

Apuntes de Variable Compleja

Tema 4: Funciones meromorfas

Isabel Marrero

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de La Laguna

Índice

1	Introducción	3
2	Series de Laurent	3
3	Ceros y polos	8
3.1	Clasificación de las singularidades aisladas	8
3.2	Ceros de las funciones analíticas	9
3.3	Polos	11
4	Teorema de los residuos	12
4.1	Cálculo de residuos en polos	12
4.2	Evaluación de integrales complejas	16
5	Aplicaciones del teorema de los residuos al cálculo de integrales reales	18
5.1	Integrales trigonométricas reales	18
5.2	Integrales impropias reales	19
5.2.1	Valor principal de Cauchy	19
5.2.2	Evaluación de integrales impropias reales	21
5.2.3	Integrales de Fourier	23
5.2.4	Indentación de contornos	26
5.3	Integración a lo largo de un salto de rama	28
6	Principio del argumento y teorema de Rouché	30
6.1	Principio del argumento	30
6.2	Teorema de Rouché	32
7	Ejercicios resueltos	34

1 Introducción

Vimos en el Tema 3, como consecuencia de la fórmula integral de Cauchy para derivadas, que si una función f es holomorfa en un punto z_0 entonces f tiene derivadas de todos los órdenes en z_0 y admite un desarrollo en una serie de potencias centrada en ese punto, es decir, es analítica en él. Una singularidad de una función compleja es un punto donde la función no es holomorfa. En el presente tema veremos que, si z_0 es una singularidad aislada de f , entonces f puede ser desarrollada en otro tipo de serie, conocida como serie de Laurent (sección 2), válida en un anillo centrado en z_0 . Las singularidades más frecuentes aparecen al formar el cociente de dos funciones holomorfas, ya que los ceros del denominador van a ser singularidades del cociente; este hecho nos induce a retomar el estudio de las propiedades de los ceros de una función holomorfa (sección 3). El concepto de serie de Laurent da lugar al de residuo y éste, a su vez, conducirá a un nuevo método, el teorema de los residuos, para evaluar integrales complejas (sección 4) y también, en algunos casos, integrales reales (sección 5). Concluimos el tema con la sección 6, donde aplicaremos el teorema de los residuos a la determinación del número de polos y ceros de una función compleja (principio del argumento) y a la localización de éstos (teorema de Rouché).

2 Series de Laurent

Definición 2.1. Se dice que el punto z_0 es una singularidad o punto singular de la función f si f no es derivable en ese punto. El punto z_0 es una singularidad aislada de f si existe algún entorno reducido $0 < |z - z_0| < R$ de z_0 donde f es holomorfa.



Figura 1. Pierre Alphonse Laurent (1813-1854).

Ejemplo 2.2. Los puntos $z = \pm 2i$ son singularidades de

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 4},$$

y son aisladas ya que f es holomorfa en todo punto de $0 < |z - 2i| < 1$ y de $0 < |z + 2i| < 1$. Sin embargo, $z = 0$ no es singularidad aislada de $g(z) = \text{Log } z$, puesto que todo entorno de cero contiene puntos del semieje real negativo, y g no es holomorfa en esos puntos.

Teorema 2.3 (Laurent). Supongamos que f es holomorfa en el dominio anular D definido por $r < |z - z_0| < R$. Entonces f admite el desarrollo en serie

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad (1)$$

válido para $r < |z - z_0| < R$. Los coeficientes a_k vienen dados por

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(s)}{(s - z_0)^{k+1}} ds \quad (k \in \mathbb{Z}), \quad (2)$$

donde C es cualquier curva simple cerrada contenida en D que rodea a z_0 .

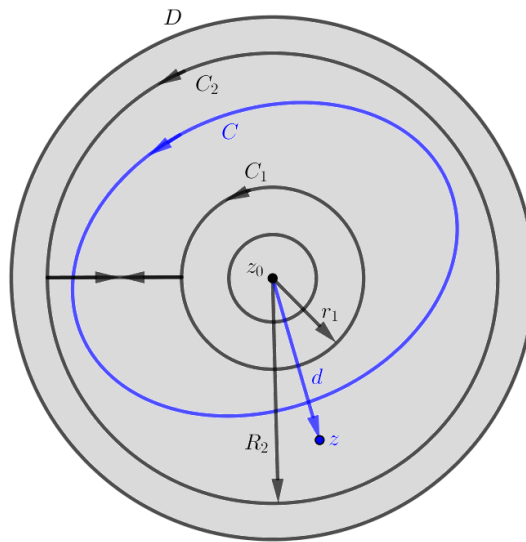


Figura 2. Contornos para el Teorema 2.3.

Demostración. Sean C_1 y C_2 circunferencias concéntricas, centradas en z_0 , de radios respectivos r_1 y R_2 , con $r < r_1 < R_2 < R$. Fijemos un punto $z \in D$ que también satisfaga la desigualdad $r_1 < |z - z_0| < R_2$. Practicando un corte entre C_2 y C_1 (fig. 2), sigue de la fórmula integral de Cauchy que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(s)}{s - z} ds - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(s)}{s - z} ds. \quad (3)$$

Como en la demostración del teorema de Taylor, podemos escribir

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(s)}{s - z} ds = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad (4)$$

donde

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(s)}{(s - z_0)^{k+1}} ds \quad (k \in \mathbb{N}_0). \quad (5)$$

Por otra parte, sea $n \in \mathbb{N}$. Un procedimiento similar al empleado en la prueba de dicho teorema conduce a

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(s)}{s - z} ds = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(s)}{(z - z_0) - (s - z_0)} ds = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(s)}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{s - z_0}{z - z_0}} ds$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(s)}{z-z_0} \left[1 + \frac{s-z_0}{z-z_0} + \left(\frac{s-z_0}{z-z_0}\right)^2 + \dots + \left(\frac{s-z_0}{z-z_0}\right)^{n-1} + \frac{(s-z_0)^n}{(z-s)(z-z_0)^{n-1}} \right] ds \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + R_n(z),
\end{aligned}$$

donde

$$a_{-k} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{-k+1}} ds \quad (k \in \mathbb{N}) \quad (6)$$

y

$$R_n(z) = \frac{1}{2\pi i (z-z_0)^n} \oint_{C_1} \frac{f(s)(s-z_0)^n}{z-s} ds.$$

Queremos ver que $R_n(z) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. A tal fin, sea $d = |z - z_0|$, y sea $M = \max\{|f(s)| : s \in C_1\}$. Como $|s - z_0| = r_1$ ($s \in C_1$), la desigualdad triangular inversa proporciona

$$|z - s| = |(z - z_0) - (s - z_0)| \geq |z - z_0| - |s - z_0| = d - r_1.$$

El teorema *ML* da lugar entonces a la estimación

$$|R_n(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i (z-z_0)^n} \oint_{C_1} \frac{f(s)(s-z_0)^n}{z-s} ds \right| \leq \frac{1}{2\pi d^n} \frac{Mr_1^n}{d-r_1} 2\pi r_1 = \frac{Mr_1}{d-r_1} \left(\frac{r_1}{d}\right)^n.$$

Ya que $r_1 < d$, se tiene que $(r_1/d)^n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, así que $|R_n(z)| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Hemos probado que

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(s)}{s-z} ds = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}, \quad (7)$$

donde los coeficientes a_{-k} están dados por (6). Combinando (3), (4) y (7), encontramos que

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k. \quad (8)$$

Finalmente, sumando sobre \mathbb{Z} , (8) admite la expresión más compacta

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k.$$

Además, (5) y (6) pueden ser escritos como una única integral (2), pues, en aplicación del principio de deformación de contornos, es posible reemplazar C_1 y C_2 por cualquier contorno simple cerrado $C \subset D$ que rodee a z_0 . \square

Definición 2.4. La serie (1) se denomina serie de Laurent o desarrollo de Laurent de f centrado en z_0 , en el anillo $r < |z - z_0| < R$. La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}$$

se llama parte principal del desarrollo, mientras que la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$$

es su parte analítica.

Observación 2.5. Cuando $a_{-k} = 0$ ($k \in \mathbb{N}$), la parte principal del desarrollo (1) es cero, y la serie de Laurent se reduce a una serie de Taylor. Por tanto, el desarrollo de Laurent puede ser contemplado como una generalización del desarrollo de Taylor.

Observación 2.6. El dominio anular considerado en el Teorema 2.3 no tiene por qué tener «forma» de anillo. También pueden darse los siguientes casos:

- (i) $r = 0, R < \infty: 0 < |z - z_0| < R$ es el disco abierto perforado $D^*(z_0, R)$;
- (ii) $r > 0, R = \infty: r < |z - z_0| < \infty$ es el exterior del disco cerrado de centro z_0 y radio r ;
- (iii) $r = 0, R = \infty: 0 < |z - z_0| < \infty$ es el plano pinchado en z_0 , es decir, $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.

La fórmula integral (2) que da los coeficientes del desarrollo de Laurent se usa raramente en la práctica. Lo habitual es apoyarse en un desarrollo en serie conocido de alguna función elemental (exponencial, trigonométricas...), o manipular creativamente una serie geométrica.

Ejemplo 2.7. Desarrollar la función

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^4}$$

en una serie de Laurent centrada en $z_0 = 0$.

Resolución. Sabemos que la función $\operatorname{sen} z$ es entera, y que su serie de Maclaurin

$$\operatorname{sen} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \quad (9)$$

converge para todo $z \in \mathbb{C}$. Dividiendo esta serie de potencias por z^4 obtenemos una representación de f con potencias positivas y negativas de z :

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k-3}}{(2k+1)!} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!z} + \frac{z}{5!} - \frac{z^3}{7!} + \frac{z^5}{9!} - \dots$$

La parte principal del desarrollo,

$$\frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!z},$$

está definida para $|z| > 0$, mientras que la parte analítica

$$\frac{z}{5!} - \frac{z^3}{7!} + \frac{z^5}{9!} - \dots$$

converge para todo $z \in \mathbb{C}$. Por tanto, la serie obtenida vale si $0 < |z| < \infty$. □

Ejemplo 2.8. Desarrollar la función

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$$

en sendas series de Laurent válidas en los siguientes dominios anulares: (i) $0 < |z| < 1$; (ii) $1 < |z| < \infty$; (iii) $0 < |z-1| < 1$; (iv) $1 < |z-1| < \infty$.

Resolución.

(i) Escribimos:

$$f(z) = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} z^k = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z} \sum_{k=1}^{\infty} z^k = -\frac{1}{z} - \sum_{k=0}^{\infty} z^k = -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - z^3 - \dots \quad (|z| < 1).$$

(ii) Ahora:

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - z} = \frac{1}{z^2} \frac{1}{1 - 1/z} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^k} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{z^k} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \dots$$

El desarrollo se ha obtenido multiplicando por $1/z^2$ una serie geométrica de razón $1/z$, luego converge para $|1/z| < 1$, condición que excluye a $z = 0$ y es equivalente a la dada.

(iii) Sumamos y restamos 1 en el denominador:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-1} \frac{1}{1+(z-1)} = \frac{1}{z-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-1)^k = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (z-1)^k \\ &= \frac{1}{z-1} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} (z-1)^k = \frac{1}{z-1} - 1 + (z-1) - (z-1)^2 + (z-1)^3 - \dots \end{aligned}$$

Como el desarrollo está construido multiplicando por $1/(z-1)$ una serie geométrica de razón $-(z-1)$, converge para $|z-1| > 0$ y $|z-1| = |-(z-1)| < 1$.

(iv) Restamos y sumamos 1 en el denominador, e introducimos la suma de una serie geométrica convergente para $|1/(z-1)| < 1$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{[(z-1)+1](z-1)} = \frac{1}{(z-1)^2 + (z-1)} = \frac{1}{(z-1)^2} \frac{1}{1 + \frac{1}{z-1}} = \frac{1}{(z-1)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(z-1)^k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(z-1)^{k+2}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(z-1)^k} = \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{(z-1)^3} + \frac{1}{(z-1)^4} - \dots \end{aligned}$$

La condición $|1/(z-1)| < 1$ excluye a $z = 1$ y equivale a la dada. □

Observación 2.9. *Nótese que, cuando $k = -1$, la fórmula (2) que da los coeficientes del desarrollo en serie de Laurent se convierte en*

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz,$$

o, lo que es más importante,

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i a_{-1}.$$

Observación 2.10. *Al igual que ocurre con las series de Taylor, independientemente de cómo se obtenga el desarrollo de Laurent de una función f en un dominio anular dado, este desarrollo es la serie de Laurent de f ; es decir, la serie de Laurent válida en ese dominio es única.*

Observación 2.11. *El centro del dominio anular de validez de una serie de Laurent no tiene por qué ser una singularidad aislada de la función que se desarrolla: véase el Ejercicio 2.*

$z = z_0$	Serie de Laurent para $0 < z - z_0 < R$ (puede ser $R = \infty$)
Evitable	$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$
Polo de orden n	$\frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \frac{a_{-(n-1)}}{(z - z_0)^{n-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots$
Singularidad esencial	$\dots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$

Tabla 1. Clasificación de las singularidades aisladas.

3 Ceros y polos

3.1 Clasificación de las singularidades aisladas

Una singularidad aislada z_0 de una función compleja f se clasifica según que la parte principal de su desarrollo en serie de Laurent válido en un disco perforado $D^*(z_0, R)$ ($R \in (0, \infty]$) contenga cero, un número finito, o un número infinito de términos.

