Clases de operadores II

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1. Introducción

Proseguimos aquí el estudio de los diversos tipos de operadores lineales continuos de un espacio de Hilbert no trivial H en sí mismo, iniciado en la primera parte del tema. Las referencias cruzadas del tipo «I.*» se referirán a resultados de dicha primera parte. En esta segunda parte, en la que se mantendrá la notación que hemos venido utilizando, nos ocuparemos, concretamente, de las proyecciones y de los operadores de rango finito, compactos, de Hilbert-Schmidt y traza.

2. Proyecciones

Definición 2.1 *Un operador lineal continuo $T : H \to H$ es un* proyector *o* proyección *si $T^* = T = T^2$.*

Por tanto, una proyección es un operador lineal, continuo, autoadjunto e idempotente.

La proyección ortogonal P_M de H en un subespacio cerrado M de H es una proyección en el sentido de la Definición 2.1. De hecho, toda proyección se puede obtener de esta forma a partir de un subespacio cerrado oportuno.

Proposición 2.2 *Si T es cualquier proyección, existe un único subespacio cerrado M tal que $T = P_M$. En efecto, $M = \mathscr{R}(T)$ y $M^\perp = \mathscr{N}(T)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $M = \{y \in H : Ty = y\}$; como $M = \mathscr{N}(T - I)$, M es un subespacio cerrado de H.

Por otra parte, $M = \mathscr{R}(T)$, pues si $y \in M$ entonces $y = Ty \in \mathscr{R}(T)$ y, recíprocamente, si $y = Tx$ para algún $x \in H$ entonces $Ty = T(Tx) = Tx = y$ implica $y \in M$. Ahora, $\mathscr{N}(T) = \mathscr{R}(T^*)^\perp = \mathscr{R}(T)^\perp = M^\perp$.

Dado cualquier $x \in H$, pongamos $x = y + z$, donde $y \in M$ y $z \in M^\perp$. Se cumple: $P_M x = y = y + 0 = Ty + Tz = T(y + z) = Tx$. Luego, $T = P_M$.

En cuanto a la unicidad, observemos que si N es otro subespacio cerrado tal que $P_M = P_N$, entonces $N = \mathscr{R}(P_N) = \mathscr{R}(P_M) = M$. □

Proposición 2.3 *Para cualquier proyección P en H, se cumple:*

(i) $\langle Px, x\rangle = \|Px\|^2$ $(x \in H)$.

(ii) $P \geq O$.

(iii) $\|P\| \leq 1$*; si* $\mathscr{R}(P) \neq \{0\}$*, entonces* $\|P\| = 1$.

DEMOSTRACIÓN. Los apartados (i) y (ii) siguen de ser

$$\langle Px,x\rangle = \langle P^2x,x\rangle = \langle Px,Px\rangle = \|Px\|^2 \geq 0 \quad (x \in H).$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\|Px\|^2 = \langle Px,x\rangle \leq \|Px\|\|x\| \quad (x \in H),$$

de modo que $\|Px\|/\|x\| \leq 1$ $(x \in H \setminus \{0\})$, y $\|P\| \leq 1$; además, $\|Px\|/\|x\| = 1$ si $x \in \mathscr{R}(P) \setminus \{0\}$. Esto prueba (iii). □

Proposición 2.4 *Sean M, N subespacios cerrados de H, P el proyector cuyo recorrido es M, y Q el proyector con recorrido N. Se verifica:*

(i) $T = PQ$ es una proyección en H si, y sólo si, $PQ = QP$. En tal caso, T proyecta H sobre $Y = M \cap N$.

(ii) $M \perp N$ si, y sólo si, $PQ = O$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que P y Q conmutan, esto es, $PQ = QP$. Entonces T es autoadjunta (Proposición I.5.3). Además, T es idempotente, ya que

$$T^2 = (PQ)(PQ) = P^2Q^2 = PQ = T.$$

Por tanto, T es una proyección. Para cada $x \in H$, se tiene:

$$Tx = P(Qx) = Q(Px).$$

Puesto que P proyecta H sobre M, resulta que $P(Qx) \in M$. Similarmente, $Q(Px) \in N$. En conjunto, $Tx \in M \cap N$; la arbitrariedad de x prueba que T proyecta H en $Y = M \cap N$. Esta proyección es suprayectiva: si $y \in Y$ entonces $y \in M$, $y \in N$, y

$$Ty = P(Qy) = Py = y.$$

Recíprocamente, si $T = PQ$ es una proyección definida en H entonces T es autoadjunta, y de la Proposición I.5.3 se concluye que $PQ = QP$.

Para probar (ii), supongamos que $PQ = O$. Si $x \in M$ e $y \in N$ entonces

$$\langle x, y \rangle = \langle Px, Qy \rangle = \langle x, P^* Qy \rangle = \langle x, PQy \rangle = \langle x, 0 \rangle = 0.$$

Recíprocamente, sea $M \perp N$. Si $x \in H$ entonces $Qx \in N$, así que $Qx \in M^\perp$ y $P(Qx) = 0$. □

Proposición 2.5 *Sean P, Q proyecciones en H con rangos M, N, respectivamente. Se tiene:*

(i) La suma $T = P + Q$ es una proyección en H si, y sólo si, $M \perp N$.

(ii) Si $T = P + Q$ es una proyección, entonces T proyecta H sobre $Y = M \oplus N$.

DEMOSTRACIÓN. Para probar (i), observamos que si $T = P + Q$ es una proyección entonces $T^2 = T$, es decir,

$$P + Q = (P + Q)^2 = P^2 + PQ + QP + Q^2 = P + PQ + QP + Q,$$

de donde $PQ + QP = O$. Multiplicando esta expresión por Q a la izquierda, obtenemos $QPQ + QP = O$. Y multiplicando esta nueva expresión por Q a la derecha, encontramos que $2QPQ = O$. Insertando este resultado en la misma expresión se infiere que $QP = O$, así que $M \perp N$ (Proposición 2.4). Esto establece (i).

Suponiendo ahora que $T = P + Q$ es una proyección (y, por tanto, que $M \perp N$), se trata de determinar el subespacio cerrado Y de H sobre el que proyecta T.

Cualquiera que sea $x \in H$ tenemos $y = Tx = Px + Qx$, con $Px \in M$ y $Qx \in N$, así que $y \in M \oplus N$. Consecuentemente, $Y \subset M \oplus N$.

