Clases de operadores I

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1. Introducción

En lo que sigue, y salvo indicación expresa en contra, H denotará un espacio de Hilbert no trivial. Nuestro objetivo será estudiar diversos tipos de operadores lineales continuos de H en sí mismo. En particular, I representará el operador identidad, O el operador nulo, y λI un operador escalar. Continuaremos denotando por T^* el adjunto del operador lineal continuo T.

1.1. Clases de operadores

Algunos tipos especiales de operadores objeto de este capítulo se definen usando el adjunto mediante las condiciones siguientes:

- *operador isométrico*: $T^*T = I$.
- *operador unitario*: $T^*T = TT^* = I$.
- *operador autoadjunto*: $T^* = T$.
- *operador normal*: $T^*T = TT^*$.
- *proyector*, *operador proyección* o, simplemente, *proyección*: $T^* = T$ y $T^2 = T$.

Consideraremos también otros tipos de operadores: *positivos*, *de rango finito*, *compactos*, *de Hilbert-Schmidt* y *traza*.

La Figura 1 muestra las relaciones de inclusión entre todos ellos.

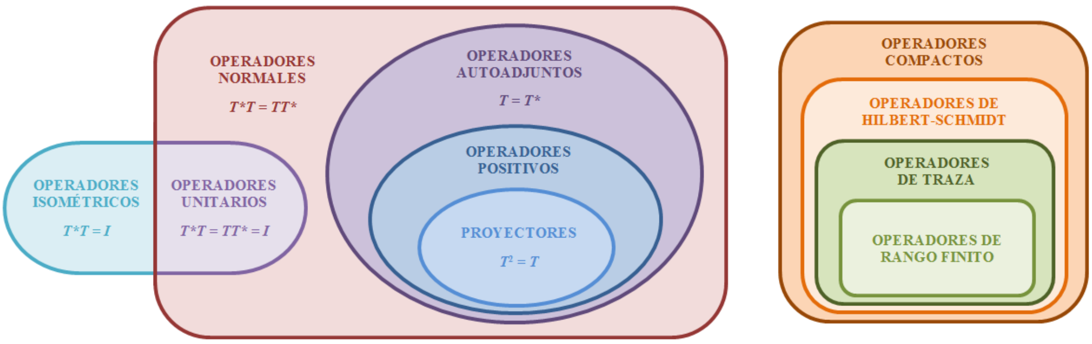

Figura 1. Relaciones de inclusión entre las clases de operadores consideradas.

En el tema actual nos ocuparemos de los operadores isométricos, unitarios, autoadjuntos, normales y positivos. El resto de clases será abordado en el siguiente tema.

Los términos «autoadjunta», «unitaria», «normal» se usan también en referencia a matrices. Comenzamos explicando la razón para ello y mencionando algunas relaciones importantes.

1.2. Matrices

Consideramos $\mathbb{C}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ con el producto interior definido mediante

$$\langle x, y\rangle = x^\top \overline{y} \tag{1}$$

donde x, y se escriben como vectores columna y $\top$ denota transposición, de modo que $x^\top = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, y la multiplicación es la usual de matrices.

Sea $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ un operador lineal (que automáticamente estará acotado). Dada una base de $\mathbb{C}^n$, podemos representar T y su adjunto T^* mediante dos matrices cuadradas de orden n, digamos A y B, respectivamente. Usando (1) y la regla habitual para la transposición del producto de matrices, obtenemos

$$\langle Tx, y\rangle = (Ax)^\top \overline{y} = x^\top A^\top \overline{y},$$

$$\langle x, T^* y\rangle = x^\top \overline{B}\overline{y}.$$

La definición de adjunto muestra que los segundos miembros de las expresiones anteriores coinciden cualesquiera sean $x, y \in \mathbb{C}^n$, por lo que debemos tener $A^\top = \overline{B}$. Hemos probado:

Dada una base de $\mathbb{C}^n$ y un operador lineal sobre $\mathbb{C}^n$, representado por una cierta matriz, su adjunto viene representado por la compleja conjugada transpuesta de esa matriz.

Consecuentemente, las matrices representantes son:

- *unitarias* si T es unitario,
- *hermitianas* si T es autoadjunto (hermitiano),
- *normal* si T es normal.

Similarmente, una matriz representante de un operador lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es:

- *ortogonal* si T es unitario,
- *real simétrica* si T es autoadjunto.

Recordemos la terminología para matrices: una matriz cuadrada $A = (\alpha_{jk})$ se dice:

- *unitaria* si $\overline{A}^{\top} = A^{-1}$,
- *hermitiana* si $\overline{A}^{\top} = A$ (esto es, $\overline{\alpha}_{kj} = \alpha_{jk}$),
- *anti-hermitiana* si $\overline{A}^{\top} = -A$ (esto es, $\overline{\alpha}_{kj} = -\alpha_{jk}$),
- *normal* si $A\overline{A}^{\top} = \overline{A}^{\top}A$.

Una matriz cuadrada real $A = (\alpha_{jk})$ se dice:

- *ortogonal* si $A^{\top} = A^{-1}$,
- *real simétrica* si $A^{\top} = A$ (esto es, $\alpha_{kj} = \alpha_{jk}$),
- *real anti-simétrica* si $A^{\top} = -A$ (esto es, $\alpha_{kj} = -\alpha_{jk}$).

Por tanto, una matriz real unitaria es una matriz ortogonal; una matriz hermitiana real es una matriz real simétrica; y una matriz real anti-hermitiana es una matriz real anti-simétrica.