- (i) Si la parte principal es nula, es decir, $a_{-k} = 0$ ($k \in \mathbb{N}$), entonces z_0 es una *singularidad evitable*.
- (ii) Si la parte principal contiene un número finito de términos no nulos, entonces z_0 es un *polo*. En este caso, si el último coeficiente no nulo de la parte principal de la serie de Laurent de f es a_{-n} , con $n \in \mathbb{N}$, diremos que z_0 es un *polo de orden n* de f . Por ejemplo, si z_0 es un polo de orden 1 entonces la parte principal del desarrollo contiene exactamente un término, con coeficiente $a_{-1} \neq 0$. Un polo de orden 1 es denominado habitualmente *polo simple*, uno de orden 2, *polo doble*, y así sucesivamente.
- (iii) Si la parte principal contiene una infinidad de términos no nulos, la singularidad z_0 se dice *esencial*.

Definición 3.1. Una función holomorfa excepto por polos se dice meromorfa.

Ejemplo 3.2. Probar que $z = 0$ es una singularidad evitable de la función

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}.$$

Demostración. Dividiendo por z la serie de Maclaurin de $\operatorname{sen} z$ (9) encontramos que

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots \quad (10)$$

Como todos los coeficientes de la parte principal de la serie de Laurent son nulos, se concluye que $z = 0$ es una singularidad evitable de f . \square

Si una función f tiene una singularidad evitable en z_0 , siempre es posible dar una definición adecuada del valor de $f(z_0)$ que haga f holomorfa en $z = z_0$. Por ejemplo, como el segundo miembro de (10) vale 1 en $z = 0$, tiene sentido definir $f(0) = 1$. De este modo, la función $f(z) = (\operatorname{sen} z)/z$ es holomorfa en $z = 0$, porque puede ser representada por una serie de Maclaurin centrada en ese punto.

Ejemplo 3.3. Probar que $z = 0$ es un polo simple de f y un polo triple de g , siendo

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^2}, \quad g(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^4}.$$

Resolución. Dividiendo por z^2 los términos del desarrollo (9) resulta

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k-1} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \dots \quad (0 < |z| < \infty).$$

Como $a_{-1} = 1 \neq 0$, $z = 0$ es un polo simple de f . Similarmente, atendiendo al Ejemplo 2.7, $z = 0$ es un polo triple de g . \square

Ejemplo 3.4. Clasificar las singularidades de la función

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$$

en $z = 0$ y $z = 1$.

Resolución. Para efectuar la clasificación debemos considerar desarrollos en serie de Laurent de f válidos en entornos reducidos de $z = 0$ y de $z = 1$, como son los obtenidos en los apartados (i) y (iii) del Ejemplo 2.8, respectivamente. Puesto que la parte principal de ambos desarrollos se trunca en $n = -1$, resulta que $z = 0$ y $z = 1$ son polos simples de f . \square

Ejemplo 3.5. Desarrollar $f(z) = e^{3/z}$ en una serie de Laurent válida para $0 < |z| < \infty$. Clasificar la singularidad de esta función en $z = 0$.

Resolución. Sabemos que

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Sustituyendo aquí z por $3/z$,

$$e^{3/z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k!} z^{-k} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k!} z^{-k} = 1 + \frac{3}{z} + \frac{3^2}{2!z^2} + \frac{3^3}{3!z^3} + \dots \quad (11)$$

La serie (11) vale para $z \neq 0$, es decir, para $0 < |z| < \infty$. Puesto que la parte principal del desarrollo contiene una infinidad de términos no nulos, se concluye que $z = 0$ es una singularidad esencial de f . \square

3.2 Ceros de las funciones analíticas

Recordemos que un complejo z_0 es un cero de una función f si $f(z_0) = 0$.

Definición 3.6. Diremos que una función analítica f tiene un cero de orden n en z_0 si z_0 es un cero de f y de sus primeras $n - 1$ derivadas, pero no de la n -ésima. Simbólicamente:

$$f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0,$$

pero

$$f^{(n)}(z_0) \neq 0.$$

Los ceros de orden n también se denominan ceros de multiplicidad n . Un cero de orden 1 se dice un cero simple, de orden 2, un cero doble, y así sucesivamente.

Teorema 3.7. Una función f , analítica en un disco $|z - z_0| < R$, tiene un cero de orden n en z_0 si, y sólo si, f puede ser escrita en la forma

$$f(z) = (z - z_0)^n \phi(z),$$

donde la función ϕ es analítica en z_0 y $\phi(z_0) \neq 0$.

Demostración. « \Rightarrow » Supongamos que f es analítica en z_0 , de modo que f admite un desarrollo en serie de Taylor centrado en z_0 que es convergente para $|z - z_0| < R$, y que f tiene un cero de orden n en este punto. Puesto que los coeficientes de la serie de Taylor

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

vienen dados por

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \quad (k \in \mathbb{N}_0),$$

los primeros n términos de la serie han de ser nulos, mientras que $a_n \neq 0$. En particular, el desarrollo adopta la forma

$$\begin{aligned} f(z) &= a_n (z - z_0)^n + a_{n+1} (z - z_0)^{n+1} + a_{n+2} (z - z_0)^{n+2} + \dots \\ &= (z - z_0)^n \left[a_n + a_{n+1} (z - z_0) + a_{n+2} (z - z_0)^2 + \dots \right] = (z - z_0)^n \phi(z), \end{aligned}$$

donde la función

$$\phi(z) = a_n + a_{n+1} (z - z_0) + a_{n+2} (z - z_0)^2 + \dots$$

es analítica en z_0 , con $\phi(z_0) = a_n \neq 0$.

« \Leftarrow » Se omite. □

Ejemplo 3.8. Probar que $z = 0$ es un cero triple de

$$f(z) = z \operatorname{sen} z^2.$$

Resolución. La función entera f tiene un cero en $z = 0$. Por otra parte, reemplazando z por z^2 en (9) se obtiene el desarrollo de Maclaurin

$$\operatorname{sen} z^2 = z^2 - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^{10}}{5!} - \dots \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Sacando factor común z^2 en el segundo miembro de esta expresión y multiplicándolo por z encontramos que

$$f(z) = z \operatorname{sen} z^2 = z^3 \phi(z)$$

donde

$$\phi(z) = 1 - \frac{z^4}{3!} + \frac{z^8}{5!} - \dots,$$

con $\phi(0) = 1 \neq 0$. Por el Teorema 3.7, $z = 0$ es un cero de orden 3 de f . □

3.3 Polos

Teorema 3.9. Una función f , analítica en un disco perforado $0 < |z - z_0| < R$, tiene un polo de orden n en z_0 si, y sólo si, f puede ser escrita en la forma

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^n},$$

donde ϕ es analítica en z_0 , con $\phi(z_0) \neq 0$.

Demostración. « \Rightarrow » Supongamos que f tiene un polo de orden n en z_0 y, por tanto, admite un desarrollo en serie de Laurent de la forma

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \dots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots$$

válido en algún disco pinchado $0 < |z - z_0| < R$, con $a_{-n} \neq 0$. Sacando factor común $1/(z - z_0)^n$, se infiere que f es expresable como

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^n},$$

donde la serie de potencias

$$\phi(z) = a_{-n} + \dots + a_{-2}(z - z_0)^{n-2} + a_{-1}(z - z_0)^{n-1} + a_0(z - z_0)^n + a_1(z - z_0)^{n+1} + \dots$$

converge para $|z - z_0| < R$, con $\phi(z_0) = a_{-n} \neq 0$.

« \Leftarrow » Se omite. □

Como sabemos, un cero z_0 de una función analítica f es aislado: existe algún entorno de z_0 tal que $f(z) \neq 0$ en todo punto z de ese entorno, excepto en $z = z_0$. Como consecuencia, si z_0 es un cero de una función analítica no trivial f , la función $1/f(z)$ tiene una singularidad aislada en z_0 . Bajo determinadas circunstancias, el resultado siguiente permite encontrar los polos de una función por simple inspección.

Teorema 3.10. Si las funciones g y h son analíticas en z_0 y h tiene un cero de orden n en z_0 pero $g(z_0) \neq 0$, entonces el cociente $f = g/h$ tiene un polo de orden n en z_0 .

Demostración. Ya que h tiene un cero de orden n , sigue del Teorema 3.7 que $h(z) = (z - z_0)^n \phi(z)$, donde ϕ es analítica en z_0 y $\phi(z_0) \neq 0$. Así, f puede ser escrita en la forma

$$f(z) = \frac{g(z)/\phi(z)}{(z - z_0)^n} = \frac{\psi(z)}{(z - z_0)^n},$$

con $\psi = g/\phi$. Como g y ϕ son analíticas en z_0 y $\phi(z_0) \neq 0$, la función ψ es analítica en z_0 . Además, $g(z_0) \neq 0$ implica $\psi(z_0) \neq 0$. Se deduce del Teorema 3.9 que la función f tiene un polo de orden n en z_0 . □

Ejemplo 3.11. Determinar los ceros y polos, y los respectivos órdenes, de las funciones siguientes:

$$(i) f(z) = \frac{2z + 5}{(z - 1)(z + 5)(z - 2)^4};$$

$$(ii) \quad g(z) = \frac{1}{z \operatorname{sen} z^2}.$$

Resolución.

(i) El numerador y el denominador de la función racional

$$f(z) = \frac{2z+5}{(z-1)(z+5)(z-2)^4}$$

carecen de ceros comunes. Se advierte por inspección (Teorema 3.7) que f tiene un único cero simple en $z = -5/2$, mientras que su denominador tiene ceros simples en $z = 1$ y $z = -5$, y un cero de orden 4 en $z = 2$. Se desprende del Teorema 3.10 que f tiene polos simples en $z = 1$ y $z = -5$, y un polo cuádruple en $z = 2$.

(ii) La función $g(z) = 1/(z \operatorname{sen} z^2)$ carece de ceros. Se vio en el Ejemplo 3.8 que $z = 0$ es un cero triple de $f(z) = z \operatorname{sen} z^2$, y se deduce del Teorema 3.10 que su recíproca g tiene un polo de orden 3 en $z = 0$.

□

4 Teorema de los residuos

Definición 4.1. Supongamos que la función f presenta una singularidad aislada en z_0 . El coeficiente a_{-1} de $(z - z_0)^{-1}$, en la serie de Laurent de f válida en un disco perforado $0 < |z - z_0| < R$, se llama residuo de f en z_0 , y se denota

$$a_{-1} = \operatorname{Res}(f, z_0).$$

Obsérvese que z_0 puede ser una singularidad de cualquier tipo, excepto evitable: un polo de orden n , o una singularidad esencial.

Ejemplo 4.2. Sabemos (Ejemplo 3.4) que $z = 0$ y $z = 1$ son polos simples de

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}.$$

De los apartados (i) y (iii) del Ejemplo 2.8 se sigue, respectivamente, que

$$\operatorname{Res}(f, 0) = -1, \quad \operatorname{Res}(f, 1) = 1.$$

Ejemplo 4.3. Sabemos (Ejemplo 3.5) que $z = 0$ es una singularidad esencial de $f(z) = e^{3/z}$, con desarrollo de Laurent (11) válido si $0 < |z| < \infty$. Por tanto,

$$\operatorname{Res}(f, 0) = 3.$$

4.1 Cálculo de residuos en polos

Proposición 4.4. Si z_0 es un polo simple de f , entonces

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)f(z)].$$

Demostración. Puesto que f tiene un polo simple en z_0 , su desarrollo de Laurent, convergente en un cierto dominio $0 < |z - z_0| < R$, es de la forma

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots,$$

donde $a_{-1} \neq 0$. Multiplicando ambos miembros de esta igualdad por $z - z_0$ y tomando límites cuando $z \rightarrow z_0$, resulta:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)f(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} [a_{-1} + a_0(z - z_0) + a_1(z - z_0)^2 + a_2(z - z_0)^3 + \dots] = a_{-1} = \text{Res}(f, z_0).$$

□

Más en general, se verifica la siguiente:

Proposición 4.5. Si z_0 es un polo de orden n de f , entonces

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)^n f(z)].$$

Demostración. Como f tiene un polo de orden n en $z = z_0$, su desarrollo de Laurent, convergente en un entorno reducido $0 < |z - z_0| < R$, es de la forma

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \dots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots,$$

con $a_{-n} \neq 0$. Multiplicamos los dos miembros de esta expresión por $(z - z_0)^n$,

$$(z - z_0)^n f(z) = a_{-n} + \dots + a_{-2}(z - z_0)^{n-2} + a_{-1}(z - z_0)^{n-1} + a_0(z - z_0)^n + a_1(z - z_0)^{n+1} + \dots,$$

y derivamos $n - 1$ veces, obteniendo:

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)^n f(z)] = (n-1)! a_{-1} + n! a_0 (z - z_0) + \dots$$

Como todos los sumandos del segundo miembro, excepto el primero, contienen potencias positivas de $z - z_0$, al tomar límites cuando $z \rightarrow z_0$ encontramos que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)^n f(z)] = (n-1)! a_{-1}.$$

Despejando a_{-1} de esta última ecuación ya resulta la fórmula buscada. □

Ejemplo 4.6. Dada la función

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)},$$

determinar sus polos y calcular los residuos correspondientes.

Resolución. Se deduce del Teorema 3.10 que f tiene un polo simple en $z = 3$ y un polo doble en $z = 1$. En virtud de

la Proposición 4.4,

$$\operatorname{Res}(f, 3) = \lim_{z \rightarrow 3} [(z-3)f(z)] = \lim_{z \rightarrow 3} \frac{1}{(z-1)^2} = \frac{1}{4}.$$

Por otra parte, en virtud de la Proposición 4.5,

$$\operatorname{Res}(f, 1) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} [(z-1)^2 f(z)] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z-3} \right) = \lim_{z \rightarrow 1} \left[-\frac{1}{(z-3)^2} \right] = -\frac{1}{4}.$$

Compárese con los Ejercicios 3 y 4. □

Cuando f no es una función racional, puede resultar tedioso calcular residuos mediante las Proposiciones 4.4 y 4.5. Conviene tener en cuenta, por tanto, los resultados que siguen.

