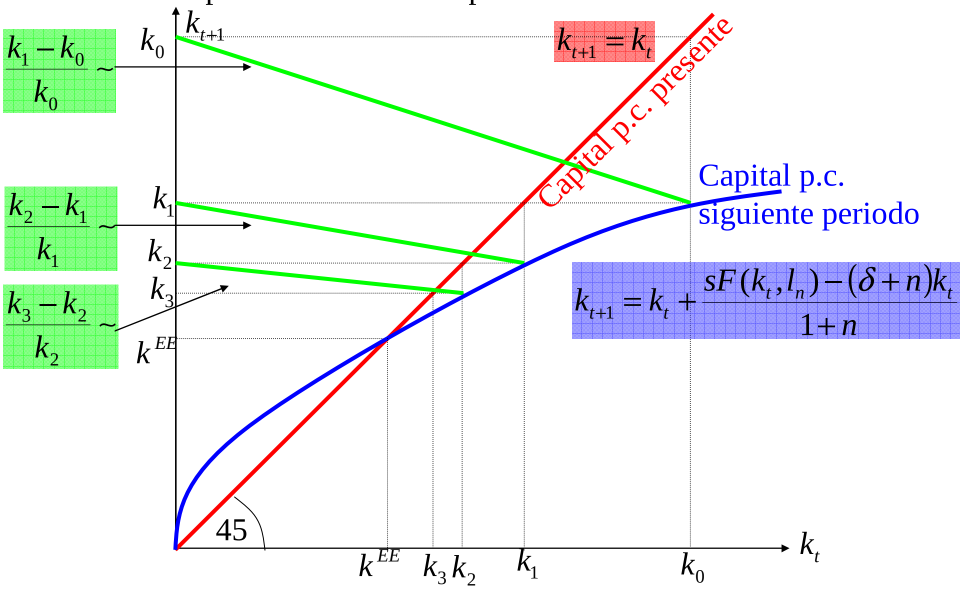
Dado que el capital per cápita es mayor que el del estado estacionario, la inversión de equilibrio es menor que la inversión de mantenimiento. Esto se ve reflejado en el equilibrio inicial en el mercado de fondos (en azul), donde en el momento inicial 0 la inversión de equilibrio, que es igual al ahorro sy_0, es menor que la inversión de mantenimiento $(\delta+n)k_0$ (que se indica con un punto azul). Esto implica que el capital disminuye en el siguiente periodo, teniendo los siguientes efectos sobre los distintos mercados en el siguiente periodo 1 (representado con curvas en rojo). Vemos que cuando disminuye el capital, el producto marginal del trabajo cae, y por tanto cae la demandad de trabajo, que se traduce en un menor salario (gráfico superior izquierdo). La disminución del capital per cápita hace que se reduzca la producción per cápita (gráfico inferior izquierdo) y por tanto la producción per cápita. La disminución de la renta implica un menor ahorro, que se ve reflejado en la caída de la oferta de fondos en el mercado de recurso financieros (gráfico superior derecho). Por otra parte, la demanda de inversión aumenta como consecuencia de la reducción de capital, que no afecta al capital deseado en el siguiente periodo pero sí a la demanda de inversión ($\uparrow i^d = (1+n)k^d_{+1} - (1-\delta)\downarrow k$). Esto implica un incremento en la demanda de fondos. La reducción del ahorro, y por tanto de la oferta de fondos, junto al incremento en la demanda de inversión, la demanda de fondos, implica un tipo de interés mayor en el siguiente periodo y un nivel de inversión inferior[13]. En el mercado de bienes la caída de la oferta de bienes, junto al incremento en la demanda de bienes debida a la mayor demanda de inversión (desplazándose la curva IS a la derecha), implica un tipo de

[13] Vemos también en el mercado de fondos, que la inversión de mantenimiento se encuentra a la derecha del ahorro, por lo que el capital per cápita se está reduciendo a lo largo del tiempo. Ahora bien, la inversión de mantenimiento también se va reduciendo con el nivel de capital a tasas mayores que la reducción de la producción y el ahorro, lo que implica que las tasas de crecimiento del capital per cápita son negativas pero cada vez menores en términos absolutos.

interés en el periodo siguiente mayor. En resumen, a lo largo de la transición de un capital per cápita inicial mayor que el de el estado estacionario, los salarios disminuyen como consecuencia del incremento de la demanda de trabajo, la producción per cápita también cae como consecuencia de la reducción del capital per cápita, mientras que el tipo de interés aumenta como consecuencia de la caída del ahorro, (oferta de fondos) y el incremento de la demanda de inversión. A pesar de la mayor demanda de inversión, la inversión efectiva (de equilibrio) disminuye como consecuencia de la subida del tipo de interés, ya que sabemos que en el equilibrio la inversión tiene que ser igual al ahorro que se contrae.

En el siguiente gráfico podemos ver la evolución del capital per cápita cuando el capital per cápita inicial es superior al del estado estacionario.

Dinámica del capital per cápita cuando $k_0 > k^{EE}$: El capital va disminuyendo pero a tasas (en valor absoluto) cada vez menores, acercándose paulatinamente al capital del estado estacionario



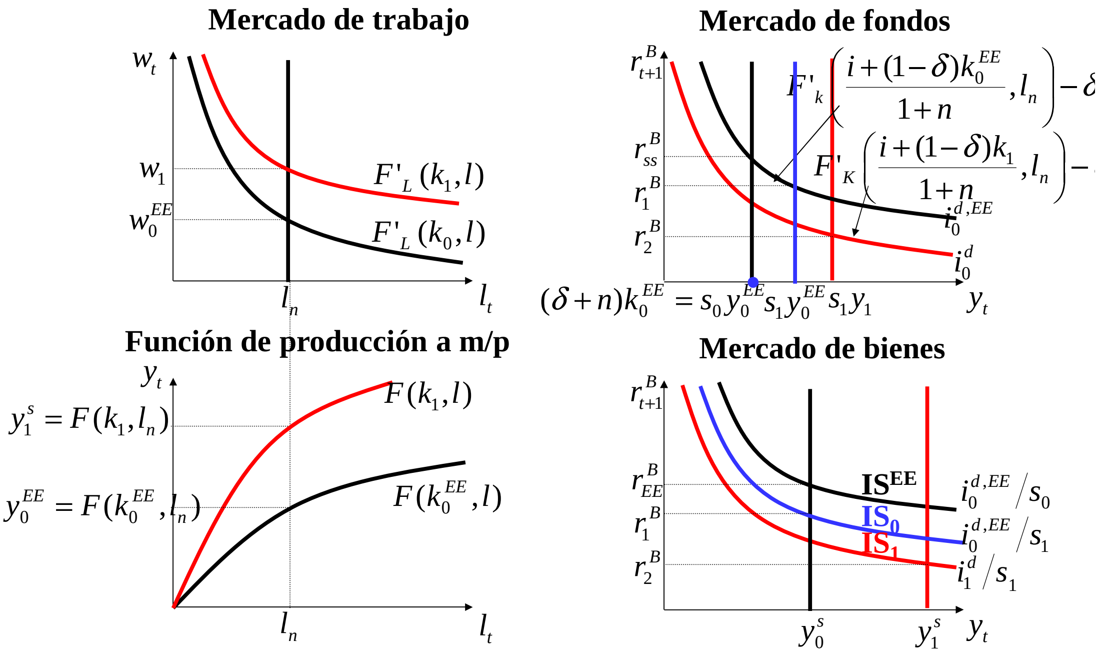
Si el capital inicial (en el periodo 0) k_0, mayor que el del estado estacionario, la curva del capital del siguiente periodo nos indica cual es el capital del periodo 1, k_1, que lo podemos trasladar al eje horizontal (eje de abscisas) a través de la línea de 45 grados (curva del capital presente). Una vez que tenemos k_1 en el eje horizontal, podemos ver cual es el capital en el periodo 2, 3, etc. usando el mismo procedimiento. Vemos que en este caso, al contrario de lo que ocurría cuando el capital per cápita era inferior al del estadio estacionario, el capital per cápita va disminuyendo, ya que la curva del capital del siguiente periodo está por debajo del capital presente. Si trazamos una recta del punto $(0,k_0)$ al punto (k_0,k_1) (línea en verde), la pendiente de esa recta es igual a $(k_1 - k_0)/k_0$, que es la tasa de crecimiento del capital per cápita en el periodo 1. Podemos observar que la pendiente de esta recta, es decir la tasa de crecimiento del capital en el periodo 1, es negativa. Haciendo lo mismo para los siguientes periodos, vemos que la rectas que van del punto $(0,k_t)$ al punto (k_t,k_{t+1}) cada vez tienen menos pendiente en términos absolutos, lo que significa que las tasas de crecimiento son negativas pero decrecientes en valor absoluto con el tiempo. Este hecho también se refleja en el gráfico inferior, que relaciona el capital per cápita con la tasa de crecimiento del periodo siguiente, que como hemos visto, es una función decreciente del capital per cápita. Por tanto el capital per cápita va disminuyendo progresivamente, aunque a tasas cada vez menores, acercándose cada vez más al capital per cápita del estado estacionario.

Efecto de in incremento en la tasa de ahorro:

Para ver cómo afectan las tasas de ahorro a la acumulación de capital, vamos a partir de una situación de estado estacionario, y suponer que en el momento cero aumenta la tasa de ahorro, pasando de una tasa s_0 a una tasa s_1, siendo $s_1 > s_0$.

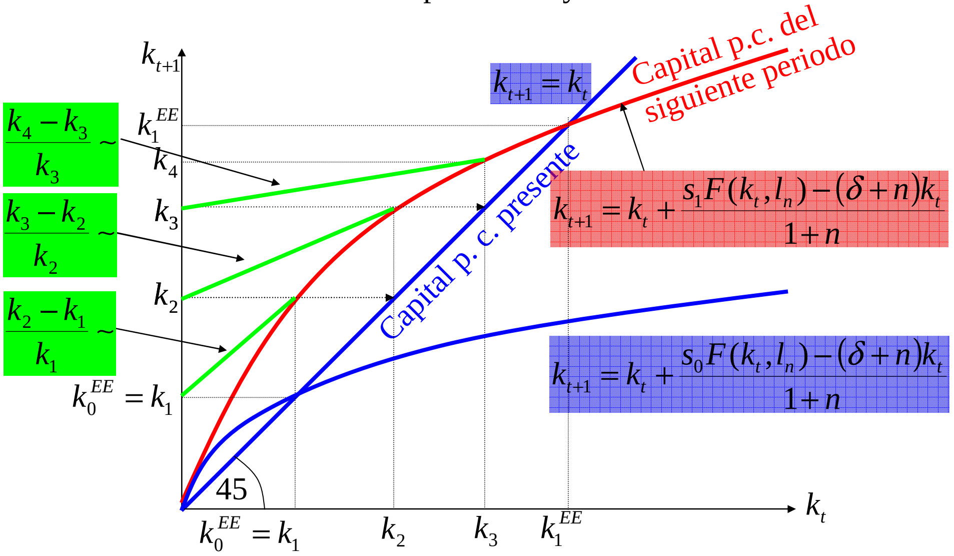
Partimos de una situación de estado estacionario (representado en negro). Hay equilibrio en el mercado de trabajo, lo que implica que la cantidad de trabajo per cápita es igual a uno (el nivel natural de empleo per cápita) y que el salario se iguala al producto marginal del trabajo para el capital per cápita del estado estacionario. La producción per cápita esta en función del capital per cápita del estado estacionario. En el mercado de fondos hay equilibrio y la inversión que se está realizando, que es igual al ahorro en el estado estacionario, es igual a la inversión de mantenimiento, representada por un punto azul. Finalmente, también hay equilibrio en el mercado de bienes. En el momento 0, el incremento de la tasa de ahorro no afecta al stock de capital existente, por lo que no afecta ni al mercado de trabajo ni a la oferta de bienes. Sin embargo, en el mercado de fondos, aumenta el ahorro, desplazándose la curva de ahorro hacia la derecha (curva azul), cayendo el tipo de interés de equilibrio. La caída del tipo de interés hace que aumente la inversión, que se sitúa a la derecha de la inversión de mantenimiento (que coincide con el ahorro del estado estacionario inicial y se representa por un punto azul) y por tanto el capital per cápita en el siguiente periodo (periodo 1), será mayor.

A partir del periodo 1 (curvas en rojo), empezará la transición al nuevo estado estacionario que tiene un capital per cápita mayor. Aumenta el capital per cápita, lo que hace que aumente la demanda de trabajo y por tanto el salario, mientras que la cantidad de trabajo per cápita sigue siendo el nivel natural de empleo per cápita, que no varía. La producción y por tanto la oferta de bienes de la economía aumenta como consecuencia del incremento del capital per cápita. Esto hace que aumente la renta y por tanto el ahorro, mientras que la demanda de inversión cae como consecuencia del mayor stock de capital per cápita ($\downarrow i^d = (1+n)k_{+1}^d - (1-\delta) \uparrow k$). Esto provoca una caída del tipo de interés en el mercado de fondos y un incremento de la inversión de equilibrio, que se iguala al ahorro que ahora es mayor. En resumen, un incremento de la tasa de ahorro hace que haya más oferta de fondos en el mercado de recursos financieros, bajando el tipo de interés y propiciando una mayor inversión y acumulación de capital.



En el siguiente gráfico se representa la evolución dinámica del capital per cápita. Un incremento de la tasa de ahorro hace que aumente la oferta de fondos y la inversión de equilibrio, por lo que la curva de capital del siguiente periodo se desplaza hacia arriba colocándose por encime de la recta de 45 grado al nivel de capital del estado estacionario inicial. Esto significa que el capital del siguiente periodo (periodo 1) va a ser mayor, y a partir de ahí va a seguir incrementándose a tasas positiva pero cada vez menores (ver pendientes de las rectas en verde) acercándose paulatinamente al estado estacionario.

Dinámica del capital per cápita cuando aumenta la tasa de ahorro: Aumenta el ahorro y la inversión de equilibrio, haciendo que el capital crezca a tasas positivas pero cada vez menores, acercándose al nuevo estado estacionario donde el capital es mayor.