Para demostrar que $Y \supset M \oplus N$, sea y un elemento arbitrario de $M \oplus N$. Entonces $y = u + v$, con $u \in M$ y $v \in N$. Si aplicamos T y usamos que $M \perp N$, resulta

$$Ty = P(u + v) + Q(u + v) = Pu + Qv = u + v = y.$$

Por consiguiente $y \in Y$, probando que $Y \supset M \oplus N$ y estableciendo con ello (ii). □

Teorema 2.6 *Sean P, Q proyecciones definidas en H con rangos M, N y núcleos $\mathcal{N}(P)$, $\mathcal{N}(Q)$, respectivamente. Son equivalentes:*

(i) $QP = PQ = P$.

(ii) $M \subset N$.

(iii) $\mathscr{N}(P) \supset \mathscr{N}(Q)$.

(iv) $\|Px\| \leq \|Qx\|$ $(x \in H)$.

(v) $P \leq Q$.

DEMOSTRACIÓN. Sabemos (Proposición 2.3) que $\|P\| \leq 1$. Suponiendo cierto (i) podemos escribir

$$\|Px\| = \|PQx\| \leq \|P\|\|Qx\| \leq \|Qx\| \quad (x \in H),$$

de modo que se satisface (iv).

Por otra parte, si se verifica (iv) la Proposición 2.3 implica

$$\langle Px, x\rangle = \|Px\|^2 \leq \|Qx\|^2 = \langle Qx, x\rangle \quad (x \in H),$$

así que también se cumple (v).

Supongamos cierto (v), y sea $x \in \mathscr{N}(Q)$. Entonces $Qx = 0$, y la Proposición 2.3 junto con la definición de «$\leq$» muestran que

$$\|Px\|^2 = \langle Px, x\rangle \leq \langle Qx, x\rangle = 0.$$

Consiguientemente $Px = 0$, así que $x \in \mathscr{N}(P)$, y de la arbitrariedad de $x \in \mathscr{N}(Q)$ se infiere (iii).

El núcleo y el rango de una proyección son complementos ortogonales (Proposición 2.2). Por tanto, (iii) implica (ii).

Finalmente, para cada $x \in H$ tenemos $Px \in M$. Si se verifica (ii) entonces $Px \in N$, así que $Q(Px) = Px$, es decir, $QP = P$. Como P es una proyección, la Proposición 2.4 conduce a (i). □

Definición 2.7 *Se dice que una proyección P* es parte *de otra proyección Q si P y Q satisfacen una cualquiera de las condiciones equivalentes del Teorema 2.6.*

Teorema 2.8 *Sean P, Q proyecciones en H con rangos M, N, respectivamente. Se verifica:*

(i) La diferencia $T = Q - P$ es una proyección en H si, y sólo si, P es parte de Q.

(ii) Si $T = Q - P$ es una proyección, entonces T proyecta H sobre el complemento ortogonal de M en N.

DEMOSTRACIÓN. Para probar (i) observamos que si $T = Q - P$ es una proyección entonces $T^2 = T$, es decir,

$$Q - P = (Q-P)^2 = Q^2 - PQ - QP + P^2 = Q - PQ - QP + P,$$

de donde $PQ + QP = 2P$. Multiplicando esta expresión por Q sucesivamente a la izquierda y a la derecha obtenemos $QPQ = QP$ y $QPQ = PQ$. Y combinando las tres últimas expresiones se infiere que $QP = PQ = P$. En particular, $M \subset N$ (Teorema 2.6).

Recíprocamente, si $M \subset N$ entonces el Teorema 2.6 proporciona $P = PQ = QP$, lo que implica $2P = PQ + QP$ y muestra que $T = Q - P$ es idempotente. Ya que P y Q son autoadjuntos, también lo es T. Consecuentemente T es una proyección, y queda establecido (i).

Supongamos ahora que $T = Q - P$ es una proyección (y, por lo que acabamos de probar, que $M \subset N$). Dado cualquier $y \in Y = \mathscr{R}(T)$ tenemos $y = Tx = Qx - Px$, con $x \in H$. Como $QP = P$ (Teorema 2.6), sigue que

$$Qy = Q^2x - QPx = Qx - Px = y.$$

Esto muestra que $y \in N$. Similarmente,

$$Py = PQx - P^2x = Px - Px = 0.$$

Esto muestra que $y \in \mathscr{N}(P) = M^{\perp}$. En conjunto, $y \in V = N \cap M^{\perp}$. La arbitrariedad de $y \in Y$ prueba que $Y \subset V$.

Para demostrar que $Y \supset V$, sea v un elemento arbitrario de $V = N \cap M^{\perp}$. Como la proyección de H en $M^{\perp}$ es $I - P$, se cumple que $v = (I-P)z$ para algún $z \in H$. Teniendo en cuenta que $QP = P$, podemos escribir:

$$Qz - Pz = Qz - QPz = Q(I-P)z = Qv = v = z - Pz.$$

Luego, $Qz = z$. De aquí se infiere que

$$Tv = (Q-P)v = (Q-P)(I-P)z = (Q - QP - P + P^2)z = z - Pz = (I-P)z = v.$$

Por consiguiente, $v \in Y$. La arbitrariedad de $v \in V$ prueba que $Y \supset V$ y establece (ii). □

Teorema 2.9 *Sea $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión monótona creciente de proyecciones en H. Entonces:*

(i) $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a una proyección P definida en H.

(ii) El rango de P es

$$\mathscr{R}(P)=\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{R}(P_n)}.$$

(iii) El núcleo de P es

$$\mathscr{N}(P)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathscr{N}(P_n).$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $m,n\in\mathbb{N}$, $m<n$. Por hipótesis $P_m\le P_n$, así que $\mathscr{R}(P_m)\subset\mathscr{R}(P_n)$ (Teorema 2.6) y P_n-P_m es una proyección (Teorema 2.8). La Proposición 2.3 entraña que

$$0\le\|P_nx-P_mx\|^2=\|(P_n-P_m)x\|^2=\langle(P_n-P_m)x,x\rangle=\langle P_nx,x\rangle-\langle P_mx,x\rangle=\|P_nx\|^2-\|P_mx\|^2\quad(x\in H).$$

Ahora $\|P_n\|\le 1$, así que $\|P_nx\|\le\|x\|$ $(x\in H,\ n\in\mathbb{N})$. Por tanto, fijado $x\in H$, la sucesión de escalares $\{\|P_nx\|\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona creciente y acotada superiormente, luego convergente y de Cauchy. Pero entonces $\{P_nx\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en H, que es completo, así que $\{P_nx\}_{n=1}^{\infty}$ converge, digamos a Px. Siendo $x\in H$ arbitrario, queda definido un operador P en H, que es obviamente lineal. Como $\lim_{n\to\infty}P_nx=Px$ $(x\in H)$ y cada P_n $(n\in\mathbb{N})$ es acotado, autoadjunto e idempotente, lo mismo podemos afirmar de P, y se concluye que P es una proyección. Esto establece (i).