2. Preliminares

El siguiente resultado es bien conocido.

Proposición 2.1 *El núcleo $\mathcal{N}(T)$ de un operador lineal continuo T es un subespacio cerrado de H.*

Proposición 2.2 *Si M es un subconjunto total de H y S, T son operadores lineales continuos tales que $Sx = Tx$ para todo $x \in M$, entonces $S = T$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $N = \mathcal{N}(S-T)$. Por hipótesis, $M \subset N$. Como M es total, también lo es N, de donde $N^{\perp} = \{0\}$. Entonces $N = N^{\perp\perp} = \{0\}^{\perp} = H$; esto es, $S - T = O$. □

Proposición 2.3 *Si S, T son operadores lineales que verifican $\langle Sx, x\rangle = \langle Tx, x\rangle$ $(x \in H)$, entonces $S = T$.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos las formas sesquilineales φ y ψ definidas por las fórmulas $\varphi(x,y) = \langle Sx, y\rangle$, $\psi(x,y) = \langle Tx, y\rangle$ $(x, y \in H)$. Por hipótesis, $\varphi(x,x) = \psi(x,x)$ $(x \in H)$, de donde $\varphi = \psi$. Consecuentemente, $\langle Sx, y\rangle = \langle Tx, y\rangle$ $(x, y \in H)$, obligando a que $Sx = Tx$ $(x \in H)$. □

El resultado siguiente constituye una fuente muy útil de ejemplos de operadores. El operador que en él se define recibe el nombre de *operador multiplicación*.

Supongamos que H es un espacio de Hilbert clásico (esto es, que la dimensión ortogonal de H es numerable), y sea $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ una base ortonormal de H. Así, todo $x \in H$ admite una representación única $x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$, donde $\lambda_k = \langle x, x_k \rangle$ $(k \in \mathbb{N})$, con $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 < \infty$.

Proposición 2.4 *En las condiciones anteriores, sea $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión acotada de números complejos, y sea $C = \sup\{|\mu_k| : k \in \mathbb{N}\}$. Existe un único operador lineal continuo T sobre H tal que*

(i) $Tx_k = \mu_k x_k$ $(k \in \mathbb{N})$.

Además:

(ii) $T(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \mu_k x_k$.

(iii) $\|T\| = C$.

(iv) $T^* x_k = \overline{\mu}_k x_k$ $(k \in \mathbb{N})$.

(v) $T^*(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\mu}_k \lambda_k x_k$.

(vi) $T^*T = TT^*$ *(es decir, T es normal).*

DEMOSTRACIÓN. Dado $x \in H$, $x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$, el problema estriba en definir Tx. Ya que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k \mu_k|^2 \leq C^2 \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 = C^2 \|x\|^2,$$

el teorema de Riesz-Fischer permite escribir $Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \mu_k x_k$. La linealidad del operador T así definido resulta aparente. Como $\|Tx\|^2 \leq C^2 \|x\|^2$ $(x \in H)$, T es continuo, con $\|T\| \leq C$. Evidentemente, $Tx_k = \mu_k x_k$ $(k \in \mathbb{N})$; puesto que $\|x_k\| = 1$, $\|T\| \geq \|Tx_k\| = \|\mu_k x_k\| = |\mu_k|$ $(k \in \mathbb{N})$, de donde $\|T\| \geq C$. Esto establece (i)-(iii).

Para probar (iv)-(v), supongamos que $x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$, y que $T^* x = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k x_k$; la cuestión ahora es mostrar que $\nu_k = \overline{\mu}_k \lambda_k$. Pero $\nu_k = \langle T^* x, x_k \rangle = \langle x, Tx_k \rangle = \langle x, \mu_k x_k \rangle = \overline{\mu}_k \langle x, x_k \rangle = \overline{\mu}_k \lambda_k$ $(k \in \mathbb{N})$.

Claramente, $T^* T x_k = |\mu_k|^2 x_k = TT^* x_k$ $(k \in \mathbb{N})$; como el conjunto $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ es total, se desprende de la Proposición 2.2 que $T^*T = TT^*$. Esto demuestra (vi).

Por último, para probar la unicidad, sea S cualquier operador lineal acotado sobre H verificando $Sx_k = \mu_k x_k$ $(k \in \mathbb{N})$. Entonces $Sx_k = Tx_k$ $(k \in \mathbb{N})$. Apelando de nuevo al carácter total del conjunto $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ y a la Proposición 2.2, se concluye que $S = T$. $\square$

3. Operadores isométricos

Recordemos la definición de esta clase de operadores.

Definición 3.1 *Se dice que el operador lineal $T : H \to H$ es* isométrico*, o que es una* isometría*, cuando $\|Tx\| = \|x\|$ $(x \in H)$.*

Si T es isométrico, de la relación $\|Tx - Ty\| = \|x - y\|$ $(x, y \in H)$ se infiere que T es inyectivo.

También es claro que toda isometría T es continua, con $\|T\| = 1$.

Proposición 3.2 *Dado un operador lineal acotado T, son equivalentes:*

(i) *T es isométrico.*

(ii) *$T^*T = I$.*

(iii) *$\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$ $(x, y \in H)$.*

DEMOSTRACIÓN. Como $\|Tx\| = \|x\|$ $(x \in H)$, encontramos que

$$\langle T^*Tx, x \rangle = \langle Tx, Tx \rangle = \|Tx\|^2 = \|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \langle Ix, x \rangle \quad (x \in H).$$

En virtud de la Proposición 2.3, (i) implica (ii).