Autores: Juan Acosta Ballesteros, Carmen Álvarez Albelo, Carlos Bethencourt Marrero, Rosa Marina González Marrero, Fernando Perera Tallo, Mª Gracia Rodríguez Brito **http://bit.ly/8l8DDu**

3 CONTABILIDAD DEL CRECIMIENTO Y EL RESIDUO DE SOLOW

En una serie de artículos pioneros, Abramovitz (1956) y Solow (1957) se propusieron averiguar cómo contribuyen los factores productivos al crecimiento de la producción. Para entender el método seguido por estos autores, tenemos que analizar antes cómo se distribuye la renta entre los distintos factores productivos en una economía cuya función de producción presenta rendimientos constantes a escala. Para ello vamos a partir de la definición de rendimientos constantes a escala:

$$\lambda F(K,L)=F(\lambda K,\lambda L)$$

Derivando con respecto a λ:

$$F(K,L)=\frac{\partial F(\lambda K,\lambda L)}{\partial(\lambda K)}\frac{\partial(\lambda K)}{\partial\lambda}+\frac{\partial F(\lambda K,\lambda L)}{\partial(\lambda L)}\frac{\partial(\lambda L)}{\partial\lambda}$$

$$F(K,L)=F'_K(\lambda K,\lambda L)K+F'_L(\lambda K,\lambda L)K$$

Usando la homogeneidad de grado 0 de los productos marginales del capital y el trabajo[14]:

$$F(K,L)=F'_K(K,L)K+F'_L(K,L)K\Rightarrow\frac{F'_K(K,L)K}{F(K,L)}+\frac{F'_L(K,L)K}{F(K,L)}=1$$

Utilizado la condición de primer orden de las empresas con respecto a la inversión (que es una condición de equilibrio) que nos dice que la empresa invertirá en capital hasta el punto en que el producto marginal del capital se iguale al tipo de interés bruto, la condición de primer orden de las empresas con respecto al trabajo que nos dice que la empresa contratará trabajo hasta el punto en que el producto marginal del trabajo se iguale al salario y la identidad renta igual a producción obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{F'_K(K_t,L_t)K_t}{F(K_t,L_t)}+\dfrac{F'_L(K_t,L_t)K_t}{F(K_t,L_t)}=1\\ r_t^B=F'_K(K_t,L_t)\\ w_t=F'_L(K_t,L_t)\\ Y_t=F(K_t,L_t)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\frac{r_t^B K_t}{Y_t}+\frac{w_t L_t}{Y_t}=1$$

[14] Si una función es homogénea de grado uno, entonces cumple la siguiente propiedad: $\forall\lambda\geq 0,\forall(K,L)\ \lambda F(K,L)=F(\lambda K,\lambda L)$

Por tanto, las derivadas parciales de dicha función son homogéneas de grado cero, es decir:

$$\forall\lambda\geq 0,\forall(K,L)\ F'_L(K,L)=F'_L(\lambda K,\lambda L)$$

Para demostrarlo, basta derivar la definición de homogeneidad de grado uno con respecto a una variable cualquiera, en el siguiente ejemplo, el trabajo:

$$\lambda F(K,L)=F(\lambda K,\lambda L)\Rightarrow\lambda\frac{\partial F(K,L)}{\partial L}=\frac{\partial F(\lambda K,\lambda L)}{\partial L}\Rightarrow\lambda F'_L(K,L)=F'_L(\lambda K,\lambda L)\lambda\Rightarrow$$
$$F'_L(K,L)=F'_L(\lambda K,\lambda L)$$

Definimos la fracción de la renta (bruta) que va al capital α_t como las rentas brutas del capital sobre la renta bruta de la economía:

$$\alpha_t = \frac{r_t^B K_t}{Y_t}$$

Definimos la fracción de la renta que va al trabajo como las rentas del trabajo partido por la renta bruta. Usando la ecuación que obtuvimos antes, se llega a la conclusión de que, en el caso de los rendimientos constantes a escala, la fracción de la renta que va al trabajo es igual a uno menos la fracción de la renta que va al capital:

$$\frac{r_t^B K_t}{Y_t} + \frac{w_t L_t}{Y_t} = 1 \Rightarrow \frac{w_t L_t}{Y_t} = 1 - \frac{r_t^B K_t}{Y_t} = 1 - \alpha_t$$

Para analizar como los distintos factores productivos contribuyen al crecimiento de la producción, vamos a partir de la función de producción:

$$Y_t = F(K_t, L_t)$$

Según esta función de producción, cuando aumenta la producción es debido al incremento del capital y/o del trabajo:

$$\Delta Y_{t+1} = \frac{\partial F(K_t, L_t)}{\partial L} \Delta L_{t+1} + \frac{\partial F(K_t, L_t)}{\partial K} \Delta L_{t+1}$$

$$(Y_{t+1} - Y_t) = \frac{\partial F(K_t, L_t)}{\partial L}(L_{t+1} - L_t) + \frac{\partial F(K_t, L_t)}{\partial K}(K_{t+1} - K_t)$$

$$\frac{(Y_{t+1} - Y_t)}{Y_t} = \frac{\frac{\partial F(K_t, L_t)}{\partial L} L_t}{Y_t} \frac{(L_{t+1} - L_t)}{L_t} + \frac{\frac{\partial F(K_t, L_t)}{\partial K} K_t}{Y_t} \frac{(K_{t+1} - K_t)}{K_t}$$

$$\frac{(Y_{t+1} - Y_t)}{Y_t} = \frac{w_t L_t}{Y_t} \frac{(L_{t+1} - L_t)}{L_t} + \frac{(\delta + r_t) K_t}{Y_t} \frac{(K_{t+1} - K_t)}{K_t}$$

$$v_{Y,t+1} = (1 - \alpha_t) v_{L,t+1} + \alpha_t v_{K,t+1}$$

Donde $v_Y, v_L \; y \; v_K$ son las tasas de crecimiento de la renta, el empleo y el capital, y donde $\alpha_t \; y \, (1 - \alpha_t)$ representan la fracción de la renta que va al capital y al trabajo, respectivamente, que son aproximadamente constantes en la economía americana. Por tanto, la teoría nos dice que la tasa de crecimiento de la renta es una media ponderada de las tasas de crecimiento del capital y del trabajo, donde las ponderaciones son las fracciones de la renta que van a cada uno de los factores.

Por tanto, teniendo los datos de la fracción de la renta que va al trabajo y al capital (que se obtienen en la contabilidad nacional), datos de empleo y datos de inversión a partir de los cuales se puede obtener la serie del capital, se puede ver la contribución de los distintos factores productivos al crecimiento de la producción.

Un importante hallazgo empírico fue que gran parte del crecimiento no se puede explicar por el crecimiento de los factores productivos. Es decir, la tasa de crecimiento de la renta era mayor que la media ponderada de las tasas de crecimiento del capital y del trabajo:

$$v_{Y,t+1} > (1-\alpha_t)v_{L,t+1} + \alpha_t v_{K,t+1}$$

A esa parte del crecimiento no explicada se la llamó residuo de Solow o tasa de crecimiento de la Productividad Total de los Factores ("Total Factor Productivity", TFP), y se define como sigue:

$$v_{PTF} = v_Y - \alpha_t v_L - (1-\alpha_t)v_K$$

El residuo de Solow se interpreta, normalmente, como progreso técnico: la parte del crecimiento que no se debe al aumento de los factores productivos se tienen que deber a un cambio de la función de producción, que significa un cambio técnico. Es decir, un avance técnico haría que con la misma combinación de factores se obtuviera más producción.

4 CRECIMIENTO SOSTENIBLE

4.1 Tasas de crecimiento en el modelo de Solow

Para calcular la tasa de crecimiento del capital per cápita vamos a partir de la ecuación de acumulación del capital:

$$k_{t+1} = k_t + \frac{\overbrace{sF(k_t,l_n)}^{\text{Inv equilibrio}} - \overbrace{(\delta+n)k_t}^{\text{Inv mantenimiento}}}{1+n} \Leftrightarrow$$

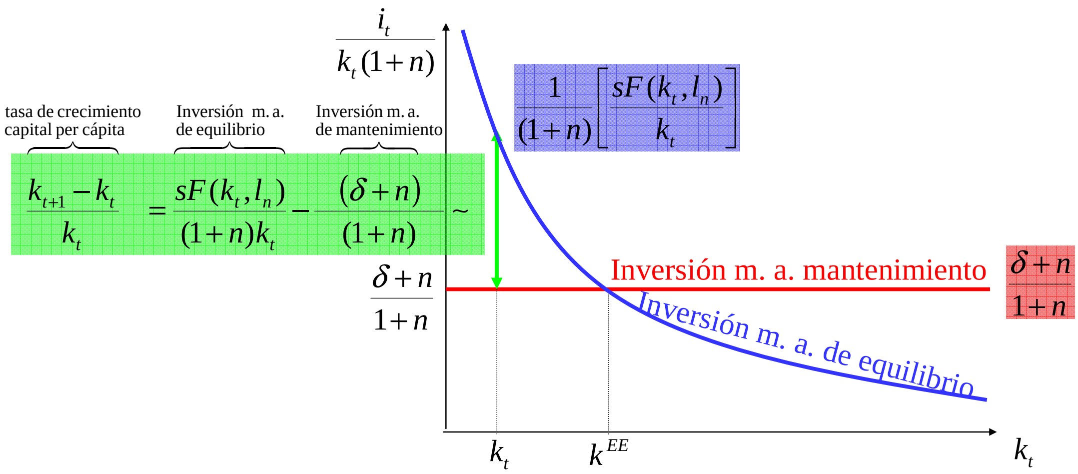
$$\overbrace{k_{t+1} - k_t}^{\substack{\text{Incremento del}\\ \text{capital per}\\ \text{cápita}}} = \overbrace{\frac{sF(k_t,l_n)}{1+n}}^{\substack{\text{Inv equilibrio}\\ \text{por persona del}\\ \text{siguiente periodo}}} - \overbrace{\frac{(\delta+n)k_t}{1+n}}^{\substack{\text{Inv mantenimiento}\\ \text{por persona del}\\ \text{siguiente periodo}}}$$

Vemos que el incremento del capital per cápita es igual a la inversión (bruta) de equilibrio dividida por el número de personas del siguiente periodo (hay 1+n personas en el siguiente periodo por cada persona del presente) menos la inversión de mantenimiento por persona del siguiente periodo. Si a la anterior expresión la dividimos por el capital per cápita presente obtenemos la tasa de crecimiento del capital per cápita:

$$\overbrace{\frac{k_{t+1} - k_t}{k_t}}^{\substack{\text{tasa de crecimiento}\\ \text{capital per cápita}}} = \overbrace{\frac{sF(k_t,l_n)}{(1+n)k_t}}^{\substack{\text{Inv media ajustada}\\ \text{de equilibrio}}} - \overbrace{\frac{(\delta+n)}{(1+n)}}^{\substack{\text{Inv mdia ajustada}\\ \text{de mantenimiento}}}$$

donde inversión media ajustada nos referimos a la inversión dividida por el stock de capital per cápita y por la población del siguiente periodo. Vemos que la tasa de crecimiento del capital per cápita es positiva cuando la inversión media ajustada, que en equilibrio es igual al ahorro $\frac{sF(k_t,l_n)}{(1+n)k_t}$ (inversión media ajustada de equilibrio), es superior a la inversión necesaria para mantener el capital per cápita constante $\frac{\delta+n}{1+n}$ (inversión de media ajustada de mantenimiento). Mientras que es negativa en el caso opuesto. Además, dado los rendimientos decrecientes del capital, el producto medio del capital $F(k,l_n)/k$ es decreciente[15], lo que implica que la tasa de crecimiento es una función decreciente del capital inicial. Gráficamente vemos que la tasa de crecimiento del capital per cápita es igual a la distancia vertical entre la inversión media ajustada de equilibrio y de mantenimiento:

Inversión media ajustada y tasa de crecimiento



En el gráfico superior vemos que cuando el capital per cápita es inferior al del estado estacionario, la inversión de equilibrio está por encima de la de mantenimiento, lo que significa que se está invirtiendo más de lo necesario para mantener el stock de capital per capita constante y que por tanto el capital per capita aumentará el siguiente periodo, es decir, la tasa de crecimiento del capital per cápita será positiva. Por el contrario, cuando el capital per cápita es mayor que el del estado estacionario, la inversión de equilibrio está por debajo de la de mantenimiento, es decir, se invierte menos que la cantidad necesaria para que el capital per capita se mantenga constante, lo que implica que del capital per capita decrece el siguiente periodo, es decir, las tasa de crecimiento

[15] Definamos $f(k)=F(k,1)$. Dado los rendimientos constantes a escala el producto medio del capital se podría expresar de la siguiente manera: $\frac{F(K,L)}{K} = \frac{F(K,L)\frac{1}{L}}{K\frac{1}{L}} = \frac{F\left(\frac{K}{L},\frac{L}{L}\right)}{\frac{K}{L}} = \frac{F(k,1)}{k} = \frac{f(k)}{k}$

Usando el Teorema de Taylor sabemos que existe $\lambda \in [0,1]$ tal que:

$$0 = f(0) = f(k) - f'(k)k + \frac{1}{2}f''(\lambda k)k^2 \Rightarrow f(k) = f'(k)k - \frac{1}{2}f''(\lambda k)k^2 > f'(k)k$$

Lo que implica que el producto medio del capital es decreciente:

$$\frac{\partial\left(\frac{f(k)}{k}\right)}{\partial k} = \frac{f'(k)k - f(k)}{k^2} < 0$$

Autores: Juan Acosta Ballesteros, Carmen Álvarez Albelo, Carlos Bethencourt Marrero, Rosa Marina González Marrero, Fernando Perera Tallo, Mª Gracia Rodríguez Brito **http://bit.ly/8l8DDu**

del capital per capita es negativa. Una característica importante de la inversión media ajustada es que es decreciente y tiende a cero cuando el capital tiende a infinito. Esto es debido, como hemos comentado anteriormente, a los rendimientos decrecientes del capital[16]. Esta característica implica que siempre llega un nivel de capital (capital del estado estacionario) a partir del cual la inversión de equilibrio es inferior a la de mantenimiento y como consecuencia la tasa de crecimiento del capital per cápita se vuelve negativa. Esto implica que no es posible tener crecimiento permanente.