Se trata ahora de hallar $\mathscr{R}(P)$. Sean $m,n\in\mathbb{N}$, $m<n$. Entonces $P_m\le P_n$, esto es, $P_n-P_m\ge O$ y $\langle(P_n-P_m)x,x\rangle\ge 0$ $(x\in H)$, por definición. Haciendo $n\to\infty$ obtenemos $\langle(P-P_m)x,x\rangle\ge 0$ $(x\in H)$, esto es, $P_m\le P$, de donde $\mathscr{R}(P_m)\subset\mathscr{R}(P)$ (Teorema 2.6). Como $m\in\mathbb{N}$ es arbitrario y $\mathscr{R}(P)$ es cerrado (Proposición 2.2), encontramos que

$$\overline{\bigcup_{m=1}^{\infty}\mathscr{R}(P_m)}\subset\mathscr{R}(P).\tag{1}$$

Además, para cada $n\in\mathbb{N}$ y cada $x\in H$ se cumple que $P_nx\in\mathscr{R}(P_n)\subset\bigcup_{m=1}^{\infty}\mathscr{R}(P_m)$. Puesto que $\lim_{n\to\infty}P_nx=Px$, sigue que $Px\in\overline{\bigcup_{m=1}^{\infty}\mathscr{R}(P_m)}$. En consecuencia,

$$\mathscr{R}(P)\subset\overline{\bigcup_{m=1}^{\infty}\mathscr{R}(P_m)}.\tag{2}$$

De (1) y (2) se infiere (ii).

Finalmente, hemos de determinar $\mathscr{N}(P)$. Ya que, por (ii), se verifica $\mathscr{R}(P)\supset\mathscr{R}(P_n)$, para cada $n\in\mathbb{N}$ tenemos $\mathscr{N}(P)=\mathscr{R}(P)^{\perp}\subset\mathscr{R}(P_n)^{\perp}$. Luego,

$$\mathscr{N}(P)\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathscr{R}(P_n)^{\perp}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathscr{N}(P_n).$$

Por otra parte, si $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{N}(P_n)$ entonces $P_n x = 0$ $(n \in \mathbb{N})$ y $\lim_{n\to\infty} P_n x = Px$ implica $Px = 0$, esto es, $x \in \mathscr{N}(P)$. La arbitrariedad de $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{N}(P_n)$ muestra que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{N}(P_n) \subset \mathscr{N}(P)$$

y prueba (iii). □

3. Subespacios invariantes y reducción de operadores

Definición 3.1 *Un subespacio cerrado M se dice* invariante bajo el operador T, *ó* T-invariante*, si $T(M) \subset M$.*

Teorema 3.2 *Sean X, Y subconjuntos de H, $M = X^{\perp\perp}$, $N = Y^{\perp\perp}$. Si T es un operador lineal continuo verificando $T(X) \subset Y$, entonces $T(M) \subset N$.*

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que M (respectivamente, N) es el menor subespacio cerrado de H que contiene a X (respectivamente, Y). Como $T^*(Y^\perp) \subset X^\perp$, encontramos que $T^{**}(X^{\perp\perp}) \subset Y^{\perp\perp}$. □

Teorema 3.3 *Sea T un operador lineal acotado en H, y sean M, N subespacios cerrados de H. Son equivalentes:*

(i) $T(M) \subset N$.

(ii) $T^*(N^\perp) \subset M^\perp$.

(iii) $P_N T P_M = T P_M$.

DEMOSTRACIÓN. Es conocido que (i) equivale a (ii).

Supongamos que se verifica (i), y sea $x \in H$. Se tiene que $P_M x \in M$; por tanto, $T P_M x \in N$. En tal caso, $P_N T P_M x = T P_M x$. Ya que $x \in H$ es arbitrario, hemos establecido (iii).

Si se cumple (iii) entonces $Tx = T P_M x = P_N T P_M x = P_N T x \in N$ para cada $x \in M$, probando (i). □

Corolario 3.4 *Sea T un operador lineal acotado en H, y sea M un subespacio cerrado de H. Son equivalentes:*

(i) M *es invariante bajo* T.

(ii) $M^\perp$ *es invariante bajo* T^*.

(iii) $P_M T P_M = T P_M$.

Definición 3.5 *Sea* M *un subespacio cerrado de* H*, invariante bajo* T*. La* restricción *de* T *a* M *es la aplicación* $T_{|M} : M \to M$ *definida por* $T_{|M} y = Ty$ $(y \in M)$.

El siguiente resultado es elemental.

Teorema 3.6 *Sea* M *un subespacio cerrado de* H*, y sean* S*,* T *operadores lineales acotados en* H.

(i) Si M *es invariante bajo* T *entonces* $T_{|M}$ *es un operador lineal acotado en el espacio de Hilbert* M*, con* $\|T_{|M}\| \leq \|T\|$.

(ii) Si M *es invariante bajo los operadores* S *y* T*, entonces* M *es invariante bajo* $S+T$*,* ST *y* λT $(\lambda \in \mathbb{K})$*; además,*

$$(S+T)_{|M} = S_{|M} + T_{|M}, \quad (ST)_{|M} = S_{|M} T_{|M}, \quad (\lambda T)_{|M} = \lambda T_{|M} \ (\lambda \in \mathbb{K}).$$

Definición 3.7 *Se dice que el subespacio cerrado* M reduce *a* T *cuando tanto* M *como* $M^\perp$ *son invariantes bajo* T.

Teorema 3.8 *Sea* T *un operador lineal acotado en* H*, y sea* M *un subespacio cerrado de* H*. Son equivalentes:*

(i) M *reduce a* T.

(ii) $M^\perp$ *reduce a* T.

(iii) M *reduce a* T^*.

(iv) M *es invariante bajo* T *y* T^*.

(v) $T P_M = P_M T$.

DEMOSTRACIÓN. Que (i)-(iv) son equivalentes resulta inmediato a partir del Corolario 3.4 y de las definiciones correspondientes.

Sea $P = P_M$.

Si se verifica (iv) entonces, por el Corolario 3.4, $PTP = TP$ y $PT^*P = T^*P$; consecuentemente, $PT = P^*T = (T^*P)^* = (PT^*P)^* = PTP = TP$, y se verifica (v).