Proposición 4.7. Si g es una función holomorfa en un entorno de z_0 , si $m \in \mathbb{N}$, y si

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$$

con $g(z_0) \neq 0$, entonces

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}.$$

Demostración. En estas condiciones, z_0 es un polo de orden m de la función f . Por tanto:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, z_0) &= \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)] \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-z_0)^m \frac{g(z)}{(z-z_0)^m} \right] \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} g(z) = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}. \end{aligned}$$

□

Proposición 4.8. Supongamos que $f = g/h$, donde g, h son funciones holomorfas en z_0 . Si $g(z_0) \neq 0$ y h tiene un cero simple en z_0 , entonces f tiene un polo simple en z_0 y

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Demostración. En primer lugar, como h tiene un cero simple en z_0 , necesariamente $h(z_0) = 0$ y $h'(z_0) \neq 0$. En segundo lugar, por la definición de derivada,

$$h'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{h(z)}{z - z_0}.$$

Combinando ambos resultados con la Proposición 4.4:

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[(z-z_0) \frac{g(z)}{h(z)} \right] = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z)}{\frac{h(z)}{z-z_0}} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Véase también el Ejercicio 5. □

Proposición 4.9. Sean g, h funciones holomorfas en z_0 . Supongamos que z_0 es, respectivamente, un cero de orden m y de orden $m + 1$ de g y de h . Entonces $f = g/h$ tiene un polo simple en z_0 , y

$$\text{Res}(f, z_0) = (m + 1) \frac{g^{(m)}(z_0)}{h^{(m+1)}(z_0)}.$$

Demostración. El Teorema 3.7 proporciona funciones ϕ, ψ , analíticas en z_0 , tales que $\phi(z_0) \neq 0, \psi(z_0) \neq 0$, y

$$g(z) = (z - z_0)^m \phi(z), \quad h(z) = (z - z_0)^{m+1} \psi(z),$$

a saber:

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+m} (z - z_0)^k, \quad \text{con } a_k = \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!} \quad (k \in \mathbb{N}_0), \\ \psi(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+m+1} (z - z_0)^k, \quad \text{con } b_k = \frac{h^{(k)}(z_0)}{k!} \quad (k \in \mathbb{N}_0). \end{aligned}$$

Luego,

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{(z - z_0)^m \phi(z)}{(z - z_0)^{m+1} \psi(z)} = \frac{\phi(z)}{(z - z_0) \psi(z)},$$

y, por la Proposición 4.4,

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left[(z - z_0) \frac{\phi(z)}{(z - z_0) \psi(z)} \right] = \frac{\phi(z_0)}{\psi(z_0)} = \frac{a_m}{b_{m+1}} \\ &= \frac{g^{(m)}(z_0)}{m!} \frac{(m + 1)!}{h^{(m+1)}(z_0)} = (m + 1) \frac{g^{(m)}(z_0)}{h^{(m+1)}(z_0)}. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 4.10. Determinar los polos de la función

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + 1}$$

y calcular los residuos correspondientes.

Resolución. El polinomio $z^4 + 1$ puede ser factorizado como

$$z^4 + 1 = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4),$$

donde z_1, z_2, z_3 y z_4 son las cuatro raíces distintas de la ecuación $z^4 + 1 = 0$ (equivalentemente, las cuatro raíces cuartas de -1). Por el Teorema 3.10, la función

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + 1}$$

tiene cuatro polos simples, a saber: $z_1 = e^{i\pi/4}$, $z_2 = e^{i3\pi/4}$, $z_3 = e^{i5\pi/4}$, y $z_4 = e^{i7\pi/4}$. Para calcular los residuos correspondientes usamos la Proposición 4.8, junto con la identidad de Euler:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f, z_1) &= \frac{1}{4z_1^3} = \frac{1}{4}e^{-i3\pi/4} = -\frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}i, \\ \operatorname{Res}(f, z_2) &= \frac{1}{4z_2^3} = \frac{1}{4}e^{-i9\pi/4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}i, \\ \operatorname{Res}(f, z_3) &= \frac{1}{4z_3^3} = \frac{1}{4}e^{-i15\pi/4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}}i, \\ \operatorname{Res}(f, z_4) &= \frac{1}{4z_4^3} = \frac{1}{4}e^{-i21\pi/4} = -\frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}}i.\end{aligned}$$

□

4.2 Evaluación de integrales complejas

El próximo teorema establece que, bajo determinadas circunstancias, es posible evaluar integrales complejas de la forma $\oint_C f(z) dz$ sumando los residuos de f en las singularidades encerradas por C .

Teorema 4.11 (Teorema de los residuos de Cauchy). *Sea D un dominio simplemente conexo, y sea C un contorno simple cerrado, enteramente contenido en D . Si una función f es analítica dentro y sobre C , excepto en un número finito de singularidades aisladas z_1, z_2, \dots, z_n rodeadas por C , entonces*

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f, z_k).$$

Demostración. Sean C_1, C_2, \dots, C_n circunferencias centradas en z_1, z_2, \dots, z_n , respectivamente, de radios r_k lo suficientemente pequeños como para que C_1, C_2, \dots, C_n sean mutuamente disjuntas e interiores al contorno simple cerrado C . Como, por la Observación 2.9, se tiene que

$$\oint_{C_k} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_k) \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

el teorema de Cauchy-Goursat para dominios múltiplemente conexos permite concluir que

$$\oint_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f, z_k).$$

□

Ejemplo 4.12. *Evaluar*

$$\oint_C \frac{1}{(z-1)^2(z-3)} dz,$$

siendo el contorno C :

- (i) el rectángulo definido por $x = 0$, $x = 4$, $y = -1$, $y = 1$;
- (ii) la circunferencia $|z| = 2$.

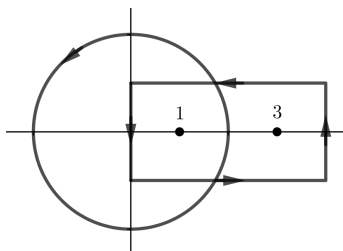


Figura 3. Ejemplo 4.12.

Resolución. La fig. 3 es ilustrativa de la situación en cada caso.

- (i) Como los puntos $z = 1$ y $z = 3$ son polos encerrados por el rectángulo, sigue del teorema de los residuos (Teorema 4.11) que

$$\oint_C \frac{1}{(z-1)^2(z-3)} dz = 2\pi i [\text{Res}(f, 1) + \text{Res}(f, 3)].$$

Ambos residuos fueron calculados en el Ejemplo 4.6. Sustituyendo los valores correspondientes,

$$\oint_C \frac{1}{(z-1)^2(z-3)} dz = 2\pi i \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = 0.$$

- (ii) Ahora, únicamente el polo $z = 1$ está rodeado por $|z| = 2$. Una nueva aplicación del Teorema 4.11 conduce a

$$\oint_C \frac{1}{(z-1)^2(z-3)} dz = 2\pi i \text{Res}(f, 1) = 2\pi i \left(-\frac{1}{4} \right) = -\frac{\pi i}{2}.$$

□

Ejemplo 4.13. *Evaluar*

$$\oint_C e^{3/z} dz,$$

donde $C : |z| = 1$.

Resolución. Pretendemos aplicar el Teorema 4.11. Sin embargo, como sabemos (Ejemplo 3.5), $z = 0$ es una singularidad esencial del integrando $f(z) = e^{3/z}$, así que para obtener $\text{Res}(f, 0)$ no es factible utilizar ninguno de los resultados vistos para el cálculo de residuos en polos. Recurriendo directamente al desarrollo en serie de Laurent de f en $z = 0$ encontramos que $\text{Res}(f, 0) = 3$ (Ejemplo 4.3), y concluimos:

$$\oint_C e^{3/z} dz = 2\pi i \text{Res}(f, 0) = 2\pi i \cdot 3 = 6\pi i.$$

□

Observación 4.14. *La fórmula integral de Cauchy puede ser considerada como un caso particular del teorema de los residuos (Teorema 4.11): si la función $g(z) = f(z)/(z - z_0)$ tiene un polo simple en $z = z_0$, su residuo es $f(z_0)$. Así, por el teorema de los residuos se tiene que*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \text{Res}(g, z_0) = f(z_0).$$

5 Aplicaciones del teorema de los residuos al cálculo de integrales reales

En esta sección veremos cómo emplear la teoría de los residuos para evaluar integrales reales de la forma

$$\int_0^{2\pi} F(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) d\theta,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \alpha x dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \operatorname{sen} \alpha x dx,$$

donde los integrandos F y f son funciones racionales, y las funciones f son irreducibles. Además de calcular integrales de estos tres tipos, mostraremos cómo usar residuos para calcular integrales impropias reales que requieren integrar a lo largo de un salto de rama.

5.1 Integrales trigonométricas reales

La técnica para evaluar una integral trigonométrica real de la forma

$$\int_0^{2\pi} F(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) d\theta$$

consiste en convertirla en una integral de contorno alrededor de $C : |z| = 1$. A tal fin, parametrizamos C mediante $z(\theta) = e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$). Entonces

$$z'(\theta) = ie^{i\theta}, \quad \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Como $[z(\theta)]^{-1} = 1/z(\theta) = e^{-i\theta}$ se tiene, equivalentemente,

$$z' = iz, \quad \cos \theta = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}.$$

Sustituyendo estas expresiones en la integral de partida:

$$\int_0^{2\pi} F(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} F(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) \frac{z'(\theta)}{ie^{i\theta}} d\theta = \oint_{|z|=1} F\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) \frac{dz}{iz}.$$

La integral de contorno así obtenida se resuelve mediante el teorema de los residuos (Teorema 4.11) o, alternativamente, por las fórmulas integrales de Cauchy, si esta opción resultase más ventajosa.

Ejemplo 5.1. Evaluar

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2 + \cos \theta)^2}.$$

Resolución. Sea $C : |z| = 1$. Procediendo como acabamos de exponer, la integral trigonométrica de partida se convierte en la integral de contorno

$$\oint_C \frac{1}{\left(2 + \frac{z + z^{-1}}{2}\right)^2} \frac{dz}{iz} = \oint_C \frac{1}{\left(2 + \frac{z^2 + 1}{2z}\right)^2} \frac{dz}{iz} = \frac{4}{i} \oint_C \frac{z}{(z^2 + 4z + 1)^2} dz.$$

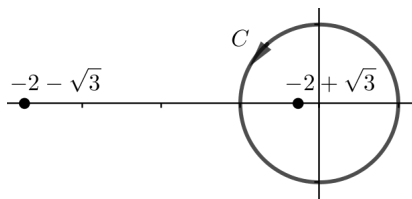


Figura 4. Ejemplo 5.1.

El denominador del último integrando admite la factorización

$$z^2 + 4z + 1 = (z - z_1)(z - z_2),$$

donde $z_1 = -2 - \sqrt{3}$ y $z_2 = -2 + \sqrt{3}$. Así, este integrando puede ser escrito como

$$\frac{z}{(z^2 + 4z + 1)^2} = \frac{z}{(z - z_1)^2(z - z_2)^2}.$$

Únicamente z_2 está encerrado por C (fig. 4); luego, por el Teorema 4.11,

$$\oint_C \frac{z}{(z^2 + 4z + 1)^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_2).$$

Al calcular el residuo advertimos que z_2 es un polo doble, por lo que aplicamos la Proposición 4.5:

$$\operatorname{Res}(f, z_2) = \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{d}{dz} [(z - z_2)^2 f(z)] = \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{d}{dz} \left[\frac{z}{(z - z_1)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow z_2} \left[-\frac{z + z_1}{(z - z_1)^3} \right] = \frac{1}{6\sqrt{3}}.$$

Finalmente,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2 + \cos \theta)^2} = \frac{4}{i} \oint_C \frac{z}{(z^2 + 4z + 1)^2} dz = \frac{4}{i} 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_2) = \frac{4}{i} 2\pi i \frac{1}{6\sqrt{3}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

□

5.2 Integrales impropias reales

Abordamos ahora el cálculo de integrales de la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx. \tag{12}$$

5.2.1 Valor principal de Cauchy

Supongamos que $y = f(x)$ es una función real, definida y continua en el intervalo $[0, \infty)$. En cursos anteriores se ha definido la integral impropia

$$I_1 = \int_0^{\infty} f(x) dx$$

como el límite

$$I_1 = \int_0^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(x) dx.$$

Si este límite existe, la integral I_1 se dice convergente; en caso contrario, es divergente. Similarmente, se define la integral impropia

$$I_2 = \int_{-\infty}^0 f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^0 f(x) dx.$$

Por último, si f es continua en $(-\infty, \infty)$ se define

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{\infty} f(x) dx = I_1 + I_2,$$

siempre que *ambas* integrales, I_1 e I_2 , sean convergentes. Si cualquiera de ellas es divergente, entonces $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ también lo es.

Resulta pertinente señalar que segundo miembro de esta última igualdad *no* es lo mismo que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{-R}^0 f(x) dx + \int_0^R f(x) dx \right] = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx.$$

Para que la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ sea convergente, los límites que definen I_1 e I_2 deben existir independientemente uno del otro. Ahora bien, si sabemos *a priori* que la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ converge, podemos evaluarla por medio de un único paso al límite:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx.$$

Por otra parte, el límite simétrico precedente puede existir aun cuando la integral impropia $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ sea divergente.

Por ejemplo, la integral $\int_{-\infty}^{\infty} x dx$ diverge, puesto que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R x dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2} R^2 = \infty.$$

Sin embargo,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R x dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2} [R^2 - (-R)^2] = 0.$$

El límite

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx,$$

si existe, se denomina valor principal de Cauchy (V.P.) de la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$, y se escribe

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx. \quad (13)$$

Con el ejemplo precedente hemos probado que

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} x dx = 0.$$

En síntesis: cuando una integral de la forma (12) converge, el valor principal de Cauchy (13) es el mismo que el valor de la integral. Cuando la integral (12) diverge, aún puede tener un valor principal de Cauchy.