4.2 Efecto de un cambio tecnológico

Para incorporar el progreso técnico vamos a suponer que la función de producción es del tipo $Y = AF(K,L)$, donde A se interpreta como el nivel de avance tecnológico. En este caso, la producción per cápita y la productividad marginal del capital y del trabajo serían de la siguiente manera:

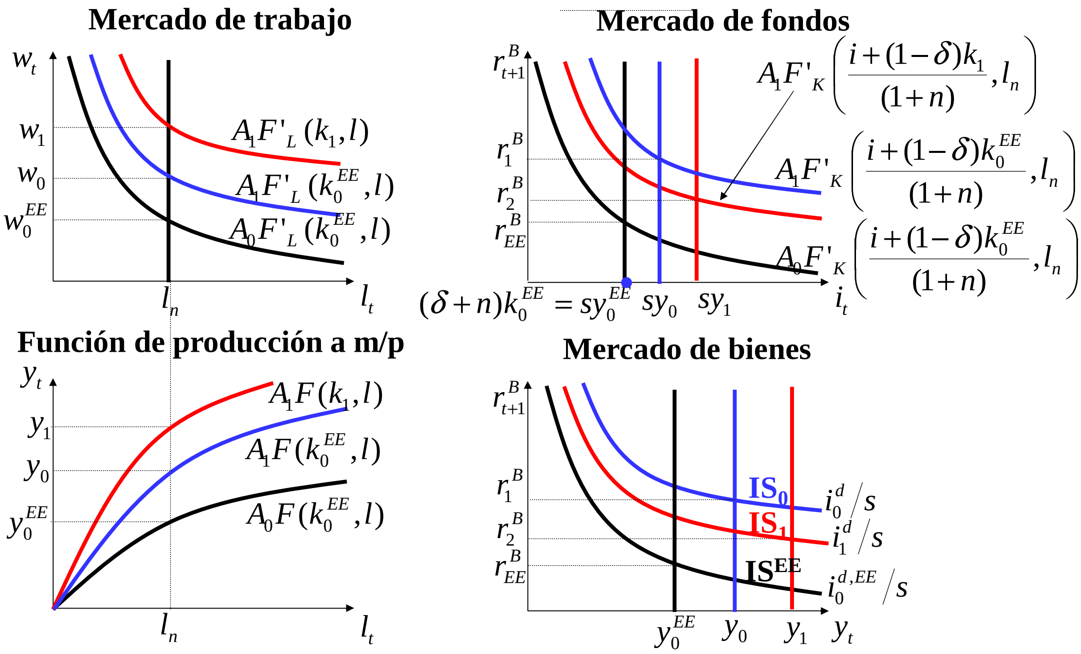
$$y = \frac{Y}{N} = AF\left(\frac{K}{N},\frac{L}{N}\right) = AF(k,l)$$

$$PMg_K(K,L) = AF'_K(k,l)$$

$$PMg_L(K,L) = AF'_L(k,l)$$

En el siguiente gráfico se observa el efecto sobre los distintos mercados de la economía de un avance tecnológico, un incremento en A, partiendo de una situación inicial de estado estacionario.

[16] La razón por la que la inversión media ajustada tiende a cero cuando el capital tiende a infinito es que estamos suponiendo implícitamente las condiciones de Inada que garantizan la existencia de estado estacionario: $\forall l > 0 \quad \lim_{k\to 0} F'_K(k,l) = +\infty; \quad \lim_{k\to +\infty} F'_K(k,l) = 0$

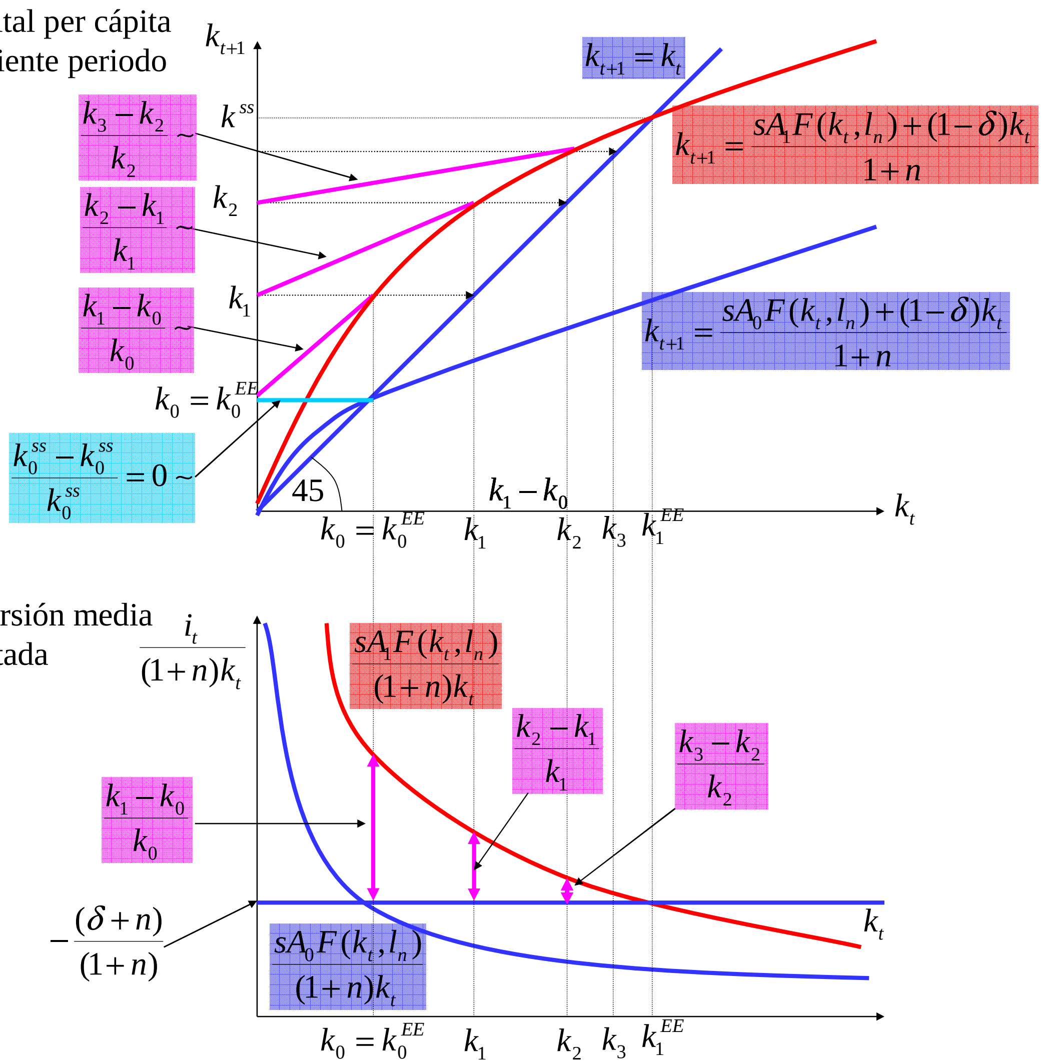


Partimos del estado estacionario (curvas en negro). Al aumentar A en el periodo 0 (curvas en azul), la productividad marginal del trabajo aumenta, con lo que aumenta la demanda de trabajo, y por tanto el salario (gráfico superior izquierdo). El avance tecnológico implica un incremento de la producción para un determinado nivel de factores productivos, hecho que se refleja en la función de producción que se desplaza hacia arriba y que hace que la producción en el periodo 0 aumente (gráfico inferior izquierdo). El aumento de la producción y por tanto de la renta, hace que aumente el ahorro y por tanto la oferta de fondos en el mercado de recursos financieros (gráfico superior). Por otra parte, el avance tecnológico hace que la productividad marginal del capital y por tanto el nivel de capital per cápita deseado y la demanda de inversión aumentan, ($\uparrow A \Rightarrow \uparrow AF'_k\left(k_{+1}^d, l_n\right) \Rightarrow \uparrow k_{+1}^d \Rightarrow \uparrow i^d = (1+n)\uparrow k_{+1}^d - (1-\delta)k$). El incremento del ahorro, implica que en equilibrio la inversión aumenta por encima de su nivel en el estado estacionario, la inversión de mantenimiento. Esto implica que el capital del siguiente periodo (periodo 1) sea mayor, mientras que el aumento simultaneo de la oferta y la demanda de fondos (ahorro e inversión) hace que el efecto sobre el tipo de interés sea ambiguo. Por último, el incremento de la demanda de inversión implica una expansión de la demanda de inversión y por tanto de la demanda de bienes (curva IS), haciendo que la curva IS se desplace hacia la derecha. Además, como ya habíamos comentado, el avance tecnológico implica un incremento de la producción y por tanto de la oferta de bienes, que también se desplaza hacia la derecha. Estos desplazamientos de la curva IS (demanda agregada) y de la oferta agregada a la derecha en el mercado de bienes (gráfico inferior izquierdo), implica un incremento de la producción, el gasto y la renta, y tiene un efecto ambiguo sobre el tipo de interés.

En el periodo 1 el incremento del capital hace que aumente la productividad marginal del trabajo y por tanto la demanda de trabajo y el salario de equilibrio. El incremento del capital hace que aumente la producción (gráfico inferior izquierdo) y por tanto la renta, lo que conlleva un mayor ahorro (gráfico superior derecho) y un nivel de inversión de equilibrio mayor. En cuanto a la demanda de inversión disminuye debido al incremento del capital. El incremento del ahorro (oferta de fondos) junto a la caída de la demanda de inversión (demanda de fondos) implica una caída del tipo de interés. En el mercado de bienes (gráfico inferior derecho), la oferta de bienes aumenta a consecuencia del incremento del capital, desplazándose hacia la derecha, mientras que la demanda de bienes (curva IS) disminuye debido a la caída de la demanda de inversión que implica el incremento del capital, por tanto la curva IS se desplaza hacia la izquierda, estos dos desplazamientos implican una bajada del tipo de interés.

En el siguiente gráfico podemos ver el efecto de un avance tecnológico sobre el proceso de acumulación de capital.

Efecto de un avance tecnológico



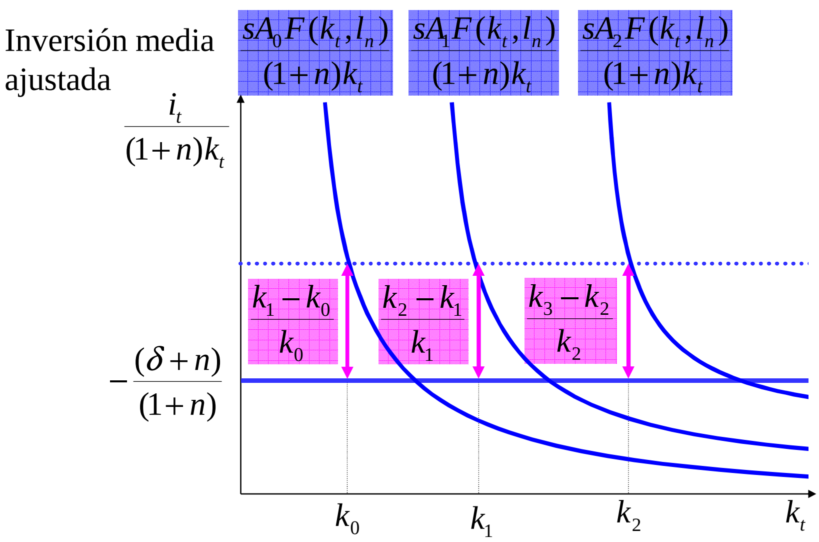
Cuando aumenta A en el periodo 0 debido a un avance tecnológico, esto hace que con la misma cantidad de recursos se produzca más. Por tanto, en el periodo 0, aumenta la producción y con ello la renta y el ahorro. Como el ahorro en equilibrio es igual a la inversión, el incremento en A hace que aumente la inversión de equilibrio, con lo que la curva del capital del siguiente periodo se desplaza hacia arriba. Esto hace que en el periodo 1 aumente el capital per cápita, con el consiguiente aumento de la producción la renta y el ahorro en el periodo 1, lo que conllevará mayor inversión y mayor capital per capita en el periodo 2. Este proceso seguirá y el capital per capita se irá acercando al capital per cápita del nuevo estado estacionario que es mayor que el del estado estacionario inicial. No obstante las tasas de crecimiento del capital per cápita serán cada vez menores, como se refleja en la pendiente de las líneas rosas del gráfico superior, y en el gráfico inferior.

En el gráfico inferior se observa que al aumentar *A*, debido a un avance tecnológico, con la misma cantidad de recursos se produzca más. Por tanto, para una determinada cantidad de capital per cápita, aumenta la producción y con ello la renta, el ahorro, y la inversión de equilibrio, lo que hace que la curva de inversión media ajustada de equilibrio se desplace hacia arriba. Este desplazamiento hacia arriba de la inversión media ajustada de equilibrio implica que la distancia entre dicha curva y la inversión media ajustada de mantenimiento aumente, y como sabemos, esa distancia es igual a las tasa de crecimiento del capital per capita. Por tanto, la mejora en la productividad total de los factores, *A*, genera un incremento de la renta, el ahorro y la inversión de equilibrio que hace que las tasas de crecimiento del capital se vuelvan positivas (aunque decrecientes en el tiempo).

4.3 Crecimiento sostenido debido al cambio tecnológico permanente

Si en todos los periodos hay avance tecnológico, este avance tecnológico compensa los rendimientos decrecientes del capital, que es lo que hace que no haya crecimiento económico en el largo plazo en el modelo de Solow. Por tanto, la introducción de cambio técnico permanente puede generar crecimiento sostenido, como se puede observar en el siguiente gráfico:

Crecimiento sostenido por cambio tecnológico permanente



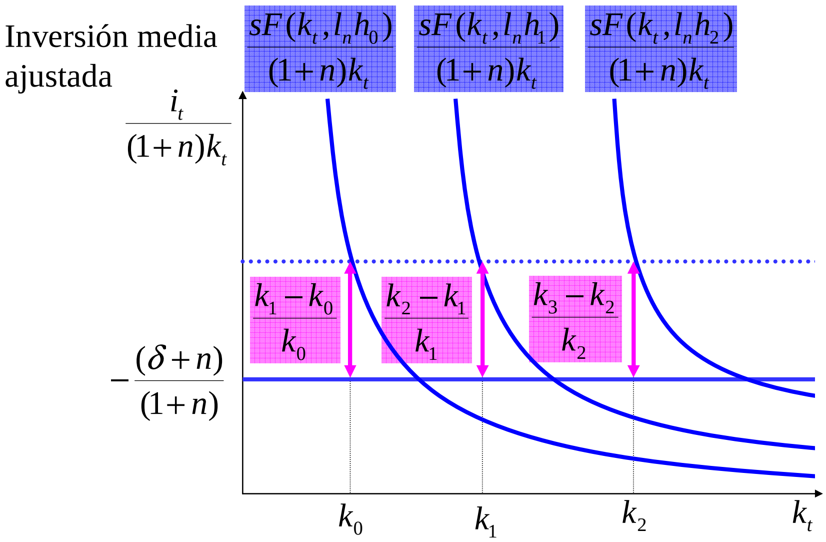
En el apéndice IV se presenta un modelo donde se genera crecimiento sostenido debido a la inversión en I+D que genera cambio tecnológico permanente.