Suponiendo ahora que $PT = TP$, se tiene que $PTP = TP^2 = TP$, y sigue del Corolario 3.4 que M es invariante bajo T. Además, $PT^* = (TP)^* = (PT)^* = T^*P$, de modo que, por analogía, M también es invariante bajo T^*. Esto establece que (v) implica (iv) y completa la demostración. $\square$

Teorema 3.9 *Si M reduce a T, entonces $(T_{|M})^* = T^*_{|M}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $R = T_{|M}$, y sea $S = T^*_{|M}$; ambos están definidos en virtud de la equivalencia entre las condiciones (i) y (iv) del Teorema 3.8. Cualesquiera sean $x, y \in M$, se cumple que $\langle R^*x, y\rangle = \langle x, Ry\rangle = \langle x, Ty\rangle = \langle T^*x, y\rangle = \langle Sx, y\rangle$. Como R^* y S son operadores en M, concluimos que $R^* = S$. $\square$

Corolario 3.10 *Si M reduce a T y T es normal (respectivamente, unitario), entonces $T_{|M}$ es normal (respectivamente, unitario).*

DEMOSTRACIÓN. Por los Teoremas 3.6 y 3.9,

$$(T^*T)_{|M} = T^*_{|M}T_{|M} = (T_{|M})^*T_{|M} \quad \text{y} \quad (TT^*)_{|M} = T_{|M}T^*_{|M} = T_{|M}(T_{|M})^*.$$

Además, $I_{|M}$ es el operador identidad en M. $\square$

Corolario 3.11 *Si T es autoadjunto y M es invariante bajo T, entonces $T_{|M}$ es autoadjunto.*

DEMOSTRACIÓN. Como $T^* = T$, M reduce a T por el Teorema 3.8. Ahora, el Teorema 3.9 asegura que $(T_{|M})^* = T^*_{|M} = T_{|M}$. $\square$

4. Operadores compactos

En primer lugar, recordaremos los conceptos de conjunto compacto, secuencialmente compacto, relativamente compacto y totalmente acotado, así como la relación existente entre ellos.

Definición 4.1 *Sea E un espacio métrico. Un subconjunto F de E es:*

- compacto *si todo recubrimiento abierto de F admite un subrecubrimiento finito;*
- secuencialmente compacto *si toda sucesión infinita en F tiene un punto de acumulación (es decir, una subsucesión convergente) en F;*

- relativamente compacto *si su clausura es compacta;*

- precompacto *o* totalmente acotado *si dado* $\varepsilon > 0$*, existen* $x_1, \ldots, x_n \in F$ *tales que* $F \subset \bigcup_{i=1}^{n} U(x_i; \varepsilon)$*, donde para cada* $x \in E$ *y* $r > 0$*,* $U(x;r)$ *denota la bola abierta de centro* x *y radio* r *en* E*. En tal caso se dice que* $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *constituye una* ε-red finita.

Recordemos que una familia $\mathscr{G}$ de abiertos en un espacio métrico E es una base de abiertos de E si cada abierto en E es unión de elementos de $\mathscr{G}$.

Lema 4.2 *Sea* E *un espacio métrico. Si* E *es totalmente acotado, entonces* E *es separable y por tanto posee una base de abiertos numerable.*

DEMOSTRACIÓN. Para cada $n \in \mathbb{N}$ elegimos una $(1/n)$-red finita M_n. El conjunto $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ es numerable y denso en E.

Por otra parte, dado cualquier abierto G en E y cualquier $y \in G$, existe $r > 0$ tal que $U(y;r) \subset G$. Como M es denso en E, ciertos $n \in \mathbb{N}$ y $x \in M$ son tales que $y \in U(x;1/n) \subset U(y;r) \subset G$. Por tanto, la familia $\{U(x;1/n) : x \in M,\ n \in \mathbb{N}\}$ forma una base numerable de abiertos de E. $\square$

Proposición 4.3 *Sea* E *un espacio métrico, y sea* $F \subset E$*. Son equivalentes:*

(i) F *es compacto.*

(ii) F *es secuencialmente compacto.*

(iii) F *es totalmente acotado y completo.*

(iv) F *es relativamente compacto y cerrado.*

DEMOSTRACIÓN. Que (i) equivale a (iv) es consecuencia de que los compactos en espacios Hausdorff son cerrados.

Supongamos que F es compacto y que existe una sucesión infinita $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F$ carente de puntos de acumulación en F. Entonces, para cada $x \in F$ es posible encontrar una bola abierta centrada en x que contiene a lo sumo un número finito de términos de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. El conjunto de todas estas bolas constituye un recubrimiento abierto de F, luego admitirá un subrecubrimiento finito, cuya unión recubre a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a pesar de contener a lo sumo un número finito de puntos de la sucesión. Esta contradicción prueba que (i) implica (ii).

Supongamos ahora que F es secuencialmente compacto. Entonces F es completo, ya que toda sucesión de Cauchy contiene una subsucesión convergente a un punto de F y, por lo tanto, ella misma es convergente. Por otra parte, fijemos $\varepsilon > 0$. Sea $x_1 \in F$; si la bola de centro x_1 y radio ε contiene a F, hemos terminado; si no, existe $x_2 \in F$ a una distancia de x_1 mayor o igual que ε. Ahora, si la unión de las bolas de centros x_i $(i = 1,2)$ y radio ε contiene a F, hemos terminado; si no, iteramos el proceso. El número de iteraciones ha de ser finito, pues de lo contrario obtendríamos una sucesión tal que la distancia entre dos cualesquiera de sus términos es mayor o igual que ε, la cual carecería de subsucesiones convergentes. Hemos demostrado así que (ii) implica (iii).

A continuación estableceremos que (iii) implica (ii). Suponiendo que F es totalmente acotado, probaremos que toda sucesión infinita $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F$ contiene una subsucesión convergente en F. Por hipotésis, F tiene una 1-red finita. No todas las correspondientes bolas pueden contener un número finito de términos de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, así que elegimos una, digamos U_1, conteniendo infinitos términos $\{x_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$ de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Como F también tiene una $(1/2)$-red finita, de entre las correspondientes bolas elegimos una, digamos U_2, conteniendo infinitos términos $\{x_{2,n}\}_{n=1}^{\infty}$ de $\{x_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$. Procediendo por inducción sobre $k \in \mathbb{N}$, una vez elegida $\{x_{k,n}\}_{n=1}^{\infty}$ y ya que F tiene una $(1/k+1)$-red finita, de entre las correspondientes bolas elegimos una, digamos U_{k+1}, conteniendo infinitos términos $\{x_{k+1,n}\}_{n=1}^{\infty}$ de $\{x_{k,n}\}_{n=1}^{\infty}$. Ahora definimos $y_n = x_{n,n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ (dependiendo de ε) tal que y_n $(n \geq N)$ está en una bola de radio ε. Por consiguiente, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en F, y al ser F completo esta sucesión tendrá un límite $y \in F$.