Si la función f es continua en $(-\infty, \infty)$ y par, es decir, si $f(-x) = f(x)$, entonces su grafo es simétrico con respecto al eje OY , y consecuentemente

$$\int_{-R}^0 f(x) dx = \int_0^R f(x) dx.$$

Por tanto,

$$\int_{-R}^R f(x) dx = \int_{-R}^0 f(x) dx + \int_0^R f(x) dx = 2 \int_0^R f(x) dx.$$

Se desprende que si existe el valor principal de Cauchy (13), entonces $\int_0^{\infty} f(x) dx$ y $\int_{-\infty}^0 f(x) dx$ convergen. Los valores de estas integrales son:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = V.P. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2 \int_0^{\infty} f(x) dx.$$

5.2.2 Evaluación de integrales impropias reales

Para evaluar mediante la teoría de los residuos una integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx,$$

donde la función racional $f(x) = p(x)/q(x)$ es continua en $(-\infty, \infty)$, reemplazamos x por la variable compleja z e integramos la función compleja $f(z)$ alrededor de un contorno cerrado C , compuesto del intervalo $[-R, R]$ del eje real más una semicircunferencia C_R centrada en el origen, de radio lo suficientemente grande como para encerrar a todos los polos de la función $f(z) = p(z)/q(z)$ contenidos en el semiplano superior $\Im(z) > 0$ (fig. 5). Por el teorema de los residuos (Teorema 4.11), se tendrá entonces

$$\oint_C f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k), \quad (14)$$

donde z_k ($k = 1, 2, \dots, n$) denotan polos de f en el semiplano superior. Si logramos demostrar que

$$\int_{C_R} f(z) dz \rightarrow 0 \quad \text{cuando } R \rightarrow \infty,$$

seguirá de la segunda igualdad de (14) que

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k).$$

El resultado siguiente es útil a este propósito.

Proposición 5.2. *Supongamos que $f(z) = p(z)/q(z)$ es una función racional tal que el grado del polinomio denominador, $q(z)$, es mayor, en dos unidades al menos, que el grado del polinomio numerador; simbólicamente: $\text{grado}(q) \geq \text{grado}(p) + 2$. Si $C_R : z(\theta) = Re^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$), entonces*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0.$$

Demostración. Sean

$$\begin{aligned} p(z) &= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \quad (a_n \neq 0), \\ q(z) &= b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0 \quad (b_m \neq 0) \end{aligned}$$

dos polinomios de grados n, m , respectivamente, con $m \geq n + 2$. Aplicando la desigualdad triangular y utilizando la hipótesis, encontramos que

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left| \frac{p(z)}{q(z)} \right| = \left| \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0} \right| \\ &\leq \frac{|a_n| |z|^n + |a_{n-1}| |z|^{n-1} + \dots + |a_1| |z| + |a_0|}{||b_m| |z|^m - |b_{m-1}| |z|^{m-1} - \dots - |b_1| |z| - |b_0||} \\ &= \frac{R^n (|a_n| + |a_{n-1}| R^{-1} + \dots + |a_1| R^{-n+1} + |a_0| R^{-n})}{R^m (|b_m| - |b_{m-1}| R^{-1} - \dots - |b_1| R^{-m+1} - |b_0| R^{-m})} \\ &\leq \frac{1}{R^2} \frac{(|a_n| + |a_{n-1}| R^{-1} + \dots + |a_1| R^{-n+1} + |a_0| R^{-n})}{(|b_m| - |b_{m-1}| R^{-1} - \dots - |b_1| R^{-m+1} - |b_0| R^{-m})} \quad (|z| = R). \end{aligned}$$

Como

$$\frac{|a_n| + |a_{n-1}| R^{-1} + \dots + |a_1| R^{-n+1} + |a_0| R^{-n}}{||b_m| - |b_{m-1}| R^{-1} - \dots - |b_1| R^{-m+1} - |b_0| R^{-m}|} \rightarrow \frac{|a_n|}{|b_m|} \quad \text{cuando } R \rightarrow \infty,$$

para cierta constante $M > 0$ se debe cumplir:

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R^2} \quad (|z| = R, R \text{ grande}).$$

Finalmente, teniendo en cuenta que la longitud de C_R es igual a πR , el teorema *ML* permite concluir que

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \frac{M}{R^2} \pi R = \frac{\pi M}{R} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } R \rightarrow \infty.$$

□

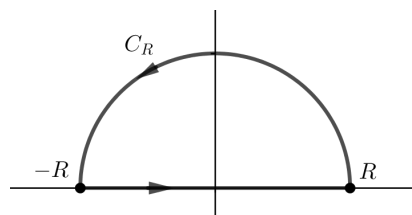


Figura 5. Evaluación de integrales impropias reales.

Ejemplo 5.3. *Evaluar*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)} dx.$$

Resolución. Sea

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)(z^2 + 9)}.$$

Puesto que

$$(z^2 + 1)(z^2 + 9) = (z - i)(z + i)(z - 3i)(z + 3i),$$

tomamos como C el contorno cerrado consistente en el intervalo $[-R, R]$ del eje OX más la semicircunferencia superior C_R centrada en el origen, de radio $R > 3$, que encierra a $z_1 = i$ y a $z_2 = 3i$.

Pongamos

$$I_1 = I_1(R) = \int_{-R}^R \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)} dx, \quad I_2 = I_2(R) = \int_{C_R} \frac{1}{(z^2 + 1)(z^2 + 9)} dz.$$

Por el teorema de los residuos (Teorema 4.11),

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{1}{(z^2 + 1)(z^2 + 9)} dz &= \int_{-R}^R \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)} dx + \int_{C_R} \frac{1}{(z^2 + 1)(z^2 + 9)} dz \\ &= I_1 + I_2 \\ &= 2\pi i [\text{Res}(f, i) + \text{Res}(f, 3i)]. \end{aligned} \quad (15)$$

En los polos simples $z_1 = i$ y $z_2 = 3i$ se tiene (Proposición 4.4)

$$\text{Res}(f, i) = \frac{1}{16i}, \quad \text{Res}(f, 3i) = -\frac{1}{48i}. \quad (16)$$

Por otra parte, como el grado del polinomio denominador del integrando supera en cuatro unidades al grado del polinomio numerador, la Proposición 5.2 garantiza que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_2 = 0. \quad (17)$$

Combinando (15), (16) y (17) concluimos

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_1 = 2\pi i \left(\frac{1}{16i} - \frac{1}{48i} \right) = \frac{\pi}{12};$$

o, dicho de otra manera,

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)} dx = \frac{\pi}{12}.$$

El integrando es una función par, así que la existencia del valor principal de Cauchy implica que la integral original converge a $\pi/12$. \square

5.2.3 Integrales de Fourier

Las integrales del tipo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \alpha x dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \alpha x dx,$$

que comparecen en las aplicaciones del análisis de Fourier, suelen ser denominadas *integrales de Fourier*.

Las integrales de Fourier son las partes real e imaginaria de la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x} dx.$$

En efecto, teniendo en cuenta la identidad de Euler

$$e^{i\alpha x} = \cos \alpha x + i \operatorname{sen} \alpha x,$$

podemos escribir

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \alpha x dx + i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \operatorname{sen} \alpha x dx,$$

siempre que las dos integrales del segundo miembro converjan.

Supongamos que $f(x) = p(x)/q(x)$ es una función racional, continua en $(-\infty, \infty)$, y que $\alpha > 0$. Entonces es posible calcular simultáneamente las dos integrales de Fourier sin más que considerar la integral compleja

$$\oint_C f(z)e^{i\alpha z} dz,$$

donde el contorno C consiste, de nuevo, en el intervalo $[-R, R]$ del eje real más un contorno semicircular C_R , centrado en el origen y de radio $R > 0$, lo suficientemente grande como para encerrar a los polos de $f(z)$ situados en el semiplano superior. Antes de proceder con un ejemplo, daremos condiciones suficientes para garantizar que la integral de contorno a lo largo de C_R tiende a cero cuando $R \rightarrow \infty$.

Proposición 5.4. *Supóngase que $f(z) = p(z)/q(z)$ es una función racional tal que el grado de $q(z)$ supera, al menos, en una unidad al grado de $p(z)$: $\operatorname{grado}(q) \geq \operatorname{grado}(p) + 1$. Si $C_R : z(\theta) = Re^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) y $\alpha > 0$, entonces*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z)e^{i\alpha z} dz = 0.$$

Demostración. El argumento utilizado en la prueba de la Proposición 5.2 muestra que

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R} \quad (|z| = R, R \text{ grande})$$

para alguna $M > 0$. Además,

$$|e^{i\alpha z}| = |e^{i\alpha R(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)}| = e^{-\alpha R \operatorname{sen} \theta} \quad (z(\theta) = Re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi).$$

Por consiguiente, para R grande:

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} f(z)e^{i\alpha z} dz \right| &\leq \int_0^\pi |f(Re^{i\theta})| e^{-\alpha R \operatorname{sen} \theta} |iRe^{i\theta}| d\theta \\ &\leq M \int_0^\pi e^{-\alpha R \operatorname{sen} \theta} d\theta = 2M \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R \operatorname{sen} \theta} d\theta. \end{aligned}$$

Puesto que $\alpha > 0$, aplicando la *desigualdad de Jordan*:

$$\operatorname{sen} \theta \geq \frac{2\theta}{\pi} \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

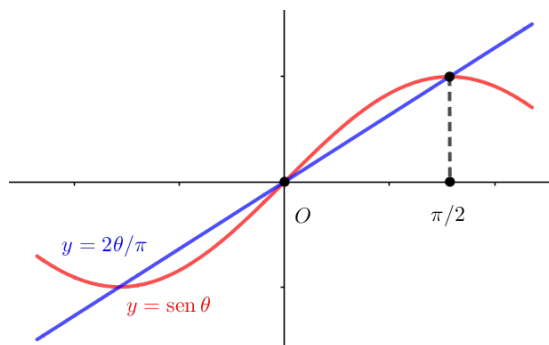


Figura 6. Desigualdad de Jordan.

(cf. fig. 6) resulta, finalmente:

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} f(z)e^{i\alpha z} dz \right| &\leq 2M \int_0^{\pi/2} e^{-2\alpha R\theta/\pi} d\theta = \frac{2M}{-2\alpha R/\pi} e^{-2\alpha R\theta/\pi} \Big|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{M\pi}{\alpha R} (1 - e^{-\alpha R}) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } R \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

como se pretendía. □

Ejemplo 5.5. *Evaluar el valor principal de Cauchy de la integral*

$$\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 9} dx.$$

Resolución. Notemos en primer lugar que la integral propuesta no se extiende desde $-\infty$ hasta ∞ , como requeriría el método que acabamos de describir. Esto se puede remediar observando que el integrando es una función par de x , por lo cual

$$\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 9} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 9} dx.$$

Tomamos $\alpha = 1$ y planteamos la integral

$$\oint_C \frac{z}{z^2 + 9} e^{iz} dz$$

alrededor del contorno C indicado con anterioridad (fig. 5). Los polos de $f(z) = z/(z^2 + 9)$ son $z = \pm 3i$, así que elegimos $R > 3$ para que C encierre al único polo de $f(z)$ situado en el semiplano superior, a saber, $z = 3i$. Aplicando el teorema de los residuos (Teorema 4.11):

$$\int_{-R}^R \frac{x}{x^2 + 9} e^{ix} dx + \int_{C_R} \frac{z}{z^2 + 9} e^{iz} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z)e^{iz}, 3i),$$

siendo

$$\operatorname{Res}(f(z)e^{iz}, 3i) = \frac{ze^{iz}}{2z} \Big|_{z=3i} = \frac{1}{2e^3}$$

(Proposición 4.8). Como el grado del denominador de $f(z)$ supera en una unidad al grado del numerador, se infiere de la Proposición 5.4 que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z)e^{iz} dz = 0,$$

y finalmente

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+9} e^{ix} dx = 2\pi i \frac{e^{-3}}{2} = \frac{\pi}{e^3} i.$$

Hemos obtenido que

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2+9} dx + i V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+9} dx = V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+9} e^{ix} dx = \frac{\pi}{e^3} i.$$

Igualando las partes real e imaginaria de los extremos de esta cadena de igualdades:

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2+9} dx = 0, \quad V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+9} dx = \frac{\pi}{e^3}.$$

La paridad del integrando ya proporciona el valor de la integral buscada:

$$\int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+9} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+9} dx = \frac{\pi}{2e^3}.$$

□

5.2.4 Indentación de contornos

En las integrales consideradas hasta ahora, los integrandos $f(z) = p(z)/q(z)$ carecían de polos sobre el eje real. A continuación modificaremos las técnicas descritas anteriormente a fin de tratar también este caso. Concretamente, para evaluar

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

usando residuos cuando $f(z)$ tiene un polo en $z = c \in \mathbb{R}$, rodeamos este polo mediante un contorno semicircular C_r centrado en $z = c$ y de radio $r \rightarrow 0$, positivamente orientado, con el que indentamos el contorno que utilizaríamos si no existieran polos reales (fig. 7). El resultado siguiente será útil a la hora de aplicar esta técnica.

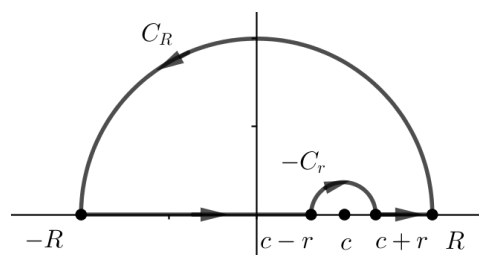


Figura 7. Indentación de contornos.