Que (ii) implica (iii) es inmediato: $\langle Tx, Ty \rangle = \langle T^*Tx, y \rangle = \langle Ix, y \rangle = \langle x, y \rangle$ $(x, y \in H)$.

Finalmente, (iii) implica (i), ya que $\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$ $(x \in H)$. □

Proposición 3.3 *El recorrido $\mathscr{R}(T)$ de un operador isométrico T es un subespacio cerrado de H.*

DEMOSTRACIÓN. Como T es lineal, $\mathscr{R}(T)$ es un subespacio. Supongamos que $y \in \overline{\mathscr{R}(T)}$, y probemos que $y \in \mathscr{R}(T)$. A tal fin, sea $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente a y en H, donde $y_n = Tx_n$ y $x_n \in H$ $(n \in \mathbb{N})$. Como $\|x_n - x_m\| = \|Tx_n - Tx_m\| = \|y_n - y_m\| \to 0$ para $n, m \to \infty$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en H. Al ser H completo, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a algún $x \in H$. La continuidad de T y la unicidad del límite permiten concluir que $y = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx$. □

Ejemplo 3.4 *Sea H un espacio de Hilbert clásico, y sea $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ una base ortonormal de H. Existe un único operador lineal continuo T tal que $Tx_k = x_{k+1}$ $(k \in \mathbb{N})$. En efecto, todo $x \in H$ admite una única representación* *en la forma* $x=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k x_k$, *y basta definir* $Tx=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k x_{k+1}$. *Evidentemente* T *es lineal, y la igualdad* $\|Tx\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^2 = \|x\|^2$ *muestra que* T *es isométrico. Nos referiremos a* T *como el* operador desplazamiento a la derecha.

El operador adjunto T^* *actúa de la forma siguiente:* $T^*x_1 = 0$, *y* $T^*x_k = x_{k-1}$ $(k\in\mathbb{N},\ k\geq 2)$. *En efecto,* $\langle T^*x_1,x_j\rangle = \langle x_1,Tx_j\rangle = \langle x_1,x_{j+1}\rangle = 0 = \langle 0,x_j\rangle$ $(j\in\mathbb{N})$. *Similarmente, si* $k\geq 2$, $\langle T^*x_k,x_j\rangle = \langle x_k,x_{j+1}\rangle = 1$ *cuando* $j=k-1$, *mientras que* $\langle T^*x_k,x_j\rangle = \langle x_k,x_{j+1}\rangle = 0$ *en otro caso; por lo tanto,* $\langle T^*x_k,x_j\rangle = \langle x_{k-1},x_j\rangle$ $(j\in\mathbb{N})$. *Nos referiremos a* T^* *como el* operador desplazamiento a la izquierda.

4. Operadores unitarios

Definición 4.1 *Se dice que un operador lineal acotado* $T: H\to H$ *es* unitario *si* $T^*T = TT^* = I$.

Proposición 4.2 *Las siguientes condiciones relativas a un operador lineal acotado* T *son equivalentes:*

(i) T *es unitario.*

(ii) T^* *es unitario.*

(iii) T *y* T^* *son isométricos.*

(iv) T *es isométrico y* T^* *es inyectivo.*

(v) T *es isométrico y suprayectivo.*

(vi) T *es biyectivo, y* $T^{-1} = T^*$.

DEMOSTRACIÓN. La equivalencia entre (i), (ii) y (iii) es evidente en virtud de las definiciones, la Proposición 3.2 y la relación $T^{**} = T$.

Los operadores isométricos son inyectivos; por tanto, (iii) implica (iv).

Además, (iv) implica (v). En efecto, al ser T isométrico, $\mathscr{R}(T)$ es un subespacio cerrado de H (Proposición 3.3), y como T^* es inyectivo encontramos que $H=\{0\}^\perp = \mathscr{N}(T^*)^\perp = \overline{\mathscr{R}(T)} = \mathscr{R}(T)$.

Para ver que (v) implica (vi), observamos en primer lugar que, por hipótesis, T es biyectivo. Sea $S=T^{-1}$; entonces $ST=TS=I$. Ahora, por la Proposición 3.2, $T^* = T^*I = T^*(TS) = (T^*T)S = IS = S$.

Finalmente, es claro que (vi) implica (i). $\square$

Observación 4.3 *La Proposición 4.2 permanece válida si la condición «ser isométrico» se reemplaza por «preservar el producto escalar».*

Ejemplo 4.4 *Sea H un espacio de Hilbert clásico, y sea $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ una base ortonormal de H. Definamos $y_k = x_{2k+1}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$, $y_{-k} = x_{2k}$ $(k \in \mathbb{N})$. Entonces $\{y_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es también una base ortonormal. Todo vector $x \in H$ admite una única representación en la forma $x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k y_k$, y existe un único operador lineal continuo U tal que $Uy_k = y_{k+1}$ $(k \in \mathbb{Z})$, a saber, $Ux = U\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k y_k\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k y_{k+1}$. Se sigue que $U^* y_k = y_{k-1}$ $(k \in \mathbb{Z})$. Como $U^*Uy_k = UU^*y_k = y_k = Iy_k$ $(k \in \mathbb{Z})$, U es unitario. Nos referiremos a U como el* operador desplazamiento bilateral.