Sólo resta comprobar, por ejemplo, que (ii) implica (i). En espacios métricos separables, todo recubrimiento abierto contiene un subrecubrimiento contable (Lema 4.2); por tanto, en la definición de compacidad es suficiente considerar recubrimientos numerables. Razonando por contradicción, supongamos que $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un recubrimiento abierto de F que no admite subrecubrimientos finitos, y definamos $V_n = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ $(n \in \mathbb{N})$. Ninguno de estos conjuntos recubre a F, luego existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de F tales que $x_n \notin V_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Si se verifica (ii), entonces esta sucesión admite una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ convergente a algún $x \in F$. Al ser $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ un recubrimiento abierto de F, necesariamente $x \in U_m$ para algún $m \in \mathbb{N}$. En tal caso, por definición de límite existe $N \in \mathbb{N}$, $N \geq m$, tal que $x_{n_k} \in U_m \subset V_{n_k}$ $(n_k \geq N)$, contradiciendo la construcción de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. $\square$

4.1. Operadores compactos

Los operadores compactos constituyen una clase importante de operadores acotados cuyo origen se remonta a la teoría de ecuaciones integrales de segunda especie. Suponen la generalización natural de los operadores cuyo rango tiene dimensión finita.

Definición 4.4 *Un operador lineal $T : H \to H$ se dice* compacto *o* completamente continuo *si toda sucesión acotada $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ contiene una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $\{Tx_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge.*

Es evidente que en la Definición 4.4, la condición de que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ esté acotada puede ser sustituida por la de que $\|x_n\| \leq 1$ $(n \in \mathbb{N})$.

Proposición 4.5 *Sea $\mathbb{B}$ la bola unidad cerrada de H. Los siguientes enunciados sobre un operador lineal $T : H \to H$ son equivalentes:*

(i) T es compacto.

(ii) Para todo conjunto acotado $M \subset H$, $T(M)$ es relativamente compacto.

(iii) $T(\mathbb{B})$ es relativamente compacto.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que T es compacto y fijemos un subconjunto acotado $M \subset H$. Si elegimos cualquier sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \overline{T(M)}$, por definición de adherencia existe una sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset T(M)$ tal que la distancia entre y_n y z_n no supera $1/n$ $(n \in \mathbb{N})$. Se tiene que $y_n = Tx_n$, donde $x_n \in M$ $(n \in \mathbb{N})$. Por hipótesis, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $\{Tx_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge, y su límite está en $\overline{T(M)}$; en otras palabras, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ admite una subsucesión que converge a cierto $y \in \overline{T(M)}$. Luego, lo mismo cabe afirmar de $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$. Esto demuestra que $\overline{T(M)}$ es secuencialmente compacto; en particular, es relativamente compacto (Proposición 4.3). Así pues, (i) implica (ii).

Que (ii) implica (iii) es trivial.

Finalmente, supongamos que se verifica (iii), sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión acotada, digamos por R, y definamos $y_n = x_n/R$ $(n \in \mathbb{N})$. La sucesión $\{Ty_n\}_{n=1}^{\infty}$ está en $T(\mathbb{B})$. Por hipótesis, la clausura de este conjunto es (secuencialmente) compacta, lo que proporciona una subsucesión $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $\{Ty_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge a $y \in H$. Para la subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ se tiene que $\{Tx_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge a $Ry \in H$. □

Ejemplo 4.6 *Si y, z son vectores fijos de H, el operador T definido por la fórmula $Tx = \langle x,y\rangle z$ $(x \in H)$ es compacto. En efecto, supongamos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisface $\|x_n\| \leq 1$ $(n \in \mathbb{N})$. Como $|\langle x_n,y\rangle| \leq \|y\|$ $(n \in \mathbb{N})$, la sucesión de escalares $\{\langle x_n,y\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ contiene una parcial $\{\langle x_{n_k},y\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ convergente, digamos a λ. Entonces $\lim_{k\to\infty} Tx_{n_k} = \langle x_{n_k},y\rangle z = \lambda z$.*

Proposición 4.7 *Sea T un operador lineal en H.*

(i) Si T es compacto entonces está acotado.

(ii) Si H tiene dimensión finita entonces T es compacto.

(iii) El operador identidad I es compacto si, y sólo si, H tiene dimensión finita.

DEMOSTRACIÓN. Para probar (i), suponiendo que el operador T no está acotado podemos encontrar una sucesión de vectores unitarios $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{n\to\infty}\|Tx_n\| = \infty$. Pero entonces $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$ no contiene ninguna subsucesión convergente, de modo que T no puede ser compacto.

Para probar (ii) observamos que si H tiene dimensión finita entonces cualquier operador lineal T en H está acotado, por lo que transforma sucesiones acotadas en sucesiones acotadas. El teorema de Bolzano-Weierstrass (*toda sucesión acotada contiene una subsucesión convergente*), válido en espacios de dimensión finita, muestra entonces que T es compacto.

Por último, para probar (iii) es suficiente establecer que el operador identidad en un espacio de dimensión infinita H no es compacto. Pero, en efecto, si consideramos una sucesión ortonormal $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$, que está acotada ($\|e_n\| = 1$, $n \in \mathbb{N}$), la sucesión $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} = \{Ie_n\}_{n=1}^{\infty}$ no contiene ninguna subsucesión convergente, ya que $\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$ ($n,m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$). □

Proposición 4.8 *Sea T un operador compacto.*

(i) Si S es otro operador compacto, el operador $S+T$ también es compacto.

(ii) Para cualquier $\lambda \in \mathbb{K}$, el operador λT es compacto.

(iii) Dado cualquier operador lineal continuo $S : H \to H$, los operadores ST y TS son compactos.

DEMOSTRACIÓN. Es consecuencia inmediata de la Definición 4.4. □

Proposición 4.9 *Sea $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de operadores compactos. Si $T : H \to H$ es un operador lineal y $\lim_{n\to\infty}\|T_n - T\| = 0$, entonces T es compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Suponiendo que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión con $\|x_n\| \leq 1$ ($n \in \mathbb{N}$), se trata de hallar una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $\{Tx_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge. Seguiremos un procedimiento diagonal.

Sea $\{x_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$ una subsucesión de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\{T_1x_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$ converge, digamos a u_1.

Sea $\{x_{2,n}\}_{n=1}^{\infty}$ una subsucesión de $\{x_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\{T_2x_{2,n}\}_{n=1}^{\infty}$ converge, digamos a u_2.