Autores: Juan Acosta Ballesteros, Carmen Álvarez Albelo, Carlos Bethencourt Marrero, Rosa Marina González Marrero, Fernando Perera Tallo, Mª Gracia Rodríguez Brito **http://bit.ly/8l8DDu**

4.4 Crecimiento sostenido debido a la acumulación de factores

Otra manera de generar crecimiento permanente es a través de la acumulación de factores. Considere, por ejemplo, que debido a la adquisición de conocimientos técnicos y científicos la productividad de la mano de obra aumenta. Más concretamente, la productividad del trabajo es proporcional al capital humano, *h*, y por tanto la cantidad de unidades de trabajo per cápita es igual a $l_n h$. Si en todos los periodos hay un incremento del capital humano, esta mejora de la productividad del capital compensa los rendimientos decrecientes del capital, que es lo que hace que no haya crecimiento económico en el largo plazo en el modelo de Solow. Por tanto, la acumulación permanente de capital humano puede generar crecimiento sostenido, como se puede observar en el siguiente gráfico.

Crecimiento sostenido por cambio tecnológico permanente



Por tanto la acumulación de factores, por ejemplo capital físico y capital humano, puede generar también crecimiento económico sostenido, como veremos en el próximo apartado donde estudiaremos el modelo de crecimiento endógeno más sencillo, el modelo AK, que genera crecimiento permanente a base de la acumulación de factores.

5 CRECIMIENTO ENDÓGENO

5.1 Modelos de crecimiento exógeno versus crecimiento endógeno

Una de las predicciones del modelo de Solow es la convergencia de la economía hacia un estado estacionario donde las variables per cápita no crecen. Evidentemente, esta predicción del modelo de Solow va claramente contra la evidencia empírica, ya que la inmensa mayoría de los países no parecen estar convergiendo a un estado estacionario sin crecimiento económico sino que más bien hay una tendencia a tasas de crecimiento positivas. Es por eso que en la teoría del crecimiento económico han surgido toda una serie de modelos que generan crecimiento permanente (o sostenido). Los primeros modelos en generar crecimiento se basaban en la idea de que la productividad total de los factores crecía a tasas positivas, como acabamos de ver en la anterior sección. Por lo que se introdujo en el modelo de Solow una variable A_t, que afectaba a la productividad de la tecnología y que podría considerarse la productividad total de los factores[17]. Dicha variable crecía a una tasa de crecimiento exógena constante:

$$\frac{A_{t+1}-A_t}{A_t}=a$$

Con estos modelos, llamados modelos de crecimiento exógeno, se generaba crecimiento a largo plazo. De hecho, la tasa de crecimiento de todas las variables era constante e igual a la tasa de crecimiento de la variable A_t. Ahora bien, estos modelos de crecimiento exógeno no explican el crecimiento económico, simplemente lo introducen de una manera "ad-hoc". Esta manera de incorporar crecimiento económico implica que no se puede hacer un análisis de los factores que los explican, ni de los efectos de distintas políticas sobre el crecimiento económico a largo plazo, ya que éste siempre sería constante e igual a la tasa de crecimiento exógena de la tecnología.

A mediado de los años 80 empiezan a aparecer modelos de crecimiento endógeno, que generan crecimiento económico sin necesidad de recurrir a introducción de variables exógenas que crecen a una tasa constate. A estos modelos se les denominó "modelos de crecimiento endógeno" y hay una gran variedad de ellos, haciendo cada uno énfasis en distintos aspectos del crecimiento económico: unos hacen énfasis en el capital humano, otros en el cambio tecnológico, otros en el aprendizaje por la práctica (learning by doing), etc. Lo que tienen en común todos ellos es que la producción de alguno de los bienes de capital (bien sea capital físico, humano o conocimiento tecnológico), la productividad media y marginal del capital no tiende a cero cuando el capital tiende a infinito, bien sea porque el capital no presenta rendimiento decrecientes o por que el capital humano o el cambio tecnológico endógeno compensan los rendimientos decrecientes del capital. Esta es la diferencia básica con el modelo de Solow, donde los rendimientos decrecientes del capital hacen que dicho modelo no genere crecimiento a largo plazo.

Al contrario de los modelos de crecimiento exógeno, la tasa de crecimiento a largo plazo de las variables per cápita (renta per cápita, capital per cápita, etc.) es una variable endógena, por los que se puede estudiar el efecto de distintas variables y políticas económicas sobre el crecimiento a largo plazo.

5.2 El modelo AK

El más simple de los modelos de crecimiento endógeno es el modelo "AK", que considera que todos los factores son acumulables y se pueden agregar en un solo factor al que llamaremos capital. Este factor capital lo podemos interpretar como un factor compuesto de capital físico, capital humano, conocimientos técnicos, etc. La función de producción vendría dada por:

---

[17] Para incorporar el progreso técnico los modelos de crecimiento exógeno introducían una función de producción del tipo $Y_t = F(K_t, A_t L_t)$, donde A_t se interpreta como el nivel de avance tecnológico, la productividad total de los factores o también como el número de unidades eficientes de trabajo que crece a una tasa constante y exógena "a". Este tipo de progreso técnico se le denomina neutral en el sentido de Harrod.

$$Y_t = A\,K_t$$

La ecuación de acumulación de capital y la función de ahorro serían las mismas que en el modelo de Solow:

$$K_{t+1} = K_t + I_t - \delta K_t$$
$$S_t = sY_t$$

En términos per cápita:

$$k_{t+1} = \frac{i_t + (1-\delta)k_t}{1+n}$$
$$s_t = sy_t$$

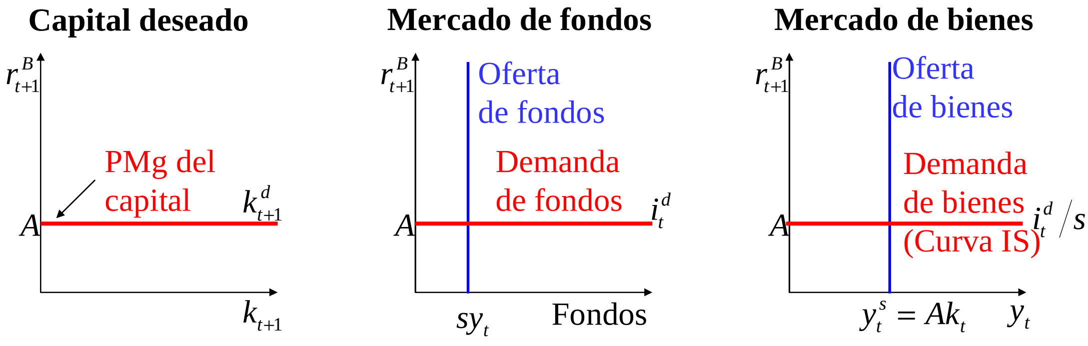
Además, el producto marginal del capital es constante e igual a *A*, lo que implica que la demanda de inversión es perfectamente elástica para el tipo de interés igual a *A*:

$$\max_{I_t}\left[AK_t - r_t^B K_t\right] + \frac{\left[AK_{t+1} - r_{t+1}^B K_{t+1}\right]}{\left(1+r_{t+1}\right)} + \ldots$$
$$\Leftrightarrow$$
$$s.a.: K_{t+1} = I_t + (1-\delta)K_t$$
$$\max_{K_{t+1}}\left[AK_t - r_t^B K_t\right] + \frac{\left[AK_{t+1} - r_{t+1}^B K_{t+1}\right]}{\left(1+r_{t+1}\right)} + \ldots$$

Condiciones de primer orden:

$$\frac{\left[A - r_{t+1}^B\right]}{\left(1+r_{t+1}\right)} = 0 \Rightarrow A = r_{t+1}^B$$

Por tanto, la demanda de capital del siguiente periodo es perfectamente elástica para el tipo de interés bruto A, lo que implica que la demanda de inversión también lo es para ese tipo de interés. Esto implica que para que haya equilibrio en el mercado de fondos se tiene que cumplir que: $i_t = s\,y_t$ y $r_{t+1}^B = A$. Dado que la demanda de bienes es igual a i_t^d / s, el mismo tipo de interés se tendrá que dar en el equilibrio del mercado de bienes: $Ak_t = i_t^d / s$ y $r_{t+1}^B = A$. La representación gráfica sería como sigue:



Substituyendo la condición de equilibrio del mercado de fondos (inversión igual a ahorro), obtenemos la ecuación que nos dice el capital del siguiente periodo en función del capital del periodo corriente:

$$k_{t+1} = \frac{sAk_t + (1-\delta)k_t}{1+n}$$

La tasa de crecimiento sería la siguiente:

$$v_{k,t+1} = \frac{k_{t+1} - k_t}{k_t} = \frac{\dfrac{sAk_t + (1-\delta)k_t}{1+n} - k_t}{k_t} = \frac{sA + (1-\delta) - (1+n)}{1+n} =$$

$$v_{k,t+1} = \underbrace{\frac{sA}{1+n}}_{\text{inversión media ajustada de equilibrio}} - \underbrace{\frac{(\delta+n)}{1+n}}_{\text{inversión media ajustada de mantenimiento}}$$

Vemos que, dado que no hay rendimientos decrecientes en el capital, la inversión media ajustada de equilibrio no es decreciente en el capital, como ocurría en el modelo de Solow, sino que es constante, lo que implica que la tasa de crecimiento de la economía es constante. Además, el capital y el resto de las variables per cápita (producción, consumo, ahorro, inversión) crecen a la misma tasa:

$$v_{y,t+1} = \frac{y_{t+1} - y_t}{y_t} = \frac{Ak_{t+1} - Ak_t}{Ak_t} = \frac{k_{t+1} - k_t}{k_t} = v_{k,t+1} = \frac{sA - (\delta + n)}{1+n}$$

$$v_{c,t+1} = \frac{c_{t+1} - c_t}{c_t} = \frac{sy_{t+1} - sy_t}{sy_t} = \frac{y_{t+1} - y_t}{y_t} = v_{y,t+1} = \frac{sA - (\delta + n)}{1+n}$$

Vemos que la tasa de crecimiento de la economía depende positivamente de la tasa de ahorro s y de la productividad A, ya que cuanto mayor es la tasa de ahorro s más recursos se dedican a invertir en bienes de capital, que es el motor del crecimiento, y cuanto mayor es la productividad A, más capital se produce con los recursos destinados a la inversión. La tasa de crecimiento de la economía depende negativamente de la tasa de depreciación δ y de la tasa de natalidad n, ya que cuanto mayor es la tasa de depreciación, menor es el porcentaje de capital del presente que se conservará en el siguiente periodo, lo que implica que una mayor parte de la inversión se dedicará a reponer el capital del periodo anterior y una menor parte a invertir en ampliar el stock de capital. Con la tasa de natalidad ocurre algo parecido, dado un nivel de inversión agregada y por tanto un stock de capital agregado del siguiente periodo, cuanto mayor e la tasa de natalidad, mayor es el número de personas en el que se "reparte" este stock agregado de capital, por tanto menor será el capital per cápita del siguiente periodo y menor la tasa de crecimiento del capital per cápita y de todas las otras variables per cápita.

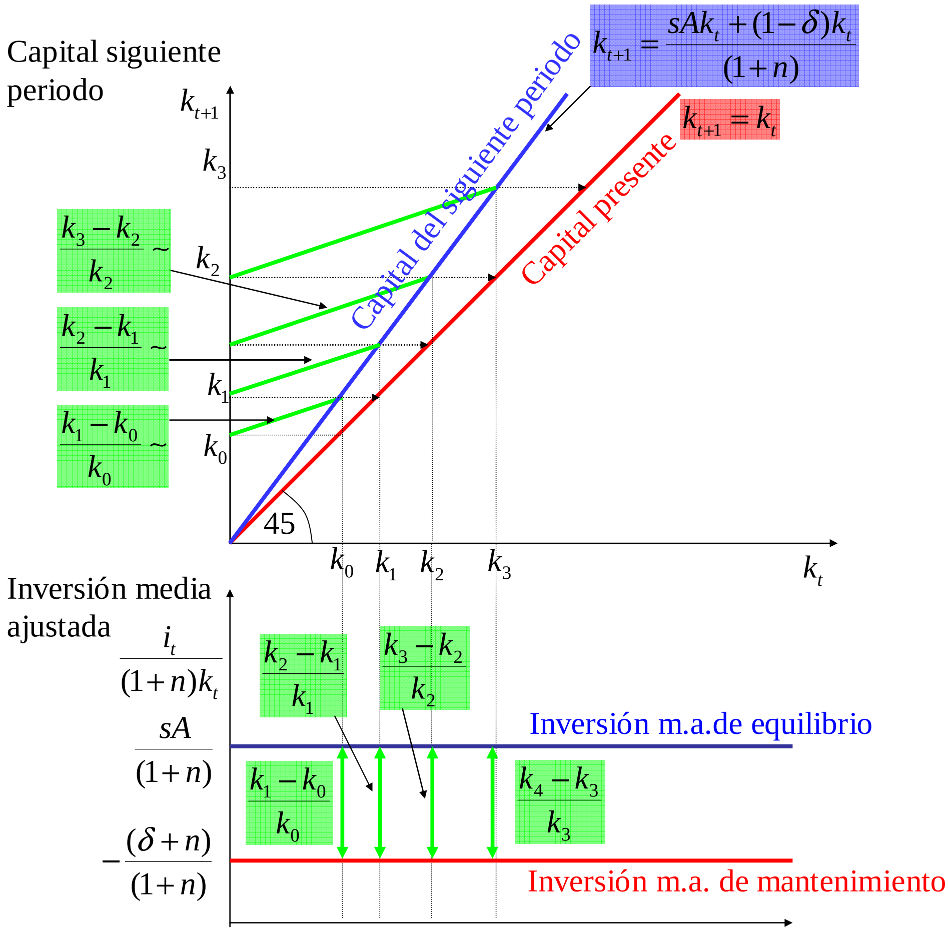
En el siguiente gráfico se representa la dinámica del capital bajo el supuesto de que la tasa de crecimiento del capital per cápita es positiva, es decir, bajo el supuesto de que $sA > \delta + n$. Bajo este supuesto la curva (que en este caso es una recta) del capital del siguiente periodo tiene una pendiente mayor que 1:

$$k_{t+1} = \frac{sAk_t + (1-\delta)k_t}{1+n} = \frac{sA + (1-\delta)}{1+n} k_t$$

$$\frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t} = \frac{sA + (1-\delta)}{1+n} = \frac{1+n-1-n+sA+1-\delta}{1+n} = \frac{1+n}{1+n} + \frac{sA+-\delta-n}{1+n} = 1 + \frac{sA-(\delta+n)}{1+n} > 1$$

Dado que la función capital del siguiente periodo tiene pendiente mayor que 1, el capital del siguiente periodo siempre es mayor que el del presente. Gráficamente, la curva de capital del siguiente periodo (que en este caso es una recta), siempre está por encima de la recta de 45 grados, lo que significa que el capital del siguiente periodo siempre es mayor que el del periodo presente.