5. Operadores autoadjuntos

Definición 5.1 *Se dice que un operador lineal acotado $T : H \to H$ es* autoadjunto *(también,* hermitiano *o* hermítico*) si $T^* = T$.*

Proposición 5.2 *Los siguientes enunciados relativos a un operador lineal acotado T son equivalentes:*

(i) *T es autoadjunto.*

(ii) $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ $(x, y \in H)$.

(iii) $\langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle$ $(x \in H)$.

(iv) $\langle Tx, x\rangle$ $(x \in H)$ *es real.*

DEMOSTRACIÓN. Para ver que (i) implica (ii), basta escribir $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ $(x, y \in H)$.

Que (ii) implica (iii) es trivial.

Por otra parte, si vale (iii) entonces $\overline{\langle Tx, x\rangle} = \langle x, Tx\rangle = \langle Tx, x\rangle$ $(x \in H)$, de modo que se verifica (iv).

Finalmente, (iv) entraña $\langle Tx, x\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle} = \langle x, Tx\rangle = \langle T^*x, x\rangle$ $(x \in H)$, y la Proposición 2.3 conduce a (i).

Esto completa la demostración. $\square$

El siguiente resultado se deduce inmediatamente de las propiedades de los adjuntos.

Proposición 5.3 *Sean S, T operadores lineales continuos.*

(i) *Si S y T son autoadjuntos, también lo es $S + T$.*

(ii) *Si T es autoadjunto y α es real, entonces αT es autoadjunto.*

(iii) *Los operadores T^*T y $T + T^*$ son autoadjuntos.*

(iv) *Suponiendo S, T autoadjuntos, se tiene que ST es autoadjunto si, y sólo si, $ST = TS$.*

La descomposición de un número complejo λ en la forma $\lambda = \alpha + i\beta$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, admite una generalización a operadores:

Proposición 5.4 (Forma cartesiana) *Dado cualquier operador lineal acotado T, existen operadores autoadjuntos A y B tales que $T = A + iB$. Necesariamente,*

$$A = \frac{1}{2}(T + T^*), \quad B = \frac{1}{2i}(T - T^*).$$

DEMOSTRACIÓN. Definiendo A y B por las expresiones anteriores, es evidente que ambos operadores son autoadjuntos y que $T = A + iB$. Supongamos que también se tiene $T = C + iD$, con C, D autoadjuntos. Entonces $T^* = C^* - iD^* = C - iD$, de donde $T + T^* = 2C$ y $T - T^* = 2iD$; por tanto, $C = A$ y $D = B$. □

Proposición 5.5 *Si T es un operador autoadjunto,*

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : \|x\| \leq 1\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Pongamos $\varphi(x,y) = \langle Tx, y\rangle$ $(x, y \in H)$. Nótese que φ es una forma sesquilineal acotada, con $\|\varphi\| = \|T\|$. Puesto que $\varphi(y,x) = \langle Ty, x\rangle = \langle y, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, y\rangle} = \overline{\varphi(x,y)}$ $(x, y \in H)$ encontramos que φ es también hermítica, así que

$$\|T\| = \|\varphi\| = \sup\{|\varphi(x,x)| : \|x\| \leq 1\} = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : \|x\| \leq 1\},$$

como se afirmaba. □

6. Operadores normales

Definición 6.1 *Un operador lineal acotado $T : H \to H$ se llama* normal *cuando $T^*T = TT^*$.*

Todo operador unitario es normal. Similarmente, todo operador autoadjunto es normal. Un operador isométrico es normal si, y sólo si, es unitario.

Proposición 6.2 *Las siguientes condiciones relativas a un operador lineal acotado T son equivalentes:*

(i) T es normal.

(ii) T^* *es normal.*

(iii) $\|T^*x\| = \|Tx\|$ $(x \in H)$.

DEMOSTRACIÓN. La equivalencia entre (i) y (ii) resulta de ser $T^{**} = T$.

Para ver que (i) implica (iii), suponiendo que T es normal, escribimos: $\|T^*x\|^2 = \langle T^*x, T^*x\rangle = \langle TT^*x, x\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \|Tx\|^2$ $(x \in H)$.

Finalmente, si se verifica (iii) entonces $\langle T^*Tx, x\rangle = \|Tx\|^2 = \|T^*x\|^2 = \langle TT^*x, x\rangle$ $(x \in H)$, y la Proposición 2.3 muestra que se cumple (i). □

Proposición 6.3 *Sea T un operador normal. Se verifica:*

(i) $\mathscr{N}(T) = \mathscr{N}(T^*)$.

(ii) $\mathscr{R}(T)$ *es denso en H si, y sólo si, T es inyectivo.*

DEMOSTRACIÓN. El aserto (i) es consecuencia inmediata de la igualdad $\|T^*x\| = \|Tx\|$, válida para todo $x \in H$ (Proposición 6.2). Puesto que $\mathscr{R}(T)^\perp = \mathscr{N}(T^*)$, (i) implica (ii). □

Proposición 6.4 *Sea $T = A + iB$ la forma cartesiana del operador lineal acotado T. Entonces T es normal si, y sólo si, $AB = BA$.*

DEMOSTRACIÓN. Suponiendo que T es normal, de las fórmulas de la Proposición 5.4 se deduce inmediatamente que $AB = BA$.