Suponiendo elegida $\{x_{k,n}\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\{T_k x_{k,n}\}_{n=1}^{\infty}$ converge, digamos a u_k, sea $\{x_{k+1,n}\}_{n=1}^{\infty}$ una subsucesión de $\{x_{k,n}\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\{T_{k+1}x_{k+1,n}\}_{n=1}^{\infty}$ converge, digamos a u_{k+1} $(k \in \mathbb{N})$.

Consideramos la sucesión diagonal $\{x_{k,k}\}_{k=1}^{\infty}$. Es claro que $\lim_{n\to\infty} T_k x_{n,n} = u_k$ $(k \in \mathbb{N})$. Nuestro objetivo ahora es probar que $\{Tx_{k,k}\}_{k=1}^{\infty}$ es de Cauchy. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, fijemos un índice $k \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_k - T\| < \varepsilon/3$. Para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$,

$$\|Tx_{m,m} - Tx_{n,n}\| \leq \|(T - T_k)x_{m,m}\| + \|T_k x_{m,m} - T_k x_{n,n}\| + \|(T - T_k)x_{n,n}\| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \|T_k x_{m,m} - T_k x_{n,n}\|.$$

Como quiera que $\lim_{n\to\infty} T_k x_{n,n} = u_k$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_k x_{m,m} - T_k x_{n,n}\| < \varepsilon/3$ $(m, n \in \mathbb{N},\ m, n \geq N)$. Esto completa la demostración. □

Teorema 4.10 (Schauder) *Si T es un operador compacto en H, su adjunto T^* es también compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{B}$, y definamos $y_n = T^* x_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Como T^* es acotado, la sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada; la compacidad de T proporciona una subsucesión $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $\{Ty_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge en H. Ahora, para cualesquiera $i, j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\|y_{n_i} - y_{n_j}\|^2 &= \|T^* x_{n_i} - T^* x_{n_j}\|^2 = \langle T^* x_{n_i} - T^* x_{n_j}, T^* x_{n_i} - T^* x_{n_j} \rangle \\
&= \langle TT^*(x_{n_i} - x_{n_j}), x_{n_i} - x_{n_j} \rangle \leq \|TT^*(x_{n_i} - x_{n_j})\| \|x_{n_i} - x_{n_j}\| \\
&\leq 2\|Ty_{n_i} - Ty_{n_j}\|,
\end{aligned}$$

donde el segundo miembro tiende a cero cuando $i, j \to \infty$. Por consiguiente, la sucesión $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es de Cauchy en H, luego converge, probando que T^* es compacto. □

4.2. Operadores de rango finito

Definición 4.11 *Se dice que un operador lineal $T : H \to H$ es* de rango finito *si $\mathscr{R}(T)$ tiene dimensión finita.*

Proposición 4.12 *Todo operador de rango finito es compacto y, en particular, continuo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{z_1, \ldots, z_n\}$ una base ortonormal de $\mathscr{R}(T)$. Para cada $x \in H$ se tiene

$$Tx = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) z_k,$$

donde $f_1(x), \ldots, f_k(x)$ son escalares unívocamente determinados por x que satisfacen

$$f_k(x) = \langle Tx, z_k \rangle = \langle x, T^* z_k \rangle \quad (k \in \mathbb{N},\ 1 \le k \le n).$$

Poniendo $T_k x = f_k(x) z_k = \langle x, T^* z_k \rangle z_k$ encontramos que T_k $(k \in \mathbb{N},\ 1 \le k \le n)$ es un operador compacto en virtud del Ejemplo 4.6, y se concluye de la Proposición 4.8 que $T = \sum_{k=1}^{n} T_k$ también es compacto. La afirmación sobre la continuidad sigue de la Proposición 4.7. □

Corolario 4.13 *Sea $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de operadores de rango finito. Si $T : H \to H$ es un operador lineal y $\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0$, entonces T es compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Proposiciones 4.12 y 4.9. □

Proposición 4.14 *Sean H un espacio de Hilbert clásico, $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ una base ortonormal de H, $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión acotada de escalares y T el único operador tal que $Tx_k = \mu_k x_k$ $(k \in \mathbb{N})$; véase la Proposición I.2.4.*

(i) Si P_k es el proyector cuyo rango es el subespacio unidimensional generado por x_k $(k \in \mathbb{N})$ y si $T_n = \sum_{k=1}^{n} \mu_k P_k$ $(n \in \mathbb{N})$, entonces $\lim_{n\to\infty} \|T_n x - Tx\| = 0$ $(x \in H)$.

(ii) Si $\lim_{k\to\infty} \mu_k = 0$ entonces $\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0$, y T es compacto.

DEMOSTRACIÓN. Para probar (i), observamos que $P_k x = \langle x, x_k \rangle x_k = \lambda_k x_k$ $(x \in H,\ k \in \mathbb{N})$. Si $x \in H$ entonces $x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, x_k \rangle x_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$, de donde

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k T x_k = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k P_k x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu_k P_k x = \lim_{n\to\infty} T_n x.$$

Así pues, $\lim_{n\to\infty} \|T_n x - Tx\| = 0$ $(x \in H)$.

Advertimos ahora que, cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{R}(T_n)$ está contenido en el subespacio n-dimensional generado por $\{x_1, \ldots, x_n\}$, de manera que T_n es un operador de rango finito. Por tanto, para probar (ii) sólo necesitamos establecer que $\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0$ bajo la hipótesis de que $\lim_{k\to\infty} \mu_k = 0$, y apelar al Corolario 4.13. A tal fin, dado $\varepsilon > 0$, sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $|\mu_k| \le \varepsilon$ $(k \in \mathbb{N},\ k \ge N)$. Fijando $n \in \mathbb{N}$, $n \ge N$, vamos a demostrar que $\|T - T_n\| \le \varepsilon$. Para todo $x \in H$, $x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, x_k \rangle x_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k$, se tiene $Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \mu_k x_k$, así que

$$\|Tx - T_n x\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \mu_k x_k - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mu_k x_k \right\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k \mu_k x_k \right\|^2$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=n+1}^{\infty} |\lambda_k \mu_k|^2 \le \varepsilon^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \le \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \\ &= \varepsilon^2 \|x\|^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\|(T-T_n)x\| \le \varepsilon \|x\|$, y de la arbitrariedad de $x \in H$ se concluye que $\|T-T_n\| \le \varepsilon$. □

4.3. Operadores de Hilbert-Schmidt y traza

Recuérdese que la traza de una matriz es la suma de los elementos de su diagonal.