Dinámica del capital en el modelo AK



En el gráfico anterior también se ve que todas las rectas que van del punto $(0, k_t)$ al punto (k_t, k_{t+1}) (líneas en verde) tienen la misma pendiente. Como ya hemos explicado anteriormente, la pendiente de estas rectas es igual a la tasa de crecimiento del capital per cápita. Vemos que estas rectas son paralelas, lo que significa que la tasa de crecimiento del capital per cápita no cambia a lo largo del tiempo. Este hecho también se refleja en el gráfico inferior, donde aparece la inversión media ajustada de mantenimiento y de equilibrio, esta última, al contrario que en el modelo de Solow, es constante. Esto se debe a que la tecnología no presenta rendimientos decrecientes en el capital sino rendimientos constantes (también presenta rendimientos constantes a escala, aunque este concepto es diferente), lo que implica que la producción por unidad de capital no decaiga sino permanezca constante. Por esta razón, la inversión media ajustada de equilibrio, que es igual al ahorro, proporcional a la renta, y dividido por el capital y la población del siguiente periodo, no cae con el nivel de capital sino que permanece constante. Como la tasa de crecimiento del capital per cápita es la diferencia entre la inversión media ajustada de equilibrio y de mantenimiento (gráficamente la distancia vertical entre esas dos curvas), llegamos a la conclusión que la tasa de crecimiento es constante.

5.3 Cambio técnico endógeno

Como vimos cuando se explicó el residuo de Solow, una parte substancial del crecimiento de la producción no se puede explicar por el crecimiento de los factores, y la explicación habitual de este hecho es que hay cambio tecnológico. Los modelos de crecimiento endógeno que se ocupan del cambio técnico se basan en que hay empresas que destinan recursos a desarrollar mejoras tecnológicas. No obstante, para que estas empresas tengan incentivos a desarrollar mejoras tecnológicas, se tienen que beneficiar de ello. Por esto es necesario que las empresas que desarrollan algún tipo de cambio técnico tengan algún tipo de patente que les conceda un monopolio sobre el avance tecnológico que han desarrollado. Pero la existencia de ese monopolio implica que la economía es ineficiente. De hecho, los modelos de cambio tecnológico endógeno implican una serie ineficiencia:

- La existencia de monopolio: para que las empresas de I+D tengan incentivos a desarrollar su investigación tienen que recibir algo a cambio de esa investigación. Lo que reciben es las rentas de monopolio una vez hayan desarrollado la calidad del producto. Ahora bien, la existencia del monopolio del bien sobre el que se desarrolla el cambio tecnológico, implica que el precio que pone el monopolio esta sobrevalorado (es mayor que el coste marginal) y la cantidad que se produce está inferior al nivel eficiente.

- La existencia de externalidades positivas de la actividad de I+D: La investigación tecnológica no suele partir de la nada sino que se basa en el conocimiento tecnológico existente. Es decir, los conocimientos tecnológicos que se obtienen en el presente sirven de base para los conocimientos tecnológico que se obtengan en le futuro. Esto implica que la actividad de I+D en el presente tiene un efecto externo positivo sobre la actividad de I+D en el futuro. Si una empresa desarrolla una tecnología en el presente, esta innovación va a afectar positivamente a la productividad del I+D en el futuro. Sin embargo, a la empresa de I+D del futuro que se aproveche de esos conocimientos tecnológicos no va a pagarle a la empresa de I+D del presente por ese efecto positivo, lo que hace que la empresa del presente, reciba por su investigación menos de los beneficios que genera a la economía, lo que implica que la empresa de I+D invierten en tecnología una cantidad menor de la que sería eficiente. La existencia de externalidad positivas implica que la tasa de crecimiento de la economía es inferior a la tasa de crecimiento eficiente.

- Dispersión de recursos de varias empresas de I+D: cuanto más empresas estén desarrollando el mismo tipo de investigación, más recursos se están usando para producir el mismo conocimiento tecnológico. Esto es debido a que las empresas de I+D no tienen ningún incentivo a cooperar y intercambiarse información entre ellas. Por ejemplo, considere que hay una investigación en varias fases y en la primera fase se tiene que hacer un experimento determinado. Considere que hay dos laboratorios, el 1 y el 2. Si el laboratorio 1 pertenece a una empresa distinta que el laboratorio 2, cuando el laboratorio 1 haga el experimento de la primera fase de investigación, no informará al laboratorio 2 del resultado del mismo, por lo que el laboratorio 2 se verá forzada a hacer también ese experimento con el consiguiente gasto de recursos. Si los dos laboratorios estuvieran en la misma empresa, el laboratorio 1 le comunicaría los resultados al laboratorio 2, que no tendría que repetir el experimento del la primera fase, con el consiguiente ahorro de recursos. Por tanto, la falta de cooperación de intercambio de información que conlleva la existencia de varias empresas de I+D desarrollando el mismo tipo de investigación implica que los recursos no se usan de manera eficiente, y que se tienen que multiplicar innecesariamente el uso de recursos para alcanzar el mismo nivel de conocimiento tecnológico.

El lector apasionado del cambio tecnológico endógeno puede encontrar un modelo de esta naturaleza en el apéndice IV.

APÉNDICE I. PROBLEMA DE MAXIMIZACIÓN DE LA EMPRESA

Valor de una empresa

Supongamos que un consumidor propietario de una empresa está considerando vender su empresa al principio del periodo t (antes de que se repartan los dividendos) a precio V_t. Para saber si es conveniente hacer tal venta lo puede comparar con la opción de vender la empresa en el siguiente periodo. Si vende la empresa el siguiente periodo obtendrá unos dividendos iguales a χ_t en el presente (periodo t) y el valor de la venta de la empresa en el siguiente periodo a un precio V_{t+1}. Ello significa que si quisiera gastar a en el presente (periodo t) a cuenta de la futura venta de su empresa (periodo t+1) podría pedir un crédito igual a $\frac{V_{t+1}}{1+r_{t+1}}$, donde r_{t+1} es el tipo de interés que tiene que pagar en t+1, y devolverlo con la venta de la empresa en el siguiente periodo $(1+r_{t+1})\times\frac{V_{t+1}}{1+r_{t+1}}$. Por tanto la máxima cantidad de bienes que podría obtener en el presente (*t*) si vende su empresa en el siguiente periodo (t+1) sería $\chi_t+\frac{V_{t+1}}{1+r_{t+1}}$.

Evidentemente, el dueño de la empresa no estaría dispuesto a venderla en el presente por una cantidad inferior a la cantidad que obtendría hoy por la venta de la a empresa en el siguiente periodo, por tanto:

$$\underbrace{V_t}_{\substack{\text{Dinero que obtendría el}\\ \text{vendedor si vende la}\\ \text{empresa en el presente}}} \geq \underbrace{\chi_t+\frac{V_{t+1}}{1+r_{t+1}}}_{\substack{\text{Dinero que obtendría el}\\ \text{vendedor en el presente}\\ \text{si vende la empresa en el}\\ \text{siguiente periodo}}}$$

Vamos a considerar ahora un agente que quiera comprar la empresa al principio del periodo t (antes de que se repartan los dividendos) a precio V_t. Ello significa que en el presente (periodo t) va a recibir en concepto de dividendos χ_t, lo que implica que en el presente en realidad sólo va a tener que desembolsar $V_t-\chi_t$. En el siguiente periodo (t+1) si vendiera a la empresa obtendría V_{t+1}. Si lo comparamos con la compra de otro activo cualquiera, si el agente invierte hoy $V_t-\chi_t$, obtendrá $(V_t-\chi_t)(1+r_{t+1})$ en el siguiente periodo. Por tanto, un comprador de una empresa comprará la empresa si lo que obtiene de la empresa en el siguiente periodo V_{t+1}, es mayor o igual de lo que obtendría invirtiendo en un activo cualquiera $(V_t-\chi_t)(1+r_{t+1})$:

$$\underbrace{V_{t+1}}_{\substack{\text{Lo que obtiene el comprador}\\ \text{en el siguiente periodo}\\ \text{si vende la empresa}\\ \text{en el siguiente periodo}}} \geq \underbrace{(V_t-\chi_t)(1+r_{t+1})}_{\substack{\text{Lo que obtiendría el comprador}\\ \text{en el siguiente periodo}\\ \text{si invirtiera el dinero con el que}\\ \text{compro la empresa en otro activo}}} \Leftrightarrow V_t \leq \chi_t+\frac{V_{t+1}}{1+r_{t+1}}$$

De las dos ecuaciones anteriores, obtenemos que para que un comprador y un vendedor de una empresa se pongan de acuerdo, el precio de la empresa será:

$$V_t = \chi_t + \frac{V_{t+1}}{1+r_{t+1}}$$

Eso significa que el valor de la empresa será igual al valor presente descontado de todos los dividendos presentes y futuros de la empresa[18]:

$$V_t = \chi_t + \frac{V_{t+1}}{1+r_{t+1}} = \chi_t + \frac{\chi_{t+1} + \frac{V_{t+2}}{1+r_{t+2}}}{1+r_{t+1}} = \chi_t + \frac{\chi_{t+1}}{(1+r_{t+1})} + \frac{V_{t+2}}{(1+r_{t+1})(1+r_{t+2})} =$$

$$= \chi_t + \frac{\chi_{t+1}}{(1+r_{t+1})} + \frac{\chi_{t+2} + \frac{V_{t+3}}{1+r_{t+3}}}{(1+r_{t+1})(1+r_{t+2})} = \chi_t + \frac{\chi_{t+1}}{(1+r_{t+1})} + \frac{\chi_{t+2}}{(1+r_{t+1})(1+r_{t+2})} +$$

$$\frac{V_{t+3}}{(1+r_{t+1})(1+r_{t+2})(1+r_{t+3})}$$

$$V_t = \chi_t + \frac{\chi_{t+1}}{(1+r_{t+1})} + \frac{\chi_{t+2}}{(1+r_{t+1})(1+r_{t+2})} + \frac{\chi_{t+3}}{(1+r_{t+1})(1+r_{t+2})(1+r_{t+3})} + \ldots$$

Problema de maximización de la empresa

Los propietarios de la empresa van tomar sus decisiones para maximizar el valor de la misma, por lo que elegirán la cantidad de trabajo L_t y la cantidad de inversión I_t de tal manera que se consiga ese objetivo. Para simplificar vamos a suponer que toda la financiación de la empresa es externa[19]:

$$\max_{L_t, I_t} \overbrace{[F(K_t, L_t) - w_t L_t - Z_t]}^{\chi_t} + \frac{\overbrace{[F(K_{t+1}, L_{t+1}) - w_{t+1} L_{t+1} - Z_{t+1}]}^{\chi_{t+1}}}{(1+r_{t+1})} +$$

$$\frac{\overbrace{[F(K_{t+2}, L_{t+2}) - w_{t+2} L_{t+2} - Z_{t+2}]}^{\chi_{t+2}}}{(1+r_{t+1})(1+r_{t+2})} + \ldots$$

$$\begin{aligned} s.a.: K_{t+1} &= I_t + (1-\delta)K_t \\ D_t &= (1+r_t)D_{t-1} - Z_t + I_t \\ K_t &\leq D_{t-1} \end{aligned}$$

Donde D_t son las deudas de la empresa al final del periodo t y Z_t son los pagos de los créditos en el periodo t. Los dividendos de la empresa χ_t serán iguales a los ingresos de la empresa, que en términos reales son iguales a la producción, menos los costes

[18] Una condición suficiente para que este sumatorio tenga valor finito es que exista $a > 1$ tal que $\lim_{n\to\infty} \frac{\chi_{t+n}}{(1+r_{t+1})(1+r_{t+2})\ldots(1+r_{t+n})} a^n = 0$

[19] En contextos de modelos sencillos como este, el hecho de que la financiación de la empresa sea externa o interna es irrelevante. Este resultado se conoce como el teorema de Modigliani-Miller.

laborales $w_t L_t$ menos el pago de los créditos es el periodo t Z_t. La deuda de la empresa al final del periodo t, D_t, es igual al principal más los intereses de la deuda del periodo anterior $(1+r_t)D_{t-1}$, menos los pagos de la empresa a sus acreedores Z_t, más las nuevas deudas contraídas para financiar la inversión en el periodo t, I_t. Finalmente la última restricción dice que el nivel de deuda al final del periodo nunca puede superar a la cantidad de capital al principio del siguiente[20]. Suponiendo que los propietarios de la empresa no tienen responsabilidad con sus bienes sobre las deudas de la empresa (si es una empresa tipo S.A.), si la cantidad de deuda de la empresa al final del periodo (t-1) D_{t-1} es superior a la cantidad de capital al principio del siguiente (t) K_t, lo mejor que pueden hacer los propietarios de la empresa es cerrar la empresa al final del periodo t-1, y crear otra empresa nueva invirtiendo K_t unidades en esta nueva empresa y pidiendo un crédito de $D_{t-1} = K_t$, de esta manera, a principios del siguiente periodo, t, tendrían una empresa exactamente igual que la anterior pero con menos deudas. Los prestamistas de la empresa antigua se quedarían con el capital de la empresa, pero no podrían cobrar de la empresa todas las deudas de la empresa, ya que las deudas son superiores al capital. Es por esto que para financiar una empresa se exige el capital de la empresa como colateral. Si no existiera esta restricción, los pagos de la empresa a sus acreedores Z_t sería igual a cero: la empresa se endeudaría ilimitadamente y pagaría las deudas contrayendo deudas todavía mayores (esto es lo que se conoce como juego de Ponzi) y nunca devolvería los crédito para financiar la inversión. Evidentemente los pagos de la empresa a sus acreedores Z_t van a reducir los dividendos de la empresa, por lo que siempre se elegirá el menor nivel de pagos a los acreedores posibles. Por tanto la última restricción se dará siempre con igualdad:

$$K_t = D_{t-1}$$

A partir de las restricciones del problema de maximización de las empresas obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} K_{t+1} = I_t + (1-\delta)K_t \\ D_t = (1+r_t)D_{t-1} - Z_t + I_t \\ K_t = D_{t-1} \end{array}\right\} \Rightarrow K_{t+1} = (1+r_t)K_t - Z_t + \left[K_{t+1} - (1-\delta)K_t\right] \Rightarrow \boxed{Z_t = (\delta + r_t)K_t}$$

Substituyendo la anterior ecuación en el problema de maximización de la empresa se obtiene:

$$\max_{L_t, I_t}\left[F(K_t, L_t) - w_t L_t - (\delta + r_t)K_t\right] + \frac{\left[F(K_{t+1}, L_{t+1}) - w_{t+1}L_{t+1} - (\delta + r_{t+1})K_{t+1}\right]}{\left(1 + r_{t+1}\right)} + \dots$$

$$s.a.: K_{t+1} = I_t + (1-\delta)K_t$$

[20] Esta restricción es una versión más fuerte de la condición de “no existencia de juego de Ponzi”, que significa que no se pueden pagar indefinidamente las deudas contrayendo más deudas.