Recíprocamente, si $AB = BA$ entonces, como $T^* = A - iB$, encontramos que $T^*T = TT^* = AA + BB$. □

7. Operadores positivos

Si T es autoadjunto, $\langle Tx, x\rangle$ es real para cada $x \in H$ (Proposición 5.2). Por tanto, en la clase de todos los operadores autoadjuntos sobre H podemos introducir un orden parcial «$\leq$» de la siguiente manera: $S \leq T$ siempre que $\langle Sx, x\rangle \leq \langle Tx, x\rangle$ $(x \in H)$. En vez de $S \leq T$ también escribiremos $T \geq S$.

Un caso particular importante es el siguiente.

Definición 7.1 *Un operador autoadjunto se dirá* positivo *(simbólicamente: $T \geq O$, o bien $O \leq T$), si $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ $(x \in H)$.*

Observación 7.2 *Nótese que:*

(i) $S \leq T$ *si, y sólo si,* $O \leq T - S$.

(ii) *Para cualquier operador lineal acotado* T *se tiene que* $T^*T \geq O$, *pues* $\langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \|Tx\|^2 \geq 0$ $(x \in H)$. *Similarmente,* $TT^* \geq O$. *En particular, si* T *es autoadjunto entonces* $T^2 \geq O$.

Dedicaremos las dos siguientes subsecciones al estudio de los operadores positivos y sus raíces cuadradas, respectivamente.

7.1. Operadores positivos

De la definición es obvio que la suma de operadores positivos es positiva. Ya sabemos que el producto de operadores autoadjuntos es autoadjunto si, y sólo si, los factores conmutan (Proposición 5.3). Veremos ahora que en caso de que, además, ambos factores sean positivos, el producto también lo es.

Teorema 7.3 *Si dos operadores* S, T *son positivos y conmutan* $(ST = TS)$, *entonces su producto* ST *es positivo.*

DEMOSTRACIÓN. Debemos probar que $\langle STx, x\rangle \geq 0$ $(x \in H)$. Cuando $S = O$, esto se verifica trivialmente. Supongamos $S \neq O$ y consideremos

$$S_1 = \frac{1}{\|S\|}S, \quad S_{n+1} = S_n - S_n^2 \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{2}$$

Vamos a demostrar por inducción que

$$O \leq S_n \leq I. \tag{3}$$

Para $n = 1$ se verifica (3). En efecto, la hipótesis $O \leq S$ implica $O \leq S_1$, y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la definición de $\|S\|$ encontramos que

$$\langle S_1x, x\rangle = \frac{1}{\|S\|}\langle Sx, x\rangle \leq \frac{1}{\|S\|}\|Sx\|\|x\| \leq \|x\|^2 = \langle Ix, x\rangle \quad (x \in H).$$

Supongamos cierto (3) para $n = k$, esto es, $O \leq S_k \leq I$, de modo que $O \leq I - S_k \leq I$. Como S_k es autoadjunto (Proposición 5.3), para cada $x \in H$ e $y = S_kx$ obtenemos

$$\langle S_k^2(I - S_k)x, x\rangle = \langle (I - S_k)S_kx, S_kx\rangle = \langle (I - S_k)y, y\rangle \geq 0.$$

Por definición, esto muestra que

$$S_k^2(I-S_k) \geq O.$$

Similarmente,

$$S_k(I-S_k)^2 \geq O.$$

Sumando y simplificando,

$$O \leq S_k^2(I-S_k) + S_k(I-S_k)^2 = S_k - S_k^2 = S_{k+1}.$$

Por tanto, $O \leq S_{k+1}$. Ahora, $S_{k+1} \leq I$ sigue de $S_k^2 \geq O$ e $I - S_k \geq O$, por adición:

$$O \leq I - S_k + S_k^2 = I - S_{k+1}.$$

Queda así completo el proceso de inducción que prueba (3).

A continuación estableceremos que $\langle STx, x\rangle \geq 0$ $(x \in H)$. En efecto, a partir de (2) obtenemos sucesivamente

$$\begin{aligned} S_1 &= S_1^2 + S_2 \\ &= S_1^2 + S_2^2 + S_3 \\ &= \ldots \\ &= S_1^2 + S_2^2 + \ldots + S_n^2 + S_{n+1}. \end{aligned}$$

Como $S_{n+1} \geq O$, esto implica

$$S_1^2 + \ldots + S_n^2 = S_1 - S_{n+1} \leq S_1. \tag{4}$$

Sea $x \in H$. Por definición de «$\leq$» y puesto que S_j $(j \in \mathbb{N})$ es autoadjunto, resulta

$$\sum_{j=1}^{n} \|S_j x\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \langle S_j x, S_j x\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle S_j^2 x, x\rangle \leq \langle S_1 x, x\rangle \quad (n \in \mathbb{N}).$$

La arbitrariedad de n asegura la convergencia de la serie $\sum_{j=1}^{\infty} \|S_j x\|^2$. De aquí, $\lim_{n\to\infty} \|S_n x\| = 0$ y $\lim_{n\to\infty} S_n x = 0$. Por (4),

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} S_j^2 \right) x = \lim_{n\to\infty} (S_1 - S_{n+1})\, x = S_1 x. \tag{5}$$