Proposición 5.6. Supóngase que f tiene un polo simple $z = c$ sobre el eje OX . Si $C_r : z(\theta) = c + re^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$), entonces

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} f(z) dz = \pi i \operatorname{Res}(f, c).$$

Demostración. Como f tiene un polo simple en $z = c$, su serie de Laurent es de la forma

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-c} + g(z),$$

donde $a_{-1} = \text{Res}(f, c)$ y $g(z)$ es analítica en $z = c$. Usando la serie de Laurent de f y la parametrización de C_r , tenemos:

$$\int_{C_r} f(z) dz = a_{-1} \int_0^\pi \frac{ire^{i\theta}}{re^{i\theta}} d\theta + \int_0^\pi g(c + re^{i\theta}) ire^{i\theta} d\theta = I_1 + I_2. \tag{18}$$

En primer lugar,

$$I_1 = a_{-1} \int_0^\pi \frac{ire^{i\theta}}{re^{i\theta}} d\theta = \pi i a_{-1} = \pi i \text{Res}(f, c).$$

Por otra parte, ya que $g(z)$ es analítica en $z = c$, está acotada en un entorno de ese punto: existe $M > 0$ tal que

$$|g(c + re^{i\theta})| \leq M \quad (r \text{ pequeño, } 0 \leq \theta \leq \pi).$$

Luego,

$$|I_2| = \left| \int_0^\pi g(c + re^{i\theta}) ire^{i\theta} d\theta \right| \leq r \int_0^\pi |g(c + re^{i\theta})| d\theta \leq \pi Mr.$$

Se sigue de esta estimación que $\lim_{r \rightarrow 0} I_2 = 0$.

Finalmente, para completar la prueba basta tomar límites cuando $r \rightarrow 0$ en (18). □

Ejemplo 5.7. Encontrar el valor principal de Cauchy de la integral

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\text{sen } x}{x(x^2 - 2x + 2)} dx.$$

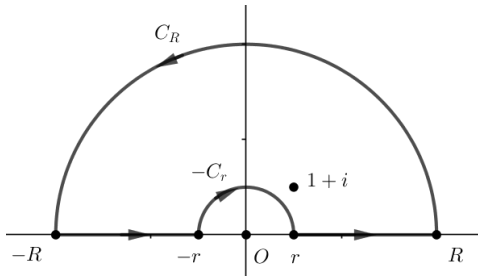


Figura 8. Ejemplo 5.7.

Resolución. De acuerdo con lo expuesto en la sección 5.2.3, consideramos la función

$$f(z) = \frac{1}{z(z^2 - 2z + 2)},$$

que tiene polos simples en $z = 0$ y en $z = 1 \pm i$; de estos dos últimos, tan sólo $z = 1 + i$ se sitúa en el semiplano superior. Por tanto, planteamos la integral

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z(z^2 - 2z + 2)} dz,$$

donde el contorno C es como se describe en la sección 5.2.3, con $R > \sqrt{2}$, pero indentado en el origen mediante una semicircunferencia C_r , de radio $0 < r < \sqrt{2}$ (fig. 8). Abreviando la notación de manera obvia y aplicando el teorema de los residuos (Teorema 4.11), encontramos que

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z(z^2 - 2z + 2)} dz = \left\{ \int_{C_R} + \int_{-R}^{-r} + \int_{-C_r} + \int_r^R \right\} \frac{e^{iz}}{z(z^2 - 2z + 2)} dz = 2\pi i \text{Res}(f(z)e^{iz}, 1 + i),$$

con

$$\int_{-C_r} = - \int_{C_r}.$$

Tomando límites en las expresiones precedentes cuando $R \rightarrow \infty$ y $r \rightarrow 0$, las Proposiciones 5.4 y 5.6 conducen a

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2 - 2x + 2)} dx = \pi i \operatorname{Res}(f(z)e^{iz}, 0) + 2\pi i \operatorname{Res}(f(z)e^{iz}, 1+i).$$

Ahora,

$$\operatorname{Res}(f(z)e^{iz}, 0) = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{Res}(f(z)e^{iz}, 1+i) = \frac{e^{-1+i}}{2i(1+i)} = \frac{e^{-1+i}(1-i)}{4i};$$

consiguientemente,

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2 - 2x + 2)} dx = \pi i \frac{1}{2} + 2\pi i \left[\frac{e^{-1+i}(1-i)}{4i} \right] = \frac{\pi i}{2} + \frac{\pi e^{-1+i}(1-i)}{2}. \quad (19)$$

Teniendo en cuenta que

$$e^{-1+i} = e^{-1}(\cos 1 + i \operatorname{sen} 1),$$

operando, e igualando las partes real e imaginaria en ambos miembros de (19), concluimos:

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x(x^2 - 2x + 2)} dx = \frac{\pi}{2e}(\operatorname{sen} 1 + \cos 1),$$

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x(x^2 - 2x + 2)} dx = \frac{\pi}{2e}(e + \operatorname{sen} 1 - \cos 1).$$

□

5.3 Integración a lo largo de un salto de rama

Examinaremos ahora integrales de la forma

$$\int_0^{\infty} f(x) dx$$

cuyo integrando es algebraico pero, tras ser convertido a una función compleja, presenta, además de polos, una singularidad no aislada en $z = 0$.

Ejemplo 5.8. *Evaluar*

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx.$$

Resolución. La integral propuesta es impropia por dos motivos: una discontinuidad infinita en $x = 0$, y un intervalo de integración infinito. Además, puesto que el integrando se comporta como $x^{-1/2}$ para $x \rightarrow 0$ y como $x^{-3/2}$ para $x \rightarrow \infty$, la integral converge.

Consideramos

$$\oint_C \frac{1}{z^{1/2}(z+1)} dz,$$

donde C es un contorno cerrado compuesto por cuatro tramos: C_r , C_R son arcos de circunferencia centrados en el origen de radios $r > 0$, $R > 0$, respectivamente, y \overline{AB} , \overline{ED} son segmentos rectilíneos horizontales y paralelos que bordean el salto de rama de la función $z^{1/2}$, desplazado ahora al semieje real positivo (fig. 9). El integrando $f(z)$ de

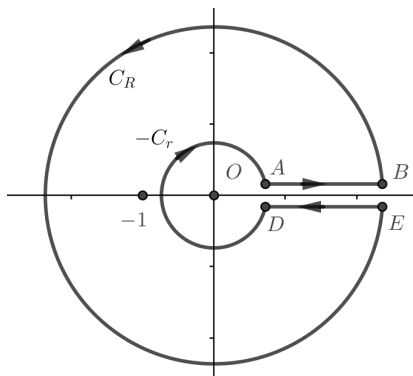


Figura 9. Ejemplo 5.8.

la integral de contorno es univaluada y analítico sobre y dentro de C , excepto por un polo simple en $z = -1 = e^{\pi i}$. Aplicando el teorema de los residuos (Teorema 4.11):

$$\oint_C \frac{1}{z^{1/2}(z+1)} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, -1),$$

o bien

$$\left\{ \int_{C_R} + \int_{\overline{ED}} - \int_{C_r} + \int_{\overline{AB}} \right\} \frac{1}{z^{1/2}(z+1)} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, -1).$$

Podemos suponer que \overline{AB} y \overline{ED} están en realidad sobre lados distintos del semieje real positivo: \overline{AB} en el superior, y \overline{ED} en el inferior. Sobre \overline{AB} , $z(x) = xe^{0i}$, y sobre \overline{ED} , $z(x) = xe^{2\pi i}$ ($r \leq x \leq R$). Así pues,

$$\int_{\overline{AB}} = \int_r^R \frac{1}{(xe^{0i})^{1/2}(xe^{0i}+1)} e^{0i} dx = \int_r^R \frac{1}{x^{1/2}(x+1)} dx$$

y

$$\int_{\overline{ED}} = \int_R^r \frac{1}{(xe^{2\pi i})^{1/2}(xe^{2\pi i}+1)} e^{2\pi i} dx = - \int_r^R \frac{1}{x^{1/2}(x+1)} dx = \int_r^R \frac{1}{x^{1/2}(x+1)} dx,$$

Tomando ahora $z(\theta) = re^{i\theta}$ y $z(\theta) = Re^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) sobre C_r y C_R , se puede demostrar, mediante un análisis similar a los efectuados en las Proposiciones 5.6 y 5.4, que las integrales a lo largo de estos contornos tienden a cero cuando $r \rightarrow 0$ y $R \rightarrow \infty$, respectivamente. En efecto, considerando una circunferencia genérica $C_\rho : z(\theta) = \rho e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) y aplicando el teorema *ML*, encontramos que

$$\left| \int_{C_\rho} \frac{1}{z^{1/2}(z+1)} dz \right| \leq \frac{1}{\rho^{1/2}|\rho-1|} 2\pi\rho = 2\pi \frac{\rho^{1/2}}{|\rho-1|},$$

con

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^{1/2}}{|\rho-1|} = \frac{\rho^{1/2}}{1-\rho} = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\rho^{1/2}}{|\rho-1|} = \frac{\rho^{1/2}}{\rho-1} = 0.$$

Se concluye que

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \left\{ \int_{C_R} + \int_{\overline{ED}} - \int_{C_r} + \int_{\overline{AB}} \right\} \frac{1}{z^{1/2}(z+1)} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, -1),$$

o bien

$$2 \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx = 2\pi i \operatorname{Res}(f, -1).$$

Finalmente,

$$\operatorname{Res}(f, -1) = \operatorname{Res}(f, e^{i\pi}) = e^{-i\pi/2} = -i,$$

así que

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx = \pi.$$

□

Para una generalización del Ejemplo 5.8, véase el Ejercicio 15.

6 Principio del argumento y teorema de Rouché

En esta sección aplicaremos la teoría de residuos a la localización de los ceros de una función analítica.

6.1 Principio del argumento

El primer resultado en esta dirección, conocido como principio del argumento, nos permite contar el número de los ceros y polos de una función meromorfa f que están rodeados por un contorno simple cerrado C . En este recuento se incluye el orden de multiplicidad de cada cero y cada polo.

Teorema 6.1 (Principio del argumento). *Sea C un contorno simple cerrado contenido en un dominio D . Supongamos que la función f es meromorfa en D , y que $f(z) \neq 0$ ($z \in C$). Entonces*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_0 - N_p,$$

donde N_0 es el número total de ceros de f dentro de C , y N_p es el número total de polos de f dentro de C . En la determinación de N_0 y N_p , tanto los ceros como los polos se cuentan según sus respectivas multiplicidades.

Demostración. El integrando f'/f es analítico dentro y sobre C , excepto en los puntos encerrados por C donde f tiene un cero o un polo. Si z_0 es un cero de orden n de f rodeado por C entonces, en virtud del Teorema 3.7, $f(z) = (z - z_0)^n \phi(z)$, donde ϕ es analítica en z_0 y $\phi(z_0) \neq 0$. Derivamos esta representación de f mediante la regla del producto,

$$f'(z) = (z - z_0)^n \phi'(z) + n(z - z_0)^{n-1} \phi(z),$$

y dividimos por f la expresión resultante. En algún disco pinchado en su centro z_0 , se tiene

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{(z - z_0)^n \phi'(z) + n(z - z_0)^{n-1} \phi(z)}{(z - z_0)^n \phi(z)} = \frac{\phi'(z)}{\phi(z)} + \frac{n}{z - z_0}.$$

Consecuentemente, el integrando f'/f tiene un polo simple en z_0 , y el residuo en este polo es

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, z_0\right) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \left[\frac{\phi'(z)}{\phi(z)} + \frac{n}{z - z_0} \right] = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[(z - z_0) \frac{\phi'(z)}{\phi(z)} + n \right] = 0 + n = n,$$

que es el orden del cero z_0 .

De otra parte, si z_p es un polo de orden m de f encerrado por C , podemos escribir $f(z) = (z - z_p)^{-m} \psi(z)$, donde ψ es analítica en z_p y $\psi(z_p) \neq 0$. Derivando ahora $f(z) = (z - z_p)^{-m} \psi(z)$, resulta

$$f'(z) = (z - z_p)^{-m} \psi'(z) - m(z - z_p)^{-m-1} \psi(z).$$

Luego, en algún entorno reducido de z_p ,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{(z - z_p)^{-m} \psi'(z) - m(z - z_p)^{-m-1} \psi(z)}{(z - z_p)^{-m} \psi(z)} = \frac{\psi'(z)}{\psi(z)} - \frac{m}{z - z_p}.$$

Se desprende que el integrando f'/f tiene un polo simple en z_p . Procediendo como anteriormente se demuestra que

$$\operatorname{Res} \left(\frac{f'}{f}, z_p \right) = -m,$$

el opuesto del orden del polo z_p de f .

Finalmente, supongamos que $z_{0_1}, z_{0_2}, \dots, z_{0_r}$ y $z_{p_1}, z_{p_2}, \dots, z_{p_s}$ son los ceros y polos de f encerrados por C , y supongamos también que los órdenes de estos ceros y polos son n_1, n_2, \dots, n_r y m_1, m_2, \dots, m_s , respectivamente. Entonces cada uno de esos puntos es un polo simple del integrando f'/f , con residuos respectivos n_1, n_2, \dots, n_r y $-m_1, -m_2, \dots, -m_s$. Del teorema de los residuos (Teorema 4.11) se concluye que

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= 2\pi i \left[\sum_{j=1}^r \operatorname{Res} \left(\frac{f'}{f}, z_{0_j} \right) + \sum_{k=1}^s \operatorname{Res} \left(\frac{f'}{f}, z_{p_k} \right) \right] \\ &= 2\pi i \left[\sum_{j=1}^r n_j + \sum_{k=1}^s (-m_k) \right] = 2\pi i (N_0 - N_p). \end{aligned}$$

Dividiendo por $2\pi i$ los extremos de esta cadena de igualdades, el teorema queda demostrado. \square

Ejemplo 6.2. Sea

$$f(z) = \frac{(z-1)(z-9)^4(z+i)^2}{(z^2-2z+2)^2(z-i)^6(z+6i)^7},$$

y sea $C : |z| = 2$. Calcular

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Resolución. Se advierte, por inspección, que los ceros del numerador de f encerrados por C son $z = 1$ (simple) y $z = -i$ (doble). Por tanto, el número de ceros de f rodeados por C es $N_0 = 1 + 2 = 3$. Similarmente, factorizando el polinomio $z^2 - 2z + 2$ en el denominador de f , encontramos que los polos de f rodeados por C son $z = 1 - i$ (doble), $z = 1 + i$ (doble), y $z = i$ (orden 6). El número de polos de f encerrados por C es entonces $N_p = 2 + 2 + 6 = 10$. Atendiendo al Teorema 6.1:

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 3 \cdot 2\pi i - 10 \cdot 2\pi i = (6 - 20)\pi i = -14\pi i.$$

\square



Figura 10. Eugène Rouché (1832-1910).