Definición 4.15 *Sea T un operador positivo en H, y sea $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una base ortonormal de H. Definimos la* traza *de T, $\operatorname{tr}(T)$, como la serie de términos no negativos*

$$\operatorname{tr}(T) = \sum_{\alpha \in A} \langle Te_\alpha, e_\alpha \rangle. \tag{3}$$

No se excluye la posibilidad de que esta serie sea divergente.

Proposición 4.16 *Para cada operador lineal acotado T en H, se tiene que $\operatorname{tr}(T^*T) = \operatorname{tr}(TT^*)$.*

DEMOSTRACIÓN. Los operadores T^*T y TT^* son positivos (Observación I.7.2).

Sea $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una base ortonormal de H. Para cualesquiera $\alpha, \beta \in A$, tenemos:

$$\langle Te_\alpha, e_\beta \rangle \langle e_\beta, Te_\alpha \rangle = \langle T^* e_\beta, e_\alpha \rangle \langle e_\alpha, T^* e_\beta \rangle \ge 0.$$

Tomando sumatorios en β en el primer miembro y en α en el segundo miembro, encontramos, respectivamente:

$$\sum_{\beta \in A} \big\langle \langle Te_\alpha, e_\beta \rangle e_\beta, Te_\alpha \big\rangle = \langle Te_\alpha, Te_\alpha \rangle = \langle T^*Te_\alpha, e_\alpha \rangle,$$

$$\sum_{\alpha \in A} \big\langle \langle T^* e_\beta, e_\alpha \rangle e_\alpha, T^* e_\beta \big\rangle = \langle T^* e_\beta, T^* e_\beta \rangle = \langle TT^* e_\beta, e_\beta \rangle.$$

Las series anteriores son de términos positivos, así que su suma no depende del orden de sumación. Por tanto,

$$\operatorname{tr}(T^*T) = \sum_{\alpha \in A} \langle T^*Te_\alpha, e_\alpha \rangle = \sum_{\beta \in A} \langle TT^* e_\beta, e_\beta \rangle = \operatorname{tr}(TT^*),$$

como se afirmaba. □

Corolario 4.17 *Si U es unitario y T positivo, entonces* $\operatorname{tr}(UTU^*) = \operatorname{tr}(T)$. *En particular, la Definición 4.15 es independiente de la base ortonormal elegida. Además,* $\|T\| \leq \operatorname{tr}(T)$.

DEMOSTRACIÓN. Puesto que $T = (T^{1/2})^2$ (Teorema I.7.7), podemos reemplazar T por $UT^{1/2}$ en la Proposición 4.16. La última afirmación se sigue de la Proposición I.5.5. □

El siguiente resultado es de comprobación inmediata.

Proposición 4.18 *Sean S, T operadores positivos, y sea $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \geq 0$. Se verifica:*

$$\operatorname{tr}(S+T) = \operatorname{tr}(S) + \operatorname{tr}(T), \qquad \operatorname{tr}(\lambda T) = \lambda \operatorname{tr}(T).$$

Además, si $S \leq T$ entonces $\operatorname{tr} S \leq \operatorname{tr} T$.

Definición 4.19 *Un operador lineal acotado T en H es un* operador traza *si* $\operatorname{tr}(|T|) < \infty$*, donde $|T|$ es el módulo de T (Definición I.7.8). La clase de los operadores traza se denotará $\mathscr{B}^1(H)$.*

Proposición 4.20 *Todo operador de rango finito es de clase traza.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathscr{U} = \{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una base ortonormal de H, y sea T un operador de rango finito.

Si $T \geq O$ y $e_1, \ldots, e_n$ son elementos de $\mathscr{U}$ que generan $\mathscr{R}(T)$, entonces

$$\sum_{\alpha \in A} \langle Te_\alpha, e_\alpha \rangle = \sum_{e_\alpha \in \{e_1, \ldots, e_n\}} \langle Te_\alpha, e_\alpha \rangle < \infty.$$

En el caso general, la descomposición polar $T = W|T|$ de T muestra que $|T| = W^*T$ (Corolario I.7.11) es un operador positivo de rango finito; por lo que acabamos de probar

$$\operatorname{tr}(|T|) = \sum_{\alpha \in A} \langle |T|e_\alpha, e_\alpha \rangle < \infty,$$

así que $T \in \mathscr{B}^1(H)$. □

Definición 4.21 *Un operador lineal acotado T en H se dice un* operador de Hilbert-Schmidt *si* $\operatorname{tr}(|T|^2) = \operatorname{tr}(T^*T) < \infty$*. El conjunto de todos los operadores de Hilbert-Schmidt que actúan sobre H se denotará $\mathscr{B}^2(H)$.*

Nótese que $T \in \mathscr{B}^2(H)$ si, y sólo si, $\sum_{\alpha \in A} \|Te_\alpha\|^2 < \infty$ para cualquier base ortonormal $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ en H.

Nótese también que la clase $\mathscr{B}^2(H)$ es cerrada por conjugación (Proposición 4.16).

Proposición 4.22 *Todo operador de clase traza es de Hilbert-Schmidt.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $T \in \mathscr{B}^1(H)$. Para cada $x \in H$, el Teorema I.7.7, la desigualdad de Cauchy-Schwarz y (I.13) permiten escribir

$$\begin{aligned} \langle |T|^2 x, x\rangle &= \langle |T|^{1/2}|T||T|^{1/2}x, x\rangle = \left|\langle |T||T|^{1/2}x, |T|^{1/2}x\rangle\right| \\ &\leq \left\||T||T|^{1/2}x\right\| \left\||T|^{1/2}x\right\| = \left\|T|T|^{1/2}x\right\| \left\||T|^{1/2}x\right\| \leq \|T\| \left\||T|^{1/2}x\right\|^2 \\ &= \|T\|\langle |T|^{1/2}x, |T|^{1/2}x\rangle = \|T\|\langle |T|x, x\rangle = \langle \|T\||T|x, x\rangle, \end{aligned}$$

de modo que $|T|^2 \leq \|T\|\,|T|$ implica

$$\operatorname{tr}(|T|^2) \leq \|T\| \ \operatorname{tr}(|T|) < \infty$$

(Proposición 4.18) y prueba que $T \in \mathscr{B}^2(H)$. □

Proposición 4.23 *Todo operador de Hilbert-Schmidt es compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $T \in \mathscr{B}^2(H)$, y sea $\mathscr{U} = \{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una base ortonormal de H. El Corolario 4.17 muestra que

$$\|T\|^2 = \|T^*T\| \leq \operatorname{tr}(T^*T) = \sum_{\alpha\in A} \|Te_\alpha\|^2.$$

Sea ahora $\varepsilon > 0$. Elegimos $e_1, \ldots, e_n \in \mathscr{U}$ tales que $\sum_{e_\alpha\notin\{e_1,\ldots,e_n\}} \|Te_\alpha\|^2 < \varepsilon^2$. Consideramos la proyección P_n de H en el subespacio generado por $\{e_1, \ldots, e_n\}$ y definimos el operador de rango finito $B_n = TP_n$. Entonces

$$\|T - B_n\|^2 = \|T(I - P_n)\|^2 \leq \sum_{e_\alpha\notin\{e_1,\ldots,e_n\}} \|Te_\alpha\|^2 < \varepsilon^2.$$

La conclusión deseada se infiere ya del Corolario 4.13. □

El siguiente resultado es de comprobación inmediata.