Todos los S_j $(j \in \mathbb{N})$ conmutan con T, puesto que son sumas y productos de $S_1 = \|S\|^{-1}S$ y S, T conmutan. Usando que $S = \|S\|S_1$, la fórmula (5), la continuidad del producto interior y el hecho de que $T \geq O$, para cada $x \in H$ e $y_j = S_j x$ $(j \in \mathbb{N})$, obtenemos

$$\langle STx, x\rangle = \|S\|\langle TS_1x, x\rangle = \|S\| \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \langle TS_j^2 x, x\rangle = \|S\| \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \langle Ty_j, y_j\rangle \geq 0,$$

así que $\langle STx, x\rangle \geq 0$, como pretendíamos probar. □

Definición 7.4 *Una* sucesión monótona $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ *de operadores autoadjuntos es una sucesión* $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ *que es* monótona creciente*, es decir:*

$$T_1 \leq T_2 \leq T_3 \leq \ldots \leq T_n \leq \ldots$$

o monótona decreciente*, es decir:*

$$T_1 \geq T_2 \geq T_3 \geq \ldots \geq T_n \geq \ldots$$

Toda sucesión monótona creciente posee la siguiente propiedad notable:

Teorema 7.5 (Sucesiones monótonas) *Sea $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de operadores autoadjuntos tales que*

$$T_1 \leq T_2 \leq T_3 \leq \ldots \leq T_n \leq \ldots \leq K, \tag{6}$$

donde K es un operador autoadjunto. Supongamos que cada T_j conmuta con K y con cualquier otro T_m $(j, m \in \mathbb{N})$. Entonces $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a un operador autoadjunto T que satisface $T \leq K$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $S_n = K - T_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Probaremos, en primer lugar, que la sucesión $\{\langle S_n^2 x, x\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ $(x \in H)$ converge, para seguidamente establecer, apoyándonos en este resultado, que $\{T_n x\}_{n=1}^{\infty}$ converge a Tx $(x \in H)$, donde $T : H \to H$ es un operador autoadjunto.

Procedamos con la primera cuestión. Claramente, S_n $(n \in \mathbb{N})$ es autoadjunto (Proposición 5.3). Además,

$$S_m^2 - S_n S_m = (S_m - S_n)S_m = (T_n - T_m)(K - T_m) \quad (m, n \in \mathbb{N}).$$

Sean $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$. Entonces $T_n - T_m$ y $K - T_m$ son positivos, por (6). Puesto que estos operadores conmutan, su producto es positivo (Teorema 7.3). En consecuencia, $S_m^2 - S_n S_m \geq O$, esto es, $S_m^2 \geq S_n S_m$. Similarmente,

$$S_n S_m - S_n^2 = S_n(S_m - S_n) = (K - T_n)(T_n - T_m) \geq O,$$

así que $S_nS_m \geq S_n^2$. En síntesis:

$$S_m^2 \geq S_nS_m \geq S_n^2 \quad (m,n \in \mathbb{N},\ m < n).$$

Aprovechando el carácter autoadjunto de S_n $(n \in \mathbb{N})$ encontramos, por definición, que

$$\langle S_m^2 x, x\rangle \geq \langle S_nS_m x, x\rangle \geq \langle S_n^2 x, x\rangle = \langle S_n x, S_n x\rangle = \|S_n x\|^2 \geq 0 \quad (x \in H;\ m,n \in \mathbb{N},\ m < n). \tag{7}$$

Esto demuestra que, para cada $x \in H$, la sucesión de números no negativos $\{\langle S_n^2 x, x\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona decreciente, y por lo tanto converge.

Ahora aplicaremos este resultado para probar que $\{T_n x\}_{n=1}^{\infty}$ $(x \in H)$ converge. Por hipótesis, cada T_n conmuta con cualquier T_m $(m,n \in \mathbb{N})$ y con K. Consiguientemente, todos los S_j $(j \in \mathbb{N})$ conmutan. Y estos operadores son autoadjuntos.

Fijemos $x \in H$. Ya que, por (7),

$$-2\langle S_mS_n x, x\rangle \leq -2\langle S_n^2 x, x\rangle \quad (m,n \in \mathbb{N},\ m < n),$$

podemos escribir

$$\begin{aligned}
\|S_m x - S_n x\|^2 &= \langle (S_m - S_n)x, (S_m - S_n)x\rangle \\
&= \langle (S_m - S_n)^2 x, x\rangle \\
&= \langle S_m^2 x, x\rangle - 2\langle S_mS_n x, x\rangle + \langle S_n^2 x, x\rangle \\
&\leq \langle S_m^2 x, x\rangle - \langle S_n^2 x, x\rangle.
\end{aligned}$$

De aquí y del resultado establecido anteriormente se sigue que $\{S_n x\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy y, puesto que H es completo, esta sucesión converge. Como $T_n = K - S_n$ $(n \in \mathbb{N})$, también converge la sucesión $\{T_n x\}_{n=1}^{\infty}$.

Pongamos $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$ $(x \in H)$. El operador $T : H \to H$ así definido es evidentemente lineal. Como cada T_n $(n \in \mathbb{N})$ es autoadjunto y el producto interior es continuo, T es también autoadjunto. Al ser convergente, $\{T_n x\}_{n=1}^{\infty}$ $(x \in H)$ está acotada, y el principio de acotación uniforme permite concluir que T está acotado. Por último, $T \leq K$ porque $T_n \leq K$ $(n \in \mathbb{N})$. □

7.2. Raíces cuadradas de operadores positivos

Ya hemos visto que si T es autoadjunto entonces T^2 es positivo. Consideramos ahora el problema inverso: dado un operador $T \geq O$, encontrar un operador autoadjunto A tal que $A^2 = T$.