Observación 6.3. Las razones por las que el Teorema 6.1 recibe el nombre de «principio del argumento» son las siguientes. Si se puede definir un logaritmo analítico $\log[f(z)]$, esta función es una primitiva de $f'(z)/f(z)$, y así $2\pi i(N_0 - N_p)$ representa la variación del logaritmo de $f(z)$ cuando z recorre C . Como este número es imaginario puro, el cambio se produce, realmente, en $\Im \log[f(z)]$, esto es, en $\arg[f(z)]$. Así, $\arg[f(z)]$ varía en $2\pi(N_0 - N_p)$ cuando z recorre C .

6.2 Teorema de Rouché

Teorema 6.4 (Rouché). Sea C un contorno simple cerrado, enteramente contenido en el dominio D . Supóngase que f y g son analíticas en D . Si se da la desigualdad estricta

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \quad (z \in C), \quad (20)$$

entonces f y g tienen el mismo número de ceros (contados según sus multiplicidades) dentro de C .

Demostración. La hipótesis (20) garantiza que f y g no se anulan en el contorno C . Dividiendo (20) por $|f(z)|$ y poniendo $F(z) = g(z)/f(z)$ obtenemos

$$|F(z) - 1| < 1 \quad (z \in C).$$

Esta desigualdad muestra que la imagen C' de C mediante la aplicación $w = F(z)$ es un camino cerrado contenido en el disco $|w - 1| < 1$ del plano w . En particular, la curva C' no rodea a $w = 0$, así que $1/w$ es analítica dentro y sobre C' . Por el teorema de Cauchy-Goursat,

$$\int_{C'} \frac{1}{w} dw = 0,$$

o bien, deshaciendo el cambio de variable,

$$\oint_C \frac{F'(z)}{F(z)} dz = 0. \quad (21)$$

Al aplicar la regla de derivación de cocientes,

$$F'(z) = \frac{f(z)g'(z) - g(z)f'(z)}{f^2(z)},$$

resulta

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)},$$

expresión que, insertada en (21), conduce a

$$\oint_C \left[\frac{g'(z)}{g(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)} \right] dz = 0,$$

es decir,

$$\oint_C \frac{g'(z)}{g(z)} dz = \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Dado que f y g carecen de polos, se concluye del principio del argumento (Teorema 6.1) que ambas funciones tienen igual número de ceros rodeados por C . \square

Ejemplo 6.5. Demostrar que el polinomio $g(z) = z^9 - 8z^2 + 5$ tiene todos sus ceros en el anillo $1/2 < |z| < 3/2$, y que dos de ellos están en el subanillo $1/2 < |z| < 1$.

Resolución. Comenzamos eligiendo $f(z) = z^9$, ya que esta función tiene el mismo número de ceros que g . Como f tiene un cero de orden 9 en $z = 0$, continuamos examinando circunferencias centradas en este punto. Si logramos establecer que $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ para todo z de alguna circunferencia $|z| = R$, seguirá del teorema de Rouché (Teorema 6.4) que f y g tienen igual número de ceros en el disco $|z| < R$.

Por la desigualdad triangular,

$$|f(z) - g(z)| = |z^9 - (z^9 - 8z^2 + 5)| = |8z^2 - 5| \leq 8|z|^2 + 5.$$

De otra parte, $|f(z)| = |z|^9$. No es cierto que $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$, esto es, que $8|z|^2 + 5 < |z|^9$, para $|z| = 1$. Sin embargo,

$$\begin{aligned} |f(z) - g(z)| &\leq 8|z|^2 + 5 = 8\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 5 = 23 \\ &< 38.44 \approx \left(\frac{3}{2}\right)^9 = |f(z)| \quad \left(|z| = \frac{3}{2}\right). \end{aligned}$$

Puesto que f tiene un cero de orden 9 dentro del disco $|z| < 3/2$, todos los ceros de g están dentro del mismo disco.

Veamos ahora que g tiene algunos ceros dentro del disco unidad $|z| < 1$. A tal fin, elegimos $f(z) = -8z^2 + 5$. Entonces

$$|f(z) - g(z)| = |(-8z^2 + 5) - (z^9 - 8z^2 + 5)| = |-z^9| = |z|^9 = 1^9 = 1 \quad (|z| = 1).$$

Por otra parte,

$$|f(z)| = |-f(z)| = |8z^2 - 5| \geq |8|z|^2 - |-5|| = |8 - 5| = 3 \quad (|z| = 1).$$

Así pues,

$$|f(z) - g(z)| = 1 < 3 \leq |f(z)| \quad (|z| = 1).$$

Como f tiene sus dos ceros, $z = \pm\sqrt{5/8} \approx \pm 0.79$, en $|z| < 1$, el Teorema 6.4 asegura que dos de los ceros de g también caen en $|z| < 1$.

Sabiendo que dos de los ceros de g están en el disco unidad abierto, elegimos $f(z) = 5$ y $|z| = 1/2$. Entonces

$$\begin{aligned} |f(z) - g(z)| &= |5 - (z^9 - 8z^2 + 5)| = |-z^9 + 8z^2| \leq |z|^9 + 8|z|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^9 + \frac{8}{2^2} \approx 2.002 \\ &< 5 = |f(z)| \quad \left(|z| = \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Como f carece de ceros en el disco $|z| < 1/2$, lo mismo ocurre con g . Llegado este punto, podemos concluir que los nueve ceros de $g(z) = z^9 - 8z^2 + 5$ se encuentran en la región anular $1/2 < |z| < 3/2$, y que dos de ellos caen dentro del subanillo $1/2 < |z| < 1$. \square

7 Ejercicios resueltos

1. Desarrollar

$$f(z) = \frac{8z + 1}{z(1 - z)}$$

en una serie de Laurent válida para $0 < |z| < 1$.

Resolución. Descomponiendo f en fracciones simples encontramos que

$$f(z) = \frac{8z + 1}{z(1 - z)} = \frac{1}{z} + \frac{9}{1 - z}.$$

Por una parte,

$$\frac{9}{1 - z} = 9 \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Esta serie geométrica converge para $|z| < 1$, pero tras añadirle el término $1/z$ obtenemos una serie de Laurent

$$f(z) = \frac{1}{z} + 9 \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

convergente si $0 < |z| < 1$. \square

2. Desarrollar

$$f(z) = \frac{1}{z(z - 1)}$$

en una serie de Laurent válida para $1 < |z - 2| < 2$.

Resolución. Debemos encontrar dos series que contengan potencias enteras de $z - 2$: una, convergente si $1 < |z - 2|$, y la otra si $|z - 2| < 2$. Para conseguirlo, descomponemos f en fracciones simples:

$$f(z) = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z - 1} = f_1(z) + f_2(z).$$

Ahora,

$$f_1(z) = -\frac{1}{z} = -\frac{1}{2 + z - 2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{z - 2}{2}} = -\frac{1}{2} \left[1 - \frac{z - 2}{2} + \frac{(z - 2)^2}{2^2} - \frac{(z - 2)^3}{2^3} + \dots \right]$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{z-2}{2^2} - \frac{(z-2)^2}{2^3} + \frac{(z-2)^3}{2^4} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} (z-2)^n.$$

Esta serie converge para $|(z-2)/2| < 1$, ó $|z-2| < 2$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} f_2(z) &= \frac{1}{z-1} = \frac{1}{1+(z-2)} = \frac{1}{z-2} \frac{1}{1+\frac{1}{z-2}} = \frac{1}{z-2} \left[1 - \frac{1}{z-2} + \frac{1}{(z-2)^2} - \frac{1}{(z-2)^3} + \dots \right] \\ &= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{(z-2)^2} + \frac{1}{(z-2)^3} - \frac{1}{(z-2)^4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(z-2)^n} \end{aligned}$$

converge para $|1/(z-2)| < 1$, ó $1 < |z-2|$. Sustituyendo los desarrollos de f_1 y f_2 en la descomposición en fracciones simples de f encontramos que

$$\begin{aligned} f(z) &= \dots - \frac{1}{(z-2)^4} + \frac{1}{(z-2)^3} - \frac{1}{(z-2)^2} + \frac{1}{z-2} - \frac{1}{2} + \frac{z-2}{2^2} - \frac{(z-2)^2}{2^3} + \frac{(z-2)^3}{2^4} - \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} (z-2)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(z-2)^n}, \end{aligned}$$

representación que vale donde valen las dos que la componen, es decir, para $1 < |z-2| < 2$. □

3. Desarrollar

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}$$

en una serie de Laurent, válida si $0 < |z-3| < 2$. Clasificar la singularidad de $f(z)$ en $z=3$, y hallar $\text{Res}(f, 3)$.

Resolución. Para obtener potencias de $z-3$, escribimos $z-1 = 2 + (z-3)$ y sacamos factor común 2 en esta expresión:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)} = \frac{1}{z-3} [2 + (z-3)]^{-2} = \frac{1}{4(z-3)} \left[1 + \frac{z-3}{2} \right]^{-2}.$$

Si $a \in \mathbb{R}$, la serie binómica

$$(1+z)^a = 1 + \frac{a}{1!}z + \frac{a(a-1)}{2!}z^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}z^3 + \dots$$

converge para $|z| < 1$. Usando este desarrollo, escribimos:

$$f(z) = \frac{1}{4(z-3)} \left[1 + \frac{(-2)}{1!} \left(\frac{z-3}{2} \right) + \frac{(-2)(-3)}{2!} \left(\frac{z-3}{2} \right)^2 + \frac{(-2)(-3)(-4)}{3!} \left(\frac{z-3}{2} \right)^3 + \dots \right].$$

La serie binómica entre corchetes converge para $|(z-3)/2| < 1$, o bien $|z-3| < 2$. Al multiplicarla por $1/[4(z-3)]$ resulta una serie de Laurent válida para $0 < |z-3| < 2$:

$$f(z) = \frac{1}{4(z-3)} - \frac{1}{4} + \frac{3}{16}(z-3) - \frac{1}{8}(z-3)^2 + \dots$$

Como la parte principal de esta serie se trunca en el término de orden $n = -1$, la función $f(z)$ presenta un polo

simple en $z = 3$, con

$$\operatorname{Res}(f, 3) = \frac{1}{4}.$$

□

4. Encontrar el desarrollo en serie de Laurent de

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}$$

válido para $0 < |z-1| < 2$. Clasificar la singularidad de $f(z)$ en $z = 1$, y hallar $\operatorname{Res}(f, 1)$.

Resolución. Como sólo queremos potencias de $z-1$, necesitamos expresar $z-3$ en términos de $z-1$. A tal fin, escribimos

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)} = \frac{1}{(z-1)^2} \frac{1}{-2+(z-1)} = -\frac{1}{2(z-1)^2} \frac{1}{1-\frac{z-1}{2}}.$$

El segundo factor del último miembro es la suma de una serie geométrica de razón $(z-1)/2$, con lo cual

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{2(z-1)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-1)^k}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} (z-1)^{k-2} \\ &= -\frac{1}{2(z-1)^2} - \frac{1}{4(z-1)} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16}(z-1) - \dots \quad (0 < |z-1| < 2). \end{aligned}$$

La parte principal del desarrollo se trunca en el término de orden $n = -2$, de modo que $z = 1$ es un polo doble. El coeficiente del término de orden $n = -1$ es

$$\operatorname{Res}(f, 1) = -\frac{1}{4}.$$

□

5. Demostrar la Proposición 4.8 usando la regla de L'Hôpital.

Resolución. Por la Proposición 4.4, y ya que $h(z_0) = 0$ pero $h'(z_0) \neq 0$,

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} [(z-z_0)f(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z-z_0)g(z)}{h(z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) + (z-z_0)g'(z)}{h'(z)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}. \end{aligned}$$

□

6. Sea $f(z) = \frac{1}{z(z+1)(z-3)}$.

(i) Desarrollar f en una serie de Laurent válida para $1 < |z| < 3$.

(ii) Atendiendo al desarrollo obtenido, ¿se podría afirmar que $\operatorname{Res}(f, 0) = -1/12$? ¿Cuánto vale $\operatorname{Res}(f, 0)$ en realidad?

Resolución.