Proposición 4.24 (Ley del paralelogramo) *Cualquier par de operadores lineales acotados S, T en H satisface la* ley del paralelogramo*:*

$$(S+T)^*(S+T) + (S-T)^*(S-T) = 2(S^*S + T^*T).$$

Consecuentemente,

$$O \leq (S+T)^*(S+T) \leq 2(S^*S+T^*T).$$

Proposición 4.25 *Si $S,T \in \mathscr{B}^2(H)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces $S+T \in \mathscr{B}^2(H)$ y $\lambda T \in \mathscr{B}^2(H)$. Además, para cualquier operador lineal acotado B en H se tiene que $BT \in \mathscr{B}^2(H)$.*

DEMOSTRACIÓN. Usamos las Proposiciones 4.18 y 4.24 para escribir

$$\operatorname{tr}[(S+T)^*(S+T)] \leq 2\ \operatorname{tr}(S^*S) + 2\ \operatorname{tr}(T^*T)$$

y probar que $S+T \in \mathscr{B}^2(H)$. Por otra parte, si $\lambda \in \mathbb{K}$ entonces $(\lambda T)^*(\lambda T) = |\lambda|^2 T^*T$, y sigue de la Proposición 4.18 que $\lambda T \in \mathscr{B}^2(H)$. Finalmente, para cualquier base ortonormal $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ en H,

$$\sum_{\alpha\in A} \|BTe_\alpha\|^2 \leq \|B\|^2 \sum_{\alpha\in A} \|Te_\alpha\|^2 < \infty,$$

así que $BT \in \mathscr{B}^2(H)$. □

Proposición 4.26 *Para cualquier $T \in \mathscr{B}^1(H)$, se cumple:*

(i) $|T|^{1/2} \in \mathscr{B}^2(H)$.

(ii) *T es producto de dos operadores en $\mathscr{B}^2(H)$.*

(iii) *Si $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es cualquier base ortonormal en H, entonces $\sum_{\alpha\in A} |\langle Te_\alpha, e_\alpha\rangle| < \infty$. Además, $\sum_{\alpha\in A} \langle Te_\alpha, e_\alpha\rangle$ es independiente de la base elegida.*

DEMOSTRACIÓN. Como $\||T|^{1/2}x\|^2 = \langle |T|^{1/2}x, |T|^{1/2}x\rangle = \langle |T|x,x\rangle$ $(x \in H)$, se verifica (i).

Si $T = W|T|$ es la descomposición polar de T, entonces $T = (W|T|^{1/2})|T|^{1/2}$. Por (i) y la Proposición 4.25, $|T|^{1/2} \in \mathscr{B}^2(H)$ y $W|T|^{1/2} \in \mathscr{B}^2(H)$. Esto prueba (ii).

Pongamos $C^* = W|T|^{1/2}$, $B = |T|^{1/2}$. Para cualquier $\lambda \in \mathbb{K}$ y cualquier vector $x \in H$, $\|(B-\lambda C)x\|^2 \geq 0$ implica

$$2\Re\overline{\lambda}\langle Bx, Cx\rangle \leq \|Bx\|^2 + |\lambda|^2\|Cx\|^2.$$

Eligiendo aquí λ con $|\lambda| = 1$ y $\overline{\lambda}\langle Bx,Cx\rangle = |\langle Bx,Cx\rangle|$ encontramos que

$$|\langle Tx,x\rangle| = |\langle Bx,Cx\rangle| \leq \frac{1}{2}\left[\|Bx\|^2 + \|Cx\|^2\right].$$

Así pues, para cualquier base ortonormal $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$,

$$\sum_{\alpha\in A} |\langle Te_\alpha, e_\alpha\rangle| \leq \frac{1}{2}\left[\sum_{\alpha\in A}\|Be_\alpha\|^2 + \sum_{\alpha\in A}\|Ce_\alpha\|^2\right] < \infty.$$

Para terminar la demostración comprobaremos que $\sum_{\alpha\in A}\langle Te_\alpha, e_\alpha\rangle$ es independiente de la base elegida. Cualquiera que sea $x \in H$, la identidad de polarización entraña

$$\Re\langle Tx, x\rangle = \Re\langle Bx, Cx\rangle = \frac{1}{4}\left[\|(B+C)x\|^2 - \|(B-C)x\|^2\right],$$

lo que implica

$$\Re\sum_{\alpha\in A}\langle Te_\alpha, e_\alpha\rangle = \frac{1}{4}\left[\sum_{\alpha\in A}\|(B+C)e_\alpha\|^2 - \sum_{\alpha\in A}\|(B-C)e_\alpha\|^2\right].$$

Similarmente,

$$\Im\langle Tx, x\rangle = \Im\langle Bx, Cx\rangle = \frac{1}{4}\left[\|(B+iC)x\|^2 - \|(B-iC)x\|^2\right]$$

proporciona

$$\Im\sum_{\alpha\in A}\langle Te_\alpha, e_\alpha\rangle = \frac{1}{4}\left[\sum_{\alpha\in A}\|(B+iC)e_\alpha\|^2 - \sum_{\alpha\in A}\|(B-iC)e_\alpha\|^2\right].$$

Llegados a este punto, la veracidad de la afirmación sobre la independencia de la base elegida sigue inmediatamente de la Proposición 4.25. □

Estamos ahora en disposición de definir la traza de cualquier $T \in \mathscr{B}^1(H)$.

Definición 4.27 *Si $T \in \mathscr{B}^1(H)$ y $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es cualquier base ortonormal de H, definimos la* traza *de T, $\operatorname{tr}(T)$, como el número*

$$\operatorname{tr}(T) = \sum_{\alpha\in A}\langle Te_\alpha, e_\alpha\rangle.$$