Definición 7.6 *Sea $T : H \to H$ un operador positivo. Un operador autoadjunto A es una* raíz cuadrada *de T si $A^2 = T$. En caso de que, además, $A \geq O$, se dice que A es una* raíz cuadrada positiva *de T, y se escribe $A = T^{1/2}$.*

Teorema 7.7 *Todo operador $T \geq O$ en H tiene una única raíz cuadrada $A \geq O$. El operador A conmuta con cualquier operador lineal acotado en H que conmute con T.*

DEMOSTRACIÓN. Procederemos en tres etapas. En primer lugar, probaremos que si la tesis se cumple bajo la hipótesis adicional de que $T \leq I$, entonces también se verifica sin esa hipótesis. En segundo lugar, mostraremos la existencia del operador $A = T^{1/2}$ como el límite puntual de la sucesión $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$, donde $A_0 = O$ y

$$A_{n+1} = A_n + \frac{1}{2}(T - A_n^2) \quad (n \in \mathbb{N}_0), \tag{8}$$

y estableceremos la afirmación de conmutatividad. Finalmente, probaremos la unicidad de la raíz cuadrada positiva A.

Si $T = O$, podemos tomar $A = T^{1/2} = O$. Sea $T \neq O$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\langle Tx, x\rangle \leq \|Tx\|\|x\| \leq \|T\|\|x\|^2 \quad (x \in H).$$

Dividiendo por $\|T\| \neq 0$ y poniendo $Q = \|T\|^{-1}T$, obtenemos

$$\langle Qx, x\rangle \leq \|x\|^2 = \langle Ix, x\rangle \quad (x \in H);$$

esto es, $Q \leq I$. Suponiendo que Q tiene una única raíz cuadrada positiva $B = Q^{1/2}$, resulta $B^2 = Q$ y vemos que $\|T\|^{1/2}B$ es una raíz cuadrada de $T = \|T\|Q$, por cuanto

$$(\|T\|^{1/2}B)^2 = \|T\|B^2 = \|T\|Q = T.$$

Igualmente, no es difícil advertir que la unicidad de $Q^{1/2}$ implica la unicidad de la raíz cuadrada *positiva* de T.

Por tanto, será suficiente establecer el resultado bajo la hipótesis adicional de que $T \leq I$.

En primer lugar, abordaremos las afirmaciones de existencia y conmutatividad. Consideremos la sucesión $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ definida mediante (8). Puesto que $A_0 = O$, tenemos:

$$A_1 = \frac{1}{2}T, \quad A_2 = T - \frac{1}{8}T^2, \ldots$$

Cada A_n $(n \in \mathbb{N})$ es un polinomio en T con coeficientes reales. Por tanto, los operadores A_n $(n \in \mathbb{N})$ son autoadjuntos y conmutan entre sí, y también conmutan con cualquier operador con el que conmute T. Probaremos a continuación:

$$A_n \leq I \quad (n \in \mathbb{N}_0); \tag{9}$$

$$A_n \leq A_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}_0); \tag{10}$$

$$\lim_{n\to\infty} A_n x = Ax, \quad A = T^{1/2}; \tag{11}$$

$$ST = TS \text{ implica } AS = SA, \tag{12}$$

donde S es cualquier operador lineal acotado en H.

Para demostrar (9), observemos que $A_0 \leq I$. Puesto que $I - A_{n-1}$ es autoadjunto, $(I - A_{n-1})^2 \geq O$ $(n \in \mathbb{N})$. Además, $T \leq I$ implica $I - T \geq O$. De aquí y de (8) deducimos (9):

$$O \leq \frac{1}{2}(I - A_{n-1})^2 + \frac{1}{2}(I - T) = I - A_{n-1} - \frac{1}{2}(T - A_{n-1}^2) = I - A_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Obtendremos (10) por inducción. De (8) sigue que

$$A_0 = O \leq \frac{1}{2}T = A_1.$$

Sea $n \in \mathbb{N}$. Suponiendo cierto que $A_{n-1} \leq A_n$, probaremos que $A_n \leq A_{n+1}$. Usando (8) computamos directamente

$$A_{n+1} - A_n = A_n + \frac{1}{2}(T - A_n^2) - A_{n-1} - \frac{1}{2}(T - A_{n-1}^2) = (A_n - A_{n-1})\left[I - \frac{1}{2}(A_n + A_{n-1})\right],$$

donde $A_n - A_{n-1} \geq O$ por hipótesis, mientras que

$$I - \frac{1}{2}(A_n + A_{n-1}) \geq O$$

por (9). Consiguientemente, $A_{n+1} - A_n \geq O$.

Ahora probaremos (11). Ya que $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ es monótona, por (10), y $A_n \leq I$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, por (9), el Teorema 7.5 proporciona un operador autoadjunto A tal que $\lim_{n\to\infty} A_n x = Ax$ $(x \in H)$. Puesto que $\{A_n x\}_{n=0}^{\infty}$ $(x \in H)$ converge, (8) entraña que

$$\lim_{n\to\infty} (A_{n+1}x - A_n x) = \frac{1}{2}(Tx - A_n^2 x) = 0 \quad (x \in H).$$

Consecuentemente $Tx - A^2 x = 0$ $(x \in H)$, esto es, $T = A^2$. Además, $A \geq O$ porque, por (10), $O = A_0 \leq A_n$ $(n \in \mathbb{N})$, es decir, $\langle A_n x, x\rangle \geq 0$ $(x \in H,\ n \in \mathbb{N}_0)$, y basta aplicar aquí la continuidad del producto interior.