(i) Se tiene:

$$f(z) = \frac{1}{z(z+1)(z-3)} = \frac{1}{4z} \left(\frac{1}{z-3} - \frac{1}{z+1} \right).$$

Por una parte,

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^k = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{3^{k+1}} = -\frac{1}{3} - \frac{z}{9} - \frac{z^2}{27} - \dots \quad (|z| < 3).$$

Por otra,

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z} \frac{1}{1+\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{z}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z^{k+1}} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} - \dots \quad (1 < |z|).$$

Combinando ambos desarrollos:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z(z+1)(z-3)} = \frac{1}{4z} \left[-\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{3^{k+1}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z^{k+1}} \right] = -\frac{1}{4} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{3^{k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z^{k+2}} \right] \\ &= \dots - \frac{1}{4z^4} + \frac{1}{4z^3} - \frac{1}{4z^2} - \frac{1}{12z} - \frac{1}{36} - \frac{z}{108} - \dots \quad (1 < |z| < 3). \end{aligned}$$

(ii) El coeficiente de $1/z$ en el desarrollo anterior es $-1/12$. Sin embargo, no es posible afirmar que $\text{Res}(f, 0) = -1/12$. El residuo de $f(z)$ en $z = 0$ correspondería al coeficiente de $1/z$ en el desarrollo de Laurent válido en un entorno reducido de esta singularidad, mientras que el desarrollo obtenido vale para $1 < |z| < 3$. De hecho,

$$\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} [zf(z)] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(z+1)(z-3)} = -\frac{1}{3}.$$

Podemos verificarlo mediante el desarrollo adecuado. Como

$$\frac{1}{z+1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k = 1 - z + z^2 - \dots \quad (|z| < 1),$$

se cumple que

$$f(z) = \frac{1}{z(z+1)(z-3)} = \frac{1}{4z} \left[-\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{3^{k+1}} - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k \right] = -\frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{3^{k+1}} + (-1)^k \right] z^{k-1} \quad (0 < |z| < 1).$$

El coeficiente de $1/z$ en este nuevo desarrollo es, efectivamente,

$$\text{Res}(f, 0) = -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} + 1 \right) = -\frac{1}{3}.$$

□

7. Evaluar

$$\oint_C \frac{2z+6}{z^2+4} dz,$$

donde $C : |z-i| = 2$.

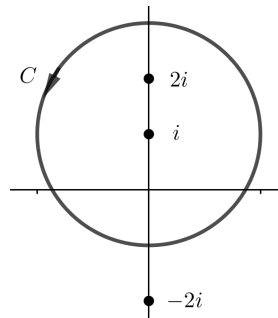


Figura 11. Ejercicio 7.

Resolución. Factorizando el denominador,

$$z^2 + 4 = (z - 2i)(z + 2i),$$

encontramos que el integrando tiene polos simples en $-2i$ y $2i$ (Teorema 3.10). Como solamente $z = 2i$ está encerrado por el contorno C (fig. 11), el teorema de los residuos (Teorema 4.11) implica que

$$\oint_C \frac{2z+6}{z^2+4} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 2i).$$

Pero (Proposición 4.4)

$$\operatorname{Res}(f, 2i) = \lim_{z \rightarrow 2i} \left[(z - 2i) \frac{2z+6}{(z-2i)(z+2i)} \right] = \frac{6+4i}{4i} = \frac{3+2i}{2i}.$$

Por consiguiente,

$$\oint_C \frac{2z+6}{z^2+4} dz = 2\pi i \frac{3+2i}{2i} = \pi(3+2i).$$

□

8. Evaluar

$$\oint_C \frac{e^z}{z^4 + 5z^3} dz,$$

siendo $C : |z| = 2$.

Resolución. Escribiendo el denominador en la forma $z^4 + 5z^3 = z^3(z+5)$ encontramos que el integrando $f(z)$ tiene un polo triple en $z = 0$ y un polo simple en $z = -5$, pero solamente $z = 0$ está dentro de C . Por el teorema de los residuos (Teorema 4.11) y la Proposición 4.5 con $n = 3$,

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{e^z}{z^4 + 5z^3} dz &= 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0) = 2\pi i \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^2}{dz^2} \left[z^3 \frac{e^z}{z^3(z+5)} \right] \\ &= \pi i \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(z^2 + 8z + 17) e^z}{(z+5)^3} = \frac{17\pi i}{125}. \end{aligned}$$

□

9. Evaluar

$$\oint_C \operatorname{tg} z \, dz,$$

donde $C : |z| = 2$.

Resolución. El integrando $f(z) = \operatorname{tg} z = \operatorname{sen} z / \cos z$ tiene polos simples en los ceros de $\cos z$. Sabemos que los únicos ceros de $\cos z$ son los reales: $z_n = (2n + 1)\pi/2$ ($n \in \mathbb{Z}$). Tomando $g(z) = \operatorname{sen} z$, $h(z) = \cos z$, y $h'(z) = -\operatorname{sen} z$ en la Proposición 4.8, resulta que

$$\operatorname{Res}(f, z_n) = \frac{\operatorname{sen} z_n}{-\operatorname{sen} z_n} = -1 \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Puesto que solamente $-\pi/2$ y $\pi/2$ están rodeados por $C : |z| = 2$, aplicando el Teorema 4.11 obtenemos

$$\oint_C \operatorname{tg} z \, dz = 2\pi i \left[\operatorname{Res}\left(f, -\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{Res}\left(f, \frac{\pi}{2}\right) \right] = 2\pi i(-1 - 1) = -4\pi i.$$

□

10. Evaluar

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta}.$$

Resolución. Procedemos como se explicó en la sección 5.1:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta} &= \int_{|z|=1} \frac{1}{2 + \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)} \frac{dz}{iz} = \int_{|z|=1} \frac{-2i}{z^2 + 4z + 1} dz \\ &= \int_{|z|=1} \frac{-2i}{(z + 2 + \sqrt{3})(z + 2 - \sqrt{3})} dz. \end{aligned}$$

El único polo simple del integrando encerrado por la circunferencia unidad es $z = -2 + \sqrt{3}$. Poniendo $g(z) = -2i$ y $h(z) = z^2 + 4z + 1$, la Proposición 4.8 y el Teorema 4.11 proporcionan:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta} = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{g}{h}, -2 + \sqrt{3}\right) = 2\pi i \frac{-2i}{2(-2 + \sqrt{3}) + 4} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

□

11. Hallar el valor principal de Cauchy de la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}.$$

Resolución. Sea $f(z) = 1/(z^4 + 1)$. Sabemos (Ejemplo 4.10) que los polos de f situados en el semiplano superior son $z_1 = e^{i\pi/4}$ y $z_2 = e^{i3\pi/4}$, y que los residuos de f en estos polos son

$$\operatorname{Res}(f, z_1) = -\frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}i \quad \text{y} \quad \operatorname{Res}(f, z_2) = \frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}i.$$

Integramos f alrededor del contorno C de la fig. 5, con $R > 1$, y aplicamos el Teorema 4.11 para obtener:

$$\int_{-R}^R \frac{dx}{x^4+1} + \int_{C_R} \frac{dz}{z^4+1} = \oint_C \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i [\text{Res}(f, z_1) + \text{Res}(f, z_2)] = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Como f satisface las condiciones de la Proposición 5.2 y su restricción al eje real es par, tomando límites cuando $R \rightarrow \infty$ en la expresión anterior concluimos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{dx}{x^4+1} + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{dz}{z^4+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

□

12. Supóngase que $f(z) = p(z)/q(z)$ es una función racional tal que el grado de $q(z)$ supera, al menos, en una unidad al grado de $p(z)$: $\text{grado}(q) \geq \text{grado}(p) + 1$. Si $C_R : z(\theta) = Re^{-i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) y $\alpha < 0$, entonces

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) e^{i\alpha z} dz = 0.$$

Resolución. El argumento utilizado en la demostración de la Proposición 5.2 muestra que

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R} \quad (|z| = R, R \text{ grande})$$

para algún $M > 0$. Además,

$$|e^{i\alpha z}| = |e^{i\alpha R(\cos\theta - i\text{sen}\theta)}| = e^{\alpha R \text{sen}\theta} \quad (z(\theta) = Re^{-i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi).$$

Por consiguiente, para R grande:

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} f(z) e^{i\alpha z} dz \right| &\leq \int_0^\pi |f(Re^{-i\theta})| e^{\alpha R \text{sen}\theta} | -iRe^{-i\theta} | d\theta \\ &\leq M \int_0^\pi e^{\alpha R \text{sen}\theta} d\theta = 2M \int_0^{\pi/2} e^{\alpha R \text{sen}\theta} d\theta. \end{aligned}$$

Teniendo presente que $\alpha < 0$ y aplicando la desigualdad de Jordan:

$$\text{sen}\theta \geq \frac{2\theta}{\pi} \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right),$$

resulta, finalmente:

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} f(z) e^{i\alpha z} dz \right| &\leq 2M \int_0^{\pi/2} e^{2\alpha R\theta/\pi} d\theta = \frac{2M}{2\alpha R/\pi} e^{2\alpha R\theta/\pi} \Big|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{M\pi}{\alpha R} (e^{\alpha R} - 1) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } R \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

□

13. Calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x^2 + 1} dx.$$

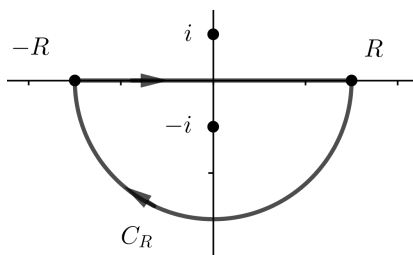


Figura 12. Ejercicio 13.

Resolución. Esta integral impropia es absolutamente convergente; por lo tanto, convergente, y puede ser calculada mediante valores principales.

Cambiamos la variable real por una compleja, ponemos $f(z) = 1/(z^2 + 1)$ e integramos $f(z)e^{-iz}$ a lo largo del contorno C , formado por el intervalo $[-R, R]$ más la semicircunferencia centrada en el origen y de radio $R > 0$, lo suficientemente grande como para encerrar al único polo del integrando situado en el semiplano inferior: $z = -i$, que es simple (fig. 12). Nótese que C se recorre con orientación negativa. Por el teorema de los residuos (Teorema 4.11) y la Proposición 4.8,

$$\int_{-R}^R \frac{e^{-ix}}{x^2 + 1} dx + \int_{C_R} \frac{e^{-iz}}{z^2 + 1} dz = \oint_C \frac{e^{-iz}}{z^2 + 1} dz = -2\pi i \operatorname{Res}(f(z)e^{-iz}, -i) = -2\pi i \left. \frac{e^{-iz}}{2z} \right|_{z=-i} = \frac{\pi}{e}.$$

Tomando límites para $R \rightarrow \infty$ y atendiendo al Ejercicio 12 ya obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{e}.$$

□

14. Evaluar

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx.$$

Resolución. Dado que el integrando es par, basta calcular el valor principal de Cauchy. A tal fin, planteamos la integral

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z} dz,$$

donde el contorno C está indentado en $z = 0$ (único polo, simple, de la función $f(z) = 1/z$), como en el Ejemplo 5.7; véase también la fig. 8. En la notación de dicho ejemplo, el teorema de Cauchy-Goursat asegura que

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z} dz = \left\{ \int_{C_R} + \int_{-R}^{-r} - \int_{C_r} + \int_r^R \right\} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0,$$

o bien

$$\left\{ \int_{-R}^{-r} + \int_r^R \right\} \frac{e^{ix}}{x} dx = \left\{ \int_{C_r} - \int_{C_R} \right\} \frac{e^{iz}}{z} dz.$$

Tomando límites en la expresión precedente cuando $R \rightarrow \infty$ y $r \rightarrow 0$, las Proposiciones 5.4 y 5.6 conducen a

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \pi i \operatorname{Res} \left(\frac{e^{iz}}{z}, 0 \right).$$

Por la Proposición 4.4,

$$\operatorname{Res} \left(\frac{e^{iz}}{z}, 0 \right) = \lim_{z \rightarrow 0} e^{iz} = 1,$$

así que

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \pi i.$$

Igualando las partes real e imaginaria del primer y segundo miembro de esta expresión encontramos que

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx = 0, \quad V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \pi,$$

y, de acuerdo con nuestra observación inicial, concluimos:

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

□

15. Calcular la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{-a}}{x+1} dx \quad (0 < a < 1).$$

Resolución. Fijado $0 < a < 1$, tomamos la rama de la función z^{-a} definida en $[0, 2\pi)$, es decir, situamos su salto de rama en el semieje real positivo, y consideramos el contorno C , construido como en el Ejemplo 5.8 (véase también la fig. 9). Definimos $f(z) = z^{-a}/(z+1)$; por lo demás, mantenemos la notación de dicho ejemplo.

Si $R > 1$ entonces C encierra al polo simple $z = -1$, y el teorema de los residuos (Teorema 4.11) junto con la Proposición 4.4 implican

$$\oint_C \frac{z^{-a}}{z+1} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, -1) = 2\pi i e^{-a\pi i}.$$

Luego,

$$\left\{ \int_{C_R} + \int_{AB} - \int_{C_r} + \int_{ED} \right\} \frac{z^{-a}}{z+1} dz = 2\pi i e^{-a\pi i}. \tag{22}$$

Probaremos ahora que las integrales sobre los contornos circulares se anulan cuando $R \rightarrow \infty$ y $r \rightarrow 0$. En efecto, para una circunferencia genérica $C_\rho : z(\theta) = \rho e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$), el teorema *ML* proporciona

$$\left| \int_{C_\rho} \frac{z^{-a}}{z+1} dz \right| \leq \frac{e^{-a \ln \rho}}{|\rho - 1|} 2\pi \rho = 2\pi \frac{\rho^{1-a}}{|\rho - 1|},$$

con

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^{1-a}}{|\rho - 1|} = \frac{\rho^{1-a}}{1 - \rho} = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\rho^{1-a}}{|\rho - 1|} = \frac{\rho^{1-a}}{\rho - 1} = 0.$$

Las integrales sobre los segmentos rectilíneos son:

$$\int_{AB} \frac{z^{-a}}{z+1} dz = \int_r^R \frac{x^{-a}}{x+1} dx,$$

$$\int_{ED} \frac{z^{-a}}{z+1} dz = - \int_r^R \frac{(xe^{2\pi i})^{-a}}{(xe^{2\pi i})+1} e^{2\pi i} dx = -e^{-2a\pi i} \int_r^R \frac{x^{-a}}{x+1} dx.$$

Combinando los resultados anteriores y tomando límites en (22) cuando $R \rightarrow \infty$ y $r \rightarrow 0$ simultáneamente,

$$(1 - e^{-2a\pi i}) \int_0^\infty \frac{x^{-a}}{x+1} dx = 2\pi i e^{-a\pi i},$$

y como $1 - e^{-2a\pi i} = 2ie^{-a\pi i} \text{sen } \pi a$, concluimos:

$$\int_0^\infty \frac{x^{-a}}{x+1} dx = \frac{\pi}{\text{sen } \pi a}.$$

Nótese que para $a = 1/2$ se recupera la solución obtenida en el Ejemplo 5.8. □

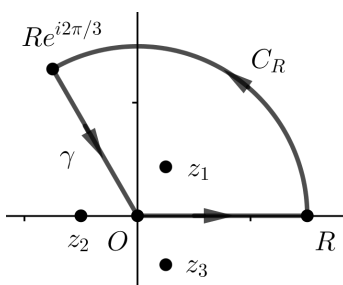


Figura 13. Ejercicio 16.