APÉNDICE II. EL EFECTO DE UN INCREMENTO DE LA TASA DE DEPRECIACIÓN SI SE FIJA EL TIPO DE INTERÉS NETO (NO EL TIPO DE INTERÉS BRUTO)

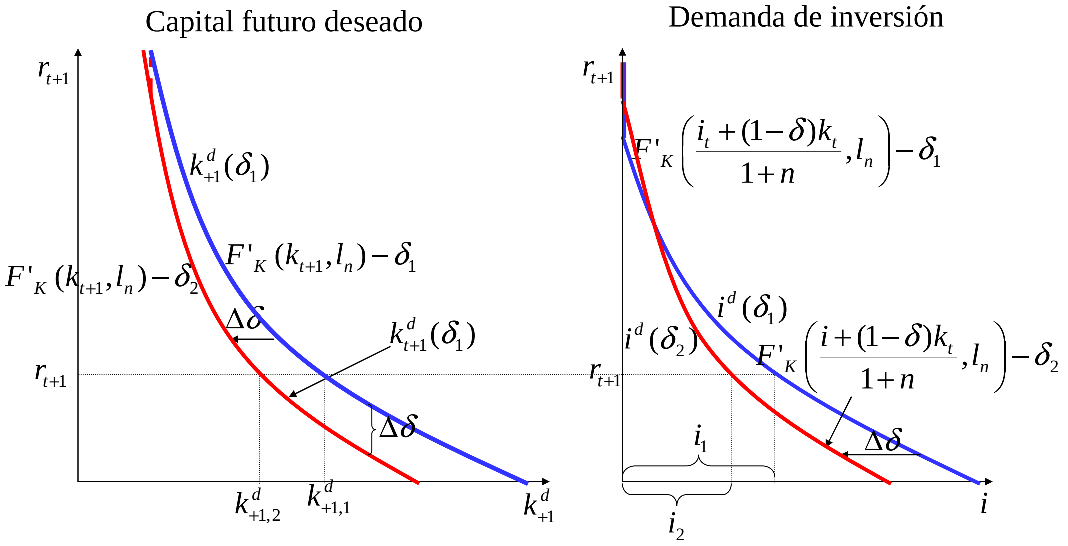
El efecto de la tasa de depreciación sobre la inversión sería distinto si consideráramos que el tipo de interés neto, y no el bruto, fuera constante. Hay que tener en cuenta que si aumenta la tasa de depreciación, si el tipo de interés bruto permanece constante, esto significa que el tipo de interés neto disminuye. Si por ejemplo el tipo de interés bruto es del 15% y la tasa de depreciación es del 5%, el tipo de interés neto es del 10%: $r = (r+\delta) - \delta = \frac{15}{100} - \frac{5}{100} = \frac{10}{100}$. Si aumenta la tasa de depreciación al 10% y el tipo de interés bruto sigue siendo del 15%, esto significa que el tipo de interés neto cae al 5%: $r = (r+\delta) - \delta = \frac{15}{100} - \frac{10}{100} = \frac{5}{100}$. Por tanto, si fijamos el tipo de interés bruto y aumenta la depreciación, el tipo de interés neto disminuye. Cabe preguntarse cuál sería el efecto de la inversión de un incremento de la tasa de depreciación si fijáramos el tipo de interés neto, en vez del bruto. Para contestar esta pregunta vamos a poner la condición de primer orden el capital en función del tipo de interés neto:

$$F'_K\left(k_{t+1}^d, l_n\right) - \delta = r_{t+1} \Leftrightarrow F'_K\left(\frac{i_t + (1-\delta)k_t}{1+n}, l_n\right) - \delta = r_{t+1}$$

La anterior condición de primer orden tiene el mismo significado que el explicado anteriormente, pero ahora en términos netos: las empresas invierten en capital hasta el punto en el que el producto marginal <u>neto</u> del siguiente periodo (detrayendo la tasa de deprecación), es igual al tipo de interés neto. Un incremento de la tasa de depreciación, manteniendo el tipo interés neto constante, hace que el tipo de interés bruto que le tienen que pagar las empresas a sus acreedores aumente, lo cual implica una menor demanda de capital del siguiente periodo. Ahora bien, dado un determinado nivel de capital deseado, para alcanzarlo se necesita una mayor inversión bruta cuanto mayor es la tasa de depreciación, ya que el capital que se conserva en el siguiente periodo después de la depreciación es menor cuanto mayor es la tasa de depreciación. Por tanto un incremento de la tasa de depreciación, para un tipo de interés neto dado, tiene un efecto negativo sobre la demanda capital del siguiente periodo pero un efecto ambiguo sobre la demanda de inversión:

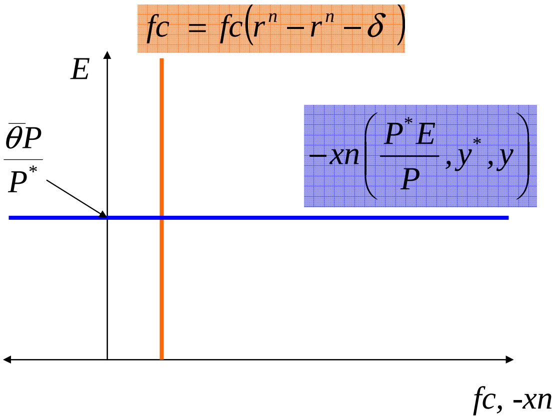
$$?i^d = (1+n)\downarrow k_{+1}^d - (1-\uparrow\delta)k = (1+n)\downarrow k_{+1}^d - k + \uparrow\delta k$$

Efecto de un aumento en la tasa de depreciación manteniendo el tipo de interés neto constante



APÉNDICE III. EL MODELO DE SOLOW CON ECONOMÍA ABIERTA

Vamos a considerar el modelo de Solow con economía abierta con tipo de cambio flexible, para ello vamos a modelizar el sector exterior como cuando estudiamos la macroeconomía del corto plazo, pero con una un supuesto simplificador[21]: las exportaciones netas son perfectamente elásticas para una determinada relación real de intercambio que vamos a llamar $\bar{\theta}$, de esta forma el tipo de cambio de equilibrio siempre va a ser aquel que haga que la relación real de intercambio sea $\bar{\theta}$:



Este supuesto lo adoptamos para que la tasa esperada de depreciación de la moneda nacional no cambie a lo largo del tiempo, y podamos predecir más fácilmente el saldo de la balanza de capitales. Esto supuesto implica que la tasa de depreciación de la moneda nacional sea como sigue:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{\theta} = \theta_t = \dfrac{P_t^* E_t}{P_t} \\ \bar{\theta} = \theta_{t+1} = \dfrac{P_{t+1}^* E_{t+1}}{P_{t+1}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{P_t^* E_t}{P_t} = \frac{P_{t+1}^* E_{t+1}}{P_{t+1}} \Rightarrow \frac{E_{t+1}}{E_t} = \frac{\dfrac{P_{t+1}}{P_t}}{\dfrac{P_{t+1}^*}{P_t^*}} \Rightarrow \left(1 + \frac{E_{t+1} - E_t}{E_t}\right) = \frac{(1+\pi_{t+1})}{(1+\pi_{t+1}^*)}$$

Aplicando la aproximación logarítmica:

$$\frac{E_{t+1} - E_t}{E_t} = \pi_{t+1} - \pi_{t+1}^*$$

Por tanto la expresión de la balanza de capitales será como sigue:

[21] Otro supuesto simplificador importante, que ya usamos en la macroeconomía a corto plazo, es que el ahorro es proporcional a la renta interior (a la producción) y no a la renta nacional (que incluye la renta de los nacionales en el extranjero y excluye la renta que obtienen los extranjeros en nuestro país). Este supuesto se puede interpretar de la siguiente manera, los agentes que invierten en el extranjero reinvierten la fracción *s* de las rentas obtenidas en el extranjero en el país donde las han obtenido.

$$\left.\begin{array}{l} fc_t = fc\left(r^n_{t+1} - r^{n*}_{t+1} - \dfrac{E_{t+1}-E_t}{E_t}\right) \\ r^r_{t+1} = r^n_{t+1} - \pi_{t+1} \Leftrightarrow r^n_{t+1} = r^r_{t+1} + \pi_{t+1} \\ r^{r*}_{t+1} = r^{n*}_{t+1} - \pi^*_{t+1} \Leftrightarrow r^{n*}_{t+1} = r^{r*}_{t+1} + \pi^*_{t+1} \\ \dfrac{E_{t+1}-E_t}{E_t} = \pi_{t+1} - \pi^*_{t+1} \end{array}\right\} \Rightarrow fc_t = fc\left((r^r_{t+1} + \pi_{t+1}) - (r^{r*}_{t+1} + \pi^*_{t+1}) - (\pi_{t+1} - \pi^*_{t+1})\right) \Rightarrow$$

$$fc_t = fc\left(r^r_{t+1} - r^{r*}_{t+1}\right) = fc\left(r^B_{t+1} - \delta - r^{B*}_{t+1} - \delta^*\right)$$

donde denotamos por r^n el tipo de interés nominal, por r^r el tipo de interés neto real y por r^B el tipo de interés bruto real. Suponiendo que la tasa de depreciación es igual en nuestro país que en el extranjero, $\delta = \delta^*$, y que el país extranjero esta en el estado estacionario y que por tanto el tipo de interés no cambia con el tiempo, $r^{B*}_{t+1} = r^{B*}$, obtenemos:

$$\boxed{fc_t = fc\left(r^B_{t+1} - r^{B*}\right)}$$

A partir de aquí el equilibrio de medio plazo sería muy parecido al de la economía cerrada con dos diferencias:

1.- En el mercado de fondos la oferta de fondos no sólo estaría constituida por el ahorro de los consumidores sino también por la financiación externa (la balanza de capitales):

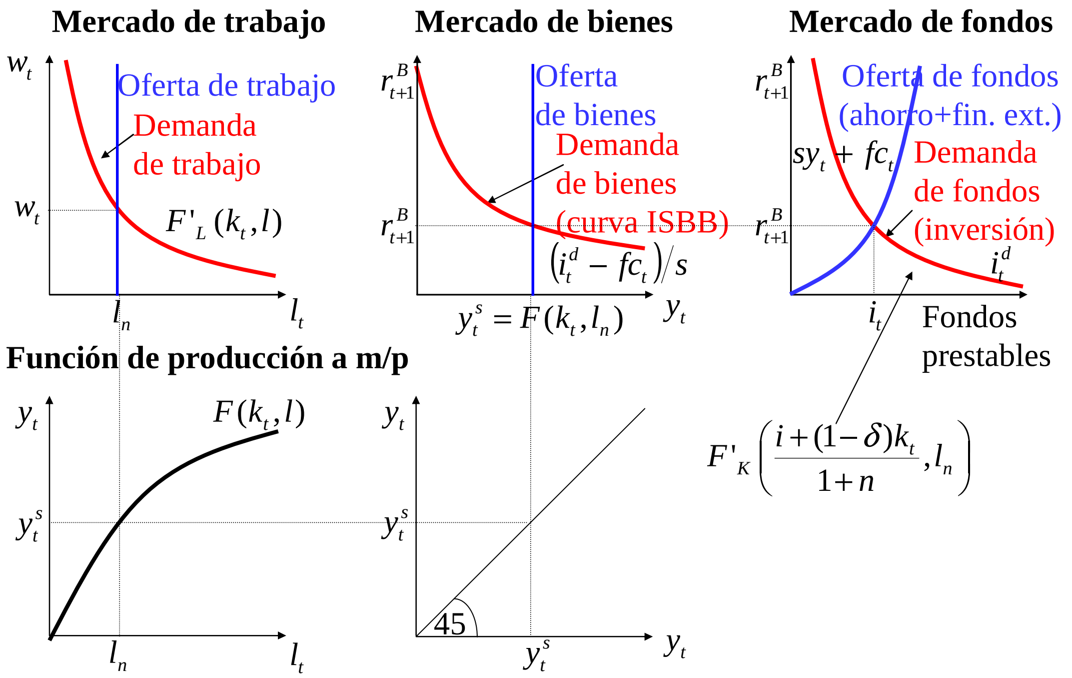
$$\underbrace{i^d_t}_{\substack{\text{demanda}\\ \text{de fondos}}} = \underbrace{sy_t + fc\left(r^B_{t+1} - r^{B*}\right)}_{\substack{\text{oferta}\\ \text{de fondos}}}, \text{ donde } k^d_{t+1} \overset{Def}{\Leftrightarrow} F'_K\left(k^d_{t+1}, l_n\right) = r^B_{t+1} \text{ y } i^d_t = (1+n)k^d_{t+1} - (1-\delta)k_t .$$