Por último, sabemos que $ST = TS$ implica $A_n S = SA_n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, o bien $A_n Sx = SA_n x$ $(x \in H,\ n \in \mathbb{N}_0)$. Haciendo $n \to \infty$ resulta (12).

Ya sólo resta establecer la afirmación de unicidad. A tal fin, supongamos que A, B son raíces cuadradas positivas de T, de modo que $A^2 = B^2 = T$. Además, $BT = BB^2 = B^2 B = TB$ implica $AB = BA$, por (12). Sea $x \in H$ arbitrario, y sea $y = (A - B)x$. Entonces $\langle Ay, y\rangle \geq 0$ y $\langle By, y\rangle \geq 0$, puesto que $A \geq O$ y $B \geq O$. Usando que $AB = BA$ y $A^2 = B^2$, obtenemos

$$\langle Ay, y\rangle + \langle By, y\rangle = \langle (A+B)y, y\rangle = \langle (A^2 - B^2)x, y\rangle = 0.$$

Consiguientemente, $\langle Ay, y\rangle = \langle By, y\rangle = 0$. Como $A \geq O$, A admite una raíz cuadrada positiva C, así que $C^2 = A$ y C es autoadjunta. Luego

$$0 = \langle Ay, y\rangle = \langle C^2 y, y\rangle = \langle Cy, Cy\rangle = \|Cy\|^2,$$

de donde $Cy = 0$. Sigue que $Ay = C^2 y = C(Cy) = 0$. Similarmente, $By = 0$. Por tanto, $(A - B)y = 0$. De la igualdad $y = (A - B)x$ inferimos

$$\|Ax - Bx\|^2 = \langle (A - B)^2 x, x\rangle = \langle (A - B)y, x\rangle = 0,$$

probando que $Ax - Bx = 0$. Al ser $x \in H$ arbitrario, se concluye que $A = B$. $\square$

7.3. Forma polar de un operador

Definición 7.8 *Se define el* módulo $|T|$ *de un operador lineal acotado* T *como la raíz cuadrada positiva de* T^*T.

La Definición 7.8 es consistente en virtud de la Observación 7.2 y el Teorema 7.7.

Definición 7.9 *Un operador lineal acotado W es una* isometría parcial *si su restricción a $\mathscr{N}(W)^{\perp}$ es una isometría. El espacio $\mathscr{N}(W)^{\perp}$ se llama* espacio inicial *de W, mientras que $\mathscr{R}(W)$ es su* espacio final.

Teorema 7.10 (Forma polar) *Dado un operador lineal acotado T, existe una isometría parcial W tal que $T = W|T|$. El espacio inicial de W es $\mathscr{N}(W)^{\perp} = \mathscr{N}(T)^{\perp}$, y su espacio final es $\mathscr{R}(W) = \overline{\mathscr{R}(T)}$. Además, si $T = U|T|$, donde U es una isometría parcial con $\mathscr{N}(U) = \mathscr{N}(T)$, entonces $U = W$.*

DEMOSTRACIÓN. Definimos $W : \mathscr{R}(|T|) \to \mathscr{R}(T)$ por $W(|T|x) = Tx$ $(x \in H)$. Como $|T|$ es autoadjunto (Teorema 7.7), necesariamente

$$\||T|x\|^2 = \langle |T|x, |T|x\rangle = \langle |T|^2 x, x\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \|Tx\|^2 \quad (x \in H). \tag{13}$$

En particular, W está bien definido, esto es, $x, y \in H$ y $|T|x = |T|y$ implica $Tx = Ty$. Además, W es isométrico, y como tal se extiende a una isometría de $\overline{\mathscr{R}(|T|)} = \mathscr{N}(|T|)^{\perp}$ en $\overline{\mathscr{R}(T)}$. Definimos W en todo H haciéndolo cero fuera de $\mathscr{N}(|T|)^{\perp}$. Por (13), $|T|x = 0$ si, y sólo si, $Tx = 0$ $(x \in H)$, así que $\mathscr{N}(|T|) = \mathscr{N}(T) = \mathscr{N}(W)$.

En cuanto a la unicidad, observemos que si U es como en el enunciado y $x \in H$ entonces $W|T|x = Tx = U|T|x$; esto es, U y W coinciden en $\mathscr{R}(|T|)$, que es denso en el espacio inicial común a ambos. Se concluye que $U = W$. □

Corolario 7.11 *Si T es un operador lineal acotado y $T = W|T|$ es su descomposición polar, se tiene:*

$$W^*W|T| = |T|, \quad W^*T = |T| \quad y \quad WW^*T = T.$$

DEMOSTRACIÓN. La segunda y la tercera identidades se infieren de la primera y la segunda, respectivamente:

$$W^*T = W^*W|T| = |T|, \quad WW^*T = W|T| = T.$$

Para demostrar la primera, advertimos que, al ser W una isometría sobre $\overline{\mathscr{R}(|T|)}$, se cumple

$$\langle W^*Wz, z\rangle = \langle Wz, Wz\rangle = \|Wz\|^2 = \|z\|^2 = \langle z, z\rangle \quad (z \in \overline{\mathscr{R}(|T|)}).$$

Por tanto, $W^*Wz = z$ $(z \in \overline{\mathscr{R}(|T|)})$. Cuando $z = |T|x$ $(x \in H)$ resulta, en particular, $W^*W|T|x = |T|x$ $(x \in H)$, como pretendíamos. □