16. Evaluar

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1}.$$

Resolución. El integrando no es par (tampoco impar), por lo que no resulta útil integrar alrededor de un contorno simétrico con respecto al eje OY . Consideramos, en cambio, el contorno de la fig. 13, el cual se compone de tres tramos: el intervalo $[0, R]$ en el eje real, el arco C_R de la circunferencia centrada en el origen de coordenadas y radio $R > 1$ correspondiente al ángulo $\theta = 2\pi/3$, y el segmento γ que une el punto $Re^{i2\pi/3}$ con el origen. Los polos de la función $f(z) = 1/(z^3+1)$ son las tres raíces cúbicas de la unidad, a saber: $z_1 = e^{i\pi/3}$, $z_2 = -1$, $z_3 = e^{-i\pi/3}$; de ellos, tan sólo z_1 está encerrado por C . En virtud del Teorema 4.11 y de la Proposición 4.8,

$$\int_0^R \frac{dx}{x^3+1} + \left\{ \int_{C_R} + \int_\gamma \right\} \frac{dz}{z^3+1} = \oint_C \frac{dz}{z^3+1} = 2\pi i \text{Res}(f, e^{i\pi/3}) = 2\pi i \frac{1}{3z^2} \Big|_{z=e^{i\pi/3}} = \frac{2\pi i}{3e^{i2\pi/3}}. \tag{23}$$

Una parametrización de $-\gamma$ es $z(x) = xe^{i2\pi/3}$ ($0 \leq x \leq R$), así que

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^3+1} = - \int_0^R \frac{e^{i2\pi/3}}{(xe^{i2\pi/3})^3+1} dx = -e^{i2\pi/3} \int_0^R \frac{dx}{x^3+1}.$$

Insertando esta expresión en (23) resulta

$$(1 - e^{i2\pi/3}) \int_0^R \frac{dx}{x^3 + 1} + \int_{C_R} \frac{dz}{z^3 + 1} = \frac{2\pi i}{3e^{i2\pi/3}}. \tag{24}$$

Una aplicación del teorema *ML* muestra que

$$\left| \int_{C_R} \frac{dz}{z^3 + 1} \right| \leq \frac{1}{R^3 - 1} \frac{2\pi R}{3} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } R \rightarrow \infty,$$

con lo cual, tomando límites cuando $R \rightarrow \infty$ en (24), llegamos a

$$(1 - e^{i2\pi/3}) \int_0^\infty \frac{dx}{x^3 + 1} = \frac{2\pi i}{3e^{i2\pi/3}}.$$

De aquí,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^3 + 1} = \frac{2\pi i}{3e^{i2\pi/3}(1 - e^{i2\pi/3})} = \frac{2\pi i}{3} \frac{1}{e^{i2\pi/3} - e^{i4\pi/3}}.$$

Como

$$e^{i2\pi/3} - e^{i4\pi/3} = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = i\sqrt{3},$$

el valor de la integral de partida es, finalmente:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^3 + 1} = \frac{2\pi i}{3} \frac{1}{i\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

□

17. Hallar el valor principal de Cauchy de la integral

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\text{sen } x}{x^2 + i} dx.$$

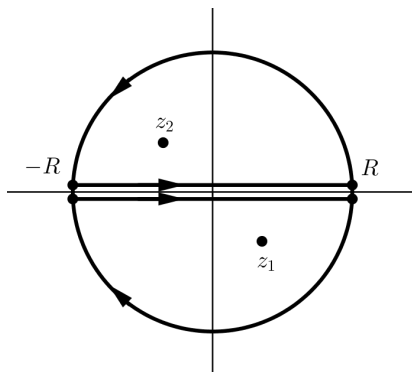


Figura 14. Ejercicio 17.

Resolución. En este caso no es posible aplicar el método descrito en la sección 5.2.3: puesto que el integrando es

complejo, no es cierto que la integral anterior coincida con la parte imaginaria de

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + i} dx.$$

Alternativamente, expresamos $\operatorname{sen} x$ en términos de exponenciales complejas:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2 + i} dx = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x^2 + i} dx = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + i} dx - \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x^2 + i} dx,$$

y ponemos $f(z) = 1/(z^2 + i)$, cuyos polos, simples, son $z_1 = e^{-i\pi/4}$ (semiplano inferior) y $z_2 = e^{i3\pi/4}$ (semiplano superior). Daremos a cada una de las dos últimas integrales un tratamiento diferenciado; la fig. 14 ilustra los tipos de contorno que se utilizarán.

En efecto, para tratar la primera de estas integrales, consideramos un contorno C como el de la fig. 5, con $R > 1$, que encierra a z_2 . Por el Teorema 4.11 y la Proposición 4.8,

$$\int_{-R}^R \frac{e^{ix}}{x^2 + i} dx + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + i} dz = \oint_C \frac{e^{iz}}{z^2 + i} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z)e^{iz}, z_2) = 2\pi i \frac{e^{iz_2}}{2z_2} = \pi i \frac{e^{iz_2}}{z_2}.$$

Tomando límites cuando $R \rightarrow \infty$, la Proposición 5.4 asegura que

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + i} dx = \pi i \frac{e^{iz_2}}{z_2}.$$

Para tratar la segunda integral, consideramos un contorno C como el de la fig. 12, con $R > 1$; obsérvese que ahora C está recorrido con orientación negativa, y encierra a z_1 . El Teorema 4.11, junto con la Proposición 4.8, el Ejercicio 12, y un nuevo paso al límite, proporcionan:

$$-V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x^2 + i} dx = \pi i \frac{e^{-iz_1}}{z_1}.$$

Como $z_2 = -z_1$ resulta, en definitiva,

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2 + i} dx = \frac{\pi i}{2i} \left(\frac{e^{iz_2}}{z_2} + \frac{e^{-iz_1}}{z_1} \right) = 0.$$

□

18. Si $0 < a < 1$, la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx$$

converge. Calcular su valor.

Resolución. La integral del enunciado no cae dentro de ninguno de los tipos estudiados, pero aun así es posible evaluarla mediante residuos eligiendo un contorno adecuado, que será el rectángulo C de la figura 15.

Parametrizamos los cuatro tramos de C y aplicamos el Teorema 4.11 más la Proposición 4.8, teniendo en cuenta

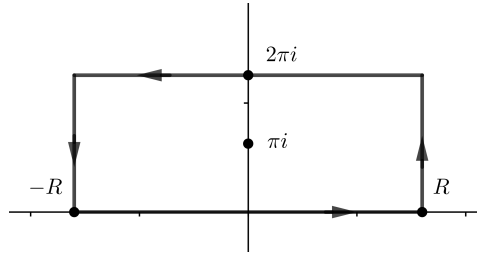


Figura 15. Ejercicio 18.

que la única singularidad de $f(z) = e^{az}/1 + e^z$ dentro de C es $z = \pi i$:

$$\oint_C \frac{e^{az}}{1 + e^z} dz = \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx + \int_0^{2\pi} \frac{e^{a(R+iy)}}{1 + e^{R+iy}} i dy + \int_R^{-R} \frac{e^{a(x+2\pi i)}}{1 + e^{x+2\pi i}} dx + \int_{2\pi}^0 \frac{e^{a(-R+iy)}}{1 + e^{-R+iy}} i dy$$

$$= 2\pi i \operatorname{Res}(f, \pi i) = -2\pi i e^{a\pi i}. \tag{25}$$

Las integrales sobre los lados verticales del rectángulo tienden a cero cuando $R \rightarrow \infty$. En efecto, acotando la segunda integral:

$$\left| \int_0^{2\pi} \frac{e^{a(R+iy)}}{1 + e^{R+iy}} i dy \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{e^{aR}}{|1 + e^{R+iy}|} dy \leq \int_0^{2\pi} \frac{e^{aR}}{e^R - 1} dy = 2\pi \frac{e^{aR}}{e^R - 1} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } R \rightarrow \infty,$$

ya que $0 < a < 1$. De manera análoga, se demuestra que la cuarta integral tiende a cero cuando $R \rightarrow \infty$. Así, por un paso al límite en (25) se obtiene

$$(1 - e^{2a\pi i}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx = -2\pi i e^{a\pi i},$$

de donde

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx = 2\pi i \frac{e^{a\pi i}}{e^{2a\pi i} - 1} = \pi \frac{2i}{e^{a\pi i} - e^{-a\pi i}} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi a}.$$

□

19. Mediante el teorema de Rouché, hallar el número de soluciones de las siguientes ecuaciones en los dominios que en cada caso se indican:

(i) $z^4 - 3z^3 - 1 = 0$, en $|z| < 2$;

(ii) $z^3 + z + 1 = 0$, en $|z| < 1/2$;

(iii) $4z^4 - 29z^2 + 25 = 0$, en $2 < |z| < 3$.

Resolución.

(i) Llamemos $g(z) = z^4 - 3z^3 - 1$ y elijamos $f(z) = -3z^3$. En $|z| = 2$ se verifica:

$$|f(z) - g(z)| = |z^4 - 1| \leq |z|^4 + 1 = 16 + 1 = 17,$$

$$|f(z)| = |-3z^3| = 3|z|^3 = 3 \cdot 2^3 = 24.$$

Por tanto, $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ en $|z| = 2$. Según el teorema de Rouché, $g(z)$ y $f(z) = -3z^3$ tienen el mismo número de raíces en $|z| < 2$, contando multiplicidades; es decir, 3 raíces.

(ii) Llamemos $g(z) = z^3 + z + 1$ y elijamos $f(z) = 1$. En $|z| = 1/2$ se verifica:

$$\begin{aligned} |f(z) - g(z)| &= |z^3 + z| \leq |z|^3 + |z| = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}, \\ |f(z)| &= 1. \end{aligned}$$

Por tanto, $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ en $|z| = 1/2$. Según el teorema de Rouché, $g(z)$ y $f(z) = 1$ tienen el mismo número de raíces en $|z| < 1/2$, contando multiplicidades; es decir, ninguna.

(iii) Llamemos $g(z) = 4z^4 - 29z^2 + 25$. Aplicando el teorema de Rouché para $|z| = 3$, con $f(z) = 4z^4$, se obtiene que $g(z)$ tiene 4 raíces en $|z| < 3$. En efecto, si $|z| = 3$:

$$\begin{aligned} |f(z) - g(z)| &= |29z^2 - 25| \leq 29|z|^2 + 25 = 29 \cdot 9 + 25 = 286, \\ |f(z)| &= |4z^4| = 4|z|^4 = 4 \cdot 81 = 324. \end{aligned}$$

Por tanto, $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ en $|z| = 3$. Según el teorema de Rouché, $g(z)$ y $f(z) = 4z^4$ tienen el mismo número de raíces en $|z| < 3$, contando multiplicidades; es decir, 4 raíces.

Si ahora aplicamos el teorema de Rouché para $|z| = 2$, con $f(z) = -29z^2$, se obtiene que $g(z)$ tiene 2 raíces en $|z| < 2$. En efecto, si $|z| = 2$:

$$\begin{aligned} |f(z) - g(z)| &= |4z^4 + 25| \leq 4|z|^4 + 25 = 4 \cdot 16 + 25 = 89, \\ |f(z)| &= |-29z^2| = 29|z|^2 = 29 \cdot 4 = 116. \end{aligned}$$

Por tanto, $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ en $|z| = 2$. Según el teorema de Rouché, $g(z)$ y $f(z) = -29z^2$ tienen el mismo número de raíces en $|z| < 2$, contando multiplicidades; es decir, 2 raíces.

Se concluye que el número de raíces de $g(z)$ en el anillo $2 < |z| < 3$ es de $4 - 2 = 2$ raíces, contando multiplicidades.

□

20. Aplicar el teorema de Rouché para demostrar el teorema fundamental del álgebra: todo polinomio de grado $n > 0$ con coeficientes complejos tiene exactamente n raíces en \mathbb{C} .

Resolución. Sea $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$, con $a_k \in \mathbb{C}$ ($k = 0, \dots, n-1$), y pongamos $f(z) = z^n$. Elegimos $R > \max\{1, n|a_{n-1}|, \dots, n|a_1|, n|a_0|\}$. Si $|z| = R$, entonces

$$\begin{aligned} |p(z) - f(z)| &= |a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0| \leq |a_{n-1}||z|^{n-1} + \dots + |a_1||z| + |a_0| \\ &< \frac{R}{n}(R^{n-1} + \dots + R + 1) \leq \frac{R}{n}nR^{n-1} = R^n = |z|^n = |f(z)|. \end{aligned}$$

Por el teorema de Rouché, $p(z)$ y $f(z)$ tienen el mismo número de ceros (contando multiplicidades) en $|z| < R$, es decir, n ceros. Como R puede ser arbitrariamente grande, se concluye que $p(z)$ tiene exactamente n ceros en \mathbb{C} . □