2.- En el mercado de bienes la curva IS de la economía cerrada pasaría a ser la curva ISBB:

$$\left.\begin{array}{l} y^d_t = c_t + i^d_t + xn_t = (1-s)y_t + i^d_t + xn_t \\ y^d_t = y_t \\ xn_t = -fc_t = -fc\left(r^B_{t+1} - r^{B*}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow y^d_t = \frac{i^d_t - fc\left(r^B_{t+1} - r^{B*}\right)}{s}$$

Por tanto el equilibrio a medio plazo quedaría como sigue:

Autores: Juan Acosta Ballesteros, Carmen Álvarez Albelo, Carlos Bethencourt Marrero, Rosa Marina González Marrero, Fernando Perera Tallo, Mª Gracia Rodríguez Brito **http://bit.ly/8l8DDu**



Dado que la demanda de inversión sería tal que se invertiría hasta que el capital del siguiente periodo fuera igual al producto marginal del capital el tipo de interés bruto seguiría siendo igual al producto marginal del capital:

$$i_t^d = (1+n)k_{t+1}^d - (1-\delta)k_t \text{ donde } k_{t+1}^d \overset{Def}{\Leftrightarrow} F'_K\left(k_{t+1}^d, l_n\right) = r_{t+1}^B .$$

Teniendo en cuenta la anterior ecuación, la ecuación de acumulación del capital en términos per cápita y la condición de equilibrio en el mercado de recursos financieros, obtendríamos la ley de movimiento del capital per cápita en equilibrio:

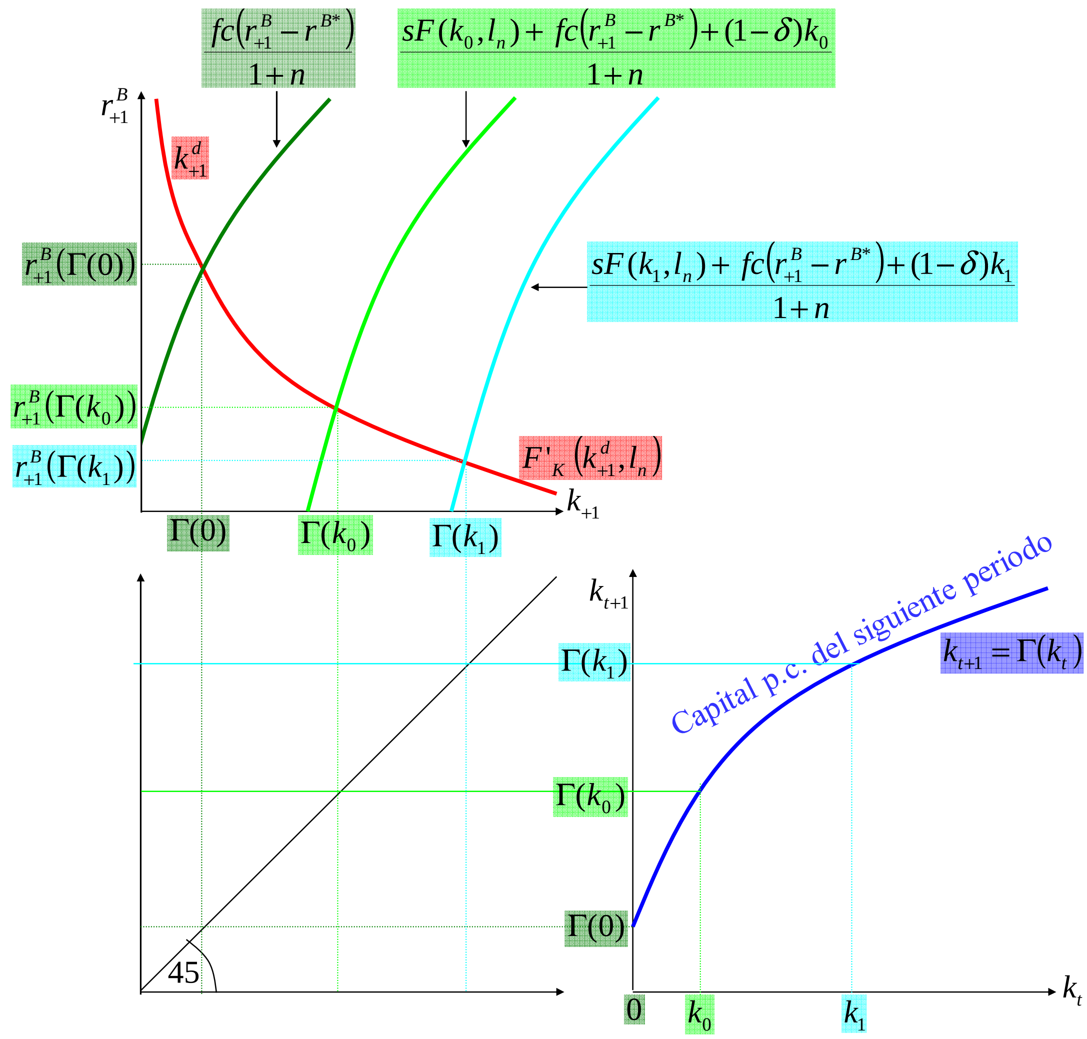
$$k_{t+1} = \frac{sF(k_t, l_n) + fc\left(F'_K(k_{t+1}, l_n) - r^{B*}\right) + (1-\delta)k_t}{1+n}$$

A partir de esta ecuación podríamos definir el capital per cápita del siguiente periodo:

$$k_{t+1} = \Gamma(k_t) \text{ donde[22] } \Gamma(k) \overset{def}{\Leftrightarrow} \Gamma(k) = \frac{sF(k,l_n) + fc\left(F'_K\left(\Gamma(k),l_n\right) - r^{B*}\right) + (1-\delta)k}{1+n}$$

Para obtener esta curva del capital per cápita del siguiente periodo, $\Gamma(k_t)$, desde un punto de vista gráfico, vamos a representar la condición de equilibrio del mercado del capital per cápita del siguiente periodo, esto es el equilibrio entre la demanda de capital del siguiente periodo por parte de las empresas y la oferta de capital de economías domésticas y sector exterior:

[22] Es fácil de demostrar usando el Teorema de la Función Implícita que la función $\Gamma(k)$ existe y es creciente.



En el gráfico superior derecho se representa el equilibrio del mercado de capital del siguiente periodo para distintos niveles de capital. La demanda y la oferta de capital del siguiente periodo vendrían dadas por las siguientes ecuaciones:

- Oferta de capital (demanda de activos) del siguiente periodo por las economías domésticas y el sector exterior (en términos per capita del siguiente periodo):

$$\left.\begin{array}{l} k_{t+1} = \dfrac{i_t + (1-\delta)k_t}{1+n} \\ i_t = sy_t + fc\left(r_{t+1}^B - r^{B*}\right) \\ y_t = F(k_t, l_n) \end{array}\right\} \Rightarrow k_{t+1}^s = \frac{sF(k_t, l_n) + fc\left(r_{t+1}^B - r^{B*}\right) + (1-\delta)k_t}{1+n}$$

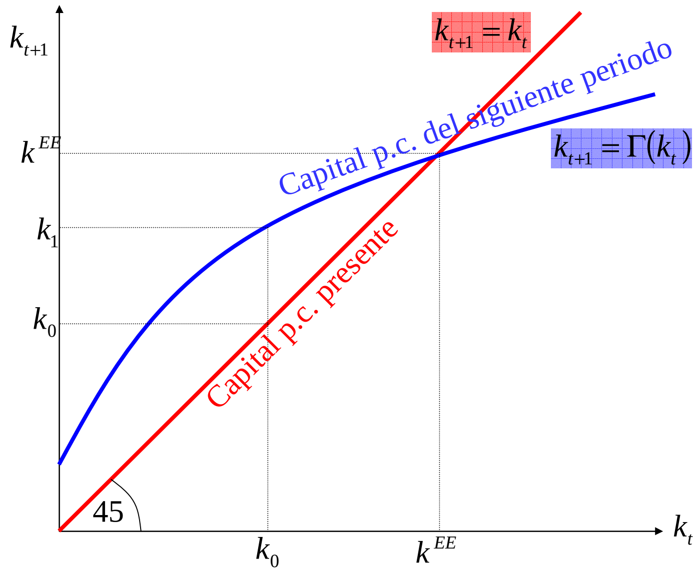
- Demanda de capital del siguiente periodo por parte de las empresas (en términos per cápita):

$$r_{t+1}^B = F'_K\left(k_{t+1}, l_n\right)$$

En el gráfico superior derecho vemos como varía la oferta de capital del siguiente periodo dependiendo del nivel de capital inicial, en el ejemplo hemos puesto el caso en el que el capital inicial es cero, y por tanto no hay ni renta, ni ahorro, ni queda capital después de la depreciación. No obstante, debido a la financiación exterior, el capital del siguiente periodo es positivo. Cuanto mayor es el capital inicial, k_0, k_1, mayor es el ahorro y el capital que queda después de la depreciación, y por tanto mayor es la oferta de capital del siguiente periodo. Lo que implica que cuanto mayor es el capital presente, mayor es el capital del siguiente periodo. Esto es, la curva de capital del siguiente periodo sigue teniendo pendiente positiva, como en el caso de la economía cerrada. Otro aspecto interesante es que cuanto mayor es el capital inicial, menor es el tipo de interés, y por tanto, menor es la financiación externa de la economía (menor es la balanza de capitales $fc\left(r_{+1}^B - r^{B*}\right)$).

Una vez obtenida la curva del capital del siguiente periodo, la dinámica del capital sería parecida a la de la economía cerrada:

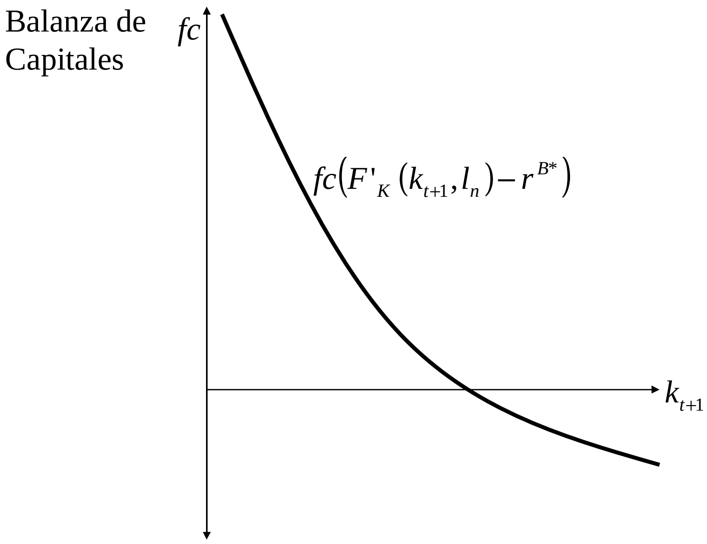
Acumulación de Capital per cápita en el equilibrio



Un aspecto interesante del modelo de Solow es que dado que el rendimiento del capital disminuye con el capital per capita, la financiación exterior (la balanza de capital) también lo hará. Por tanto, cuanto más pobre es un país mayor será el rendimiento de su capital y mayor la cantidad de financiación externa que obtendrá. Por otra parte, si partimos de un nivel de capital por debajo del estado estacionario, la financiación externa (la balanza de capitales) disminuirá a lo largo de la transición. Este resultado también se puede interpretar en clave de inversión directa: las empresas tienen un mayor rendimiento en países pobres, donde los salarios son menores, y por eso hay una tendencia en los países ricos a deslocalizar las empresas, especialmente las intensivas en trabajo, y trasladarlas a países pobres.

En el siguiente gráfico se representa la financiación externa (la balanza de capitales) en función del capital per cápita:

Financiación Externa y Desarrollo



APÉNDICE IV. UN MODELO DE CAMBIO TÉCNICO ENDÓGENO

Como en los modelos anteriores, en cada periodo hay *N* consumidores (no hay crecimiento de la población). Para simplificar vamos a suponer[23], sin pérdida de generalidad, que el nivel natural de empleo es igual a uno. Los consumidores consumen una fracción (1-*s*) de su renta y ahorran una fracción *s* de la misma. La renta de los consumidores la denotaremos Y_t.

En la economía hay dos bienes, el bien *X* y el bien *Z*. El bien *X* se puede usar para consumir, es decir como bien final, o como bien intermedio en la producción del bien *Z*. El bien *Z* se usará como bien intermedio en la producción del bien *X*. Al bien *X* lo llamaremos bien final y al bien *Z* bien intermedio.

Bien final (*X*):

Para producir el bien final se necesita trabajo L_t y un bien intermedio Z_t, el bien intermedio tiene un nivel de calidad A_t que afecta a la productividad de la tecnología de bienes finales. El nivel de calidad A_t no es escogido por la empresa de bienes finales sino por la empresa de bienes intermedios. La función de producción de bienes finales vendría dada por:

$$X_t = A_t^{1-\alpha} Z_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}; \quad \alpha \in (0,1) \tag{A.1}$$

El precio del bien *X* lo normalizamos a 1.

[23] En realidad esto no es un supuesto, es una normalización.

Bien intermedio (Z):

En cada periodo aparecen ϕN empresas que desarrolla investigación en el bien intermedio, esta empresas no produce el bien en el periodo en que aparece pero dedica recursos para mejorar la calidad del bien intermedio, de tal manera que la calidad del bien intermedio en el siguiente periodo viene dada por:

$$A_{t+1} = \Gamma A_t H_t^{\xi}; \quad \xi \in (0,1) \tag{A.2}$$

donde H_t es la cantidad de trabajo dedicado a investigación por parte de cada empresa de investigación. Aunque todas las empresas de investigación desarrollan el mismo tipo de investigación, sólo una de ellas conseguirá la patente de la mejora tecnológica conseguida. La probabilidad de obtener la patente por cada una de las empresas de investigación es igual a $1/\phi N$.

En el segundo periodo de vida de la empresa que obtiene la patente sobre la mejora tecnológica, dicha empresa obtendrá el monopolio de la venta de bienes intermedios que producirá de acuerdo con la tecnología:

$$Z_t = X_t^Z \tag{A.3}$$

donde X_t^Z es la cantidad de bien X dedicado a la producción de bien Z. Esto implica que el coste unitario de producir una unidad de bien intermedio es igual a 1.

Las empresas que hacen investigación, la llamaremos empresa de I+D. La empresa que ha obtenido la patente, la llamaremos en el segundo periodo de vida, empresa de bienes intermedios.

Decisiones de los agentes:

Empresa de bienes finales:

Las empresas de bienes finales son competitivas y maximizan beneficios tomando el precio del trabajo w_t y del bien intermedio p_t como dado:

$$\max_{z_t, L_r} A_t^{1-\alpha} Z_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} - w_t L_t - p_t Z_t$$

De este problema de maximización obtenemos las siguientes condiciones de primer orden:

$$(1-\alpha) A_t^{1-\alpha} \left(\frac{Z_t}{L_t} \right)^{\alpha} = w_t \tag{A.4}$$

$$\alpha \left(\frac{A_t L_t}{Z_t} \right)^{1-\alpha} = p_t \tag{A.5}$$

Las ecuaciones anteriores nos dicen que la empresa de bienes finales contratará factores hasta el punto en que lo que añade la última unidad de factor a los ingresos de la empresa, el producto marginal del factor, se iguale a lo que añade la última unidad del factor a los costes, el precio del factor.

A partir de la condición de primer orden con respecto al bien intermedio podemos obtener la demanda de bien intermedio por parte de las empresas de bienes finales:

$$\alpha\left(\frac{A_t L_t}{Z_t}\right)^{1-\alpha} = p_t \Leftrightarrow \boxed{Z_t = \left(\frac{\alpha}{p_t}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} A_t L_t} \tag{A.6}$$

Una forma útil de escribir las condiciones de primer orden de la empresa de bienes finales es la siguiente:

$$w_t = (1-\alpha)A_t^{1-\alpha}\left(\frac{Z_t}{L_t}\right)^{\alpha} = (1-\alpha)\frac{A_t^{1-\alpha} Z_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}}{L_t} \Rightarrow \boxed{w_t = (1-\alpha)\frac{X_t}{L_t}} \tag{A.7}$$

$$p_t = \alpha\left(\frac{A_t L_t}{Z_t}\right)^{1-\alpha} = \alpha\frac{A_t^{1-\alpha} Z_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}}{Z_t} \Rightarrow \boxed{p_t = \alpha\frac{X_t}{Z_t} \Leftrightarrow Z_t = \alpha\frac{X_t}{p_t}} \tag{A.8}$$

Empresa de bienes intermedios:

La empresa de bienes intermedios es un monopolio, por lo que elige el precio que maximiza sus beneficios:

$$\max_{p_t}\left(\frac{\alpha}{p_t}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} A_t L_t (p_t - 1)$$

Las condiciones de primer orden del problema implica que el precio es igual a 1/α:

$$\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{\alpha}{p_t}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}-1} A_t L_t (p_t - 1) = \left(\frac{\alpha}{p_t}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} A_t L_t \Leftrightarrow \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{p_t}(p_t - 1) = 1 \Leftrightarrow$$

$$p_t - 1 = (1-\alpha)p_t \Leftrightarrow -1 = -\alpha p_t \Rightarrow$$

$$\boxed{p_t = \frac{1}{\alpha}} \tag{A.9}$$

Por tanto los beneficios de la empresa de bienes intermedios serán:

$$\pi_t = \alpha^{\frac{2}{1-\alpha}}\frac{1-\alpha}{\alpha} A_t L_t \tag{A.10}$$

Empresa de I+D:

Las empresas de I+D maximiza el valor descontado esperado de sus costes y sus ingresos futuros:

$$\max_{H_t, A_{t+1}} w_t H_t + \frac{\overbrace{\frac{1}{\phi N}}^{\text{Probabilidad de obtener la patente}} \overbrace{\alpha^{\frac{2}{1-\alpha}}\frac{1-\alpha}{\alpha}A_{t+1}L_{t+1}}^{\pi_{t+1}}}{1 + r_{t+1}}$$

$$s.a: A_{t+1} = \Gamma A_t H_t^{\xi}$$

Vemos que el valor esperado de los beneficios en el segundo periodo de vida de la empresa es igual a los beneficios en caso de que obtenga la patente, π_{t+1}, multiplicado por la probabilidad de obtener la patente $1/\phi N$.

Este problema se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\max_{H_t, A_{t+1}} w_t H_t + \frac{\frac{1}{\phi N}\alpha^{\frac{2}{1-\alpha}}\frac{1-\alpha}{\alpha}\Gamma A_t L_{t+1} H_t^{\xi}}{1+r_{t+1}}$$

Las condiciones de primer orden son las siguientes:

$$\frac{\xi\frac{1}{\phi N}\alpha^{\frac{2}{1-\alpha}}\frac{1-\alpha}{\alpha}\Gamma A_t L_{t+1} H_t^{\xi-1}}{(1+r_{t+1})} = w_t \tag{A.11}$$

La empresa de I+D contrata trabajadores hasta el punto en el que lo que incrementan la ultima unidad de trabajo de los beneficios esperados descontados del siguiente periodo se iguala al coste de esa última unidad de trabajo hoy.

<u>Consumidores</u>:

La renta de los consumidores vendría dada por la suma de las rentas laborales más los beneficios de las empresas de bienes finales π_t^X, los de la empresa de bienes intermedios π_t^Z y los de la empresa de I+D π_t^{I+D}:

$$Y_t = w_t(L_t + \phi N H_t) + \underbrace{\left|X_t - w_t L_t - p_t Z_t\right|}_{\pi_t^X} + \underbrace{\left[p_t Z_t - Z_t\right]}_{\pi_t^Z} + \phi N \underbrace{\left[-w_t H_t\right]}_{\pi_t^{I+D}}$$

$$Y_t = X_t - Z_t = X_t - \alpha\frac{X_t}{p_t} = X_t - \alpha^2 X_t = \left(1-\alpha^2\right)X_t \Rightarrow$$

$$Y_t = \left(1-\alpha^2\right)X_t \tag{A.12}$$

Hay que tener en cuenta que la renta de los consumidores es igual a la cantidad de bien X que se usa como bien final:

$$Y_t = X_t - X_t^Z = X_t - Z_t = \left(1-\alpha^2\right)X_t$$

El consumo y el ahorro agregados serán iguales a:

$$C_t = (1-s)Y_t = (1-s)\left(1-\alpha^2\right)X_t \tag{A.13}$$

$$S_t = sY_t = s\left(1-\alpha^2\right)X_t \tag{A.14}$$

Mercados:

Mercado de trabajo:

Para que haya equilibrio en el mercado de trabajo, la cantidad de trabajo demandado por el sector X más el trabajo demandado por el sector de I+D tiene que ser igual a la oferta de trabajo que es igual al número de personas en la economía:

$$L_t + \underbrace{\phi N}_{\substack{\text{número de}\\ \text{empresas}\\ \text{de I+D}}} \underbrace{H_t}_{\substack{\text{trabajo que}\\ \text{contrata}\\ \text{cada empresa}\\ \text{de I+D}}} = N \tag{A.15}$$

Mercado de Fondos:

La demanda de fondos por parte de la economía es igual a los fondos necesarios para las ϕN empresas de I+D mientras que la oferta de fondos viene dado por el ahorro de los consumidores:

$$\underbrace{\phi N}_{\substack{\text{número de}\\ \text{empresas}\\ \text{de I+D}}} \underbrace{w_t H_t}_{\substack{\text{recursos}\\ \text{finiancieros}\\ \text{de cada}\\ \text{empresa}\\ \text{de I+D}}} = S_t \tag{A.16}$$

Mercado de bienes:

La demanda del bien X para consumir y para producir el bien Z tiene que ser igual a la producción del bien X:

$$C_t + X_t^z = X_t \tag{A.17}$$

La demanda del bien Z para producir el bien X tiene que ser igual a la producción del bien Z:

$$Z_t = X_t^z \tag{A.18}$$

Tasa de crecimiento de la economía:

Usando la condición de equilibrio del mercado de fondos (A.16) y las ecuaciones (A.7) y (A.14):

$$\phi N w_t H_t = S_t$$

$$\phi N \frac{(1-\alpha)X_t}{L_t} H_t = s(1-\alpha^2)X_t = s(1-\alpha)(1+\alpha)X_t$$

$$\phi N \frac{H_t}{N - \phi N H_t} = s(1+\alpha)$$

$$\phi N H_t = s(1+\alpha)\left(N - \phi N H_t\right)$$

$$\boxed{H_t = \frac{1}{\phi}\frac{s(1+\alpha)}{1+s(1+\alpha)}} \tag{A.19}$$

$$\boxed{L_t = N - \phi N H_t = \frac{1}{1+s(1+\alpha)} N} \tag{A.20}$$

Autores: Juan Acosta Ballesteros, Carmen Álvarez Albelo, Carlos Bethencourt Marrero, Rosa Marina González Marrero, Fernando Perera Tallo, Mª Gracia Rodríguez Brito **http://bit.ly/8l8DDu**

Usando el resultado anterior en la ecuación de acumulación de la calidad (A.2) obtenemos la tasa de crecimiento de la economía:

$$A_{t+1} = \Gamma A_t H_t^{\xi} = \Gamma A_t \left(\frac{1}{\phi} \frac{s(1+\alpha)}{1+s(1+\alpha)} \right)^{\xi} \Rightarrow 1 + v_A = \frac{A_{t+1}}{A_t} = \Gamma \left(\frac{1}{\phi} \frac{s(1+\alpha)}{1+s(1+\alpha)} \right)^{\xi} \Rightarrow$$

$$v_A = \frac{A_{t+1} - A_t}{A_t} = \Gamma \left(\frac{1}{\phi} \frac{s(1+\alpha)}{1+s(1+\alpha)} \right)^{\xi} - 1 \qquad \text{(A.21)}$$

Donde v_A es la tasa de crecimiento de la calidad del bien *Z*, *A*. Dado que la cantidad de trabajo dedicado a la producción de cada sector no cambia con el tiempo, es fácil de demostrar que las tasas de crecimiento de la producción del bien X , v_X , y del bien z, v_Z , son iguales a v_A (esto se puede poner en el apéndice):

$$Z_t = \alpha \frac{X_t}{p_t} = \alpha^2 X_t \Rightarrow v_Z = \frac{Z_{t+1} - Z_t}{Z_t} = \frac{\alpha^2 X_{t+1} - \alpha^2 X_t}{\alpha^2 X_t} = \frac{X_{t+1} - X_t}{X_t} = v_X$$

$$1 + v_X = \frac{X_{t+1}}{X_t} = \frac{A_{t+1}^{1-\alpha} Z_{t+1}^{\alpha} L_{t+1}^{1-\alpha}}{A_t^{1-\alpha} Z_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}} = (1+v_A)^{1-\alpha}(1+v_Z)^{\alpha} = (1+v_A)^{1-\alpha}(1+v_X)^{\alpha} \Rightarrow$$

$$(1+v_X)^{1-\alpha} = (1+v_A)^{1-\alpha} \Rightarrow v_A = v_X$$

Centrándonos en la ecuación (A.21) vemos que la tasa de crecimiento de la economía depende positivamente de la tasa de ahorro *s* y en la productividad del I+D Γ. Cuanto más se ahorra más se invierte en I+D y más rápido es el cambio tecnológico. Cuanto más productiva es la actividad de I+D, más avance tecnológico hay para un determinado nivel de inversión, y por tanto más rápido será el avance tecnológico y la tasa de crecimiento. Por último, otro factor que afecta negativamente a la tasa de crecimiento económico es ϕ, el número per cápita de empresas de I+D.

Ineficiencia de la economía:

En esta economía hay tres fuentes de ineficiencia:

- La existencia de monopolio: para que las empresas de I+D tengan incentivos a desarrollar su investigación tienen que recibir algo a cambio de esa investigación. Lo que reciben es las rentas de monopolio una vez hayan desarrollado la calidad del producto. Ahora bien, la existencia del monopolio implica ineficiencia.
- La existencia de externalidades positivas de la actividad de I+D: La investigación tecnológica no suele partir de la nada sino que se basa en el conocimiento tecnológico existente. Es decir, los conocimientos tecnológicos que se obtienen en el presente sirven de base para los conocimientos tecnológico que se obtengan en le futuro. Esto implica que la actividad de I+D en el presente tiene un efecto externo positivo sobre la actividad de I+D en el futuro, lo que implica que la empresa de I+D invierten en tecnología una cantidad menor de la que sería eficiente.
- Dispersión de recursos de varias empresas de I+D: cuanto más empresas estén desarrollando el mismo tipo de investigación, más recursos se están usando para

producir el mismo conocimiento tecnológico. Esto es debido a que las empresas de I+D no tienen ningún incentivo a cooperar y intercambiarse información entre ellas. Por ejemplo, considere que hay una investigación en varias fases y en la primera fase se tiene que hacer un experimento determinado. Considere que hay dos laboratorios, el 1 y el 2. Si el laboratorio 1 pertenece a una empresa distinta que el laboratorio 2, cuando el laboratorio 1 haga el experimento de la primera fase de investigación, no informará al laboratorio 2 del resultado del mismo, por lo que el laboratorio 2 se verá forzada a hacer también ese experimento con el consiguiente gasto de recursos. Si los dos laboratorios estuvieran en la misma empresa, el laboratorio 1 le comunicaría los resultados al laboratorio 2, que no tendría que repetir el experimento del la primera fase, con el consiguiente ahorro de recursos. Por tanto, la falta de cooperación de intercambio de información que conlleva la existencia de varias empresas de I+D desarrollando el mismo tipo de investigación implica que los recursos no se usan de manera eficiente, y que se tienen que multiplicar innecesariamente el uso de recursos para alcanzar el mismo nivel de conocimiento tecnológico.

BIBLIOGRAFÍA

Bajo, O. y Monés, M. A. (2000). *Curso de Macroeconomía*. Barcelona: Antoni Bosch, 2ª Edición.

Blanchard, O. Amighini, A. y Giavazzi, F. (2012). *Macroeconomía*. Madrid: Pearson, 5ª Edición.

Jones, C. I. (2000). *Introducción al Crecimiento Económico*. Madrid: Prentice-Hall.

Mankiw, N. G. (2014). *Macroeconomía*. Barcelona: Antoni Bosch, 8ª Edición.

Sala-i-Martín, X. (2000). *Apuntes de Crecimiento Económico*. Barcelona: Antoni Bosch, 2ª Edición.