Teoría espectral

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1. Introducción

La teoría espectral proporciona una herramienta muy potente para entender los operadores lineales, descomponiendo el espacio sobre el que actúan en subespacios invariantes sobre los cuales su acción es simple.

En el caso de dimensión finita, el espectro de un operador lineal sólo está formado por valores propios. La acción del operador sobre el subespacio de vectores propios correspondientes a un valor propio determinado es, sencillamente, la multiplicación por el valor propio.

Como veremos, la teoría espectral de operadores lineales acotados en espacios de dimensión infinita es más compleja. Por ejemplo, un operador puede tener un *espectro continuo* además de, o en vez de, un *espectro puntual* de valores propios. Un caso particularmente simple e importante es el de los operadores compactos normales. Éstos pueden ser aproximados por operadores de rango finito, y su teoría espectral también está próxima a la de los operadores de rango finito.

Comenzamos este tema con un breve repaso del caso finito-dimensional.

2. Diagonalización de matrices

Consideramos una matriz cuadrada A de orden n con entradas complejas como un operador lineal acotado $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Un número complejo λ es un *autovalor* o *valor propio* de A si existe un vector no nulo $u \in \mathbb{C}^n$ tal que $Au = \lambda u$. Un vector $u \in \mathbb{C}^n$ que verifica esta ecuación se llama *autovector* o *vector propio* de A asociado al autovalor λ.

La matriz A es *diagonalizable* si existe una base $\{u_1, \ldots, u_n\}$ de $\mathbb{C}^n$ formada por autovectores de A, lo que significa que existen autovalores $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ en $\mathbb{C}$, no necesariamente distintos, tales que $Au_k = \lambda_k u_k$ $(k \in \mathbb{N},\ 1 \le k \le n)$.

El conjunto de autovalores de A se denomina *espectro* de A, y se denota $\sigma(A)$. Las bases más útiles en espacios de Hilbert son las ortonormales; por tanto, es natural cuestionarse bajo qué condiciones una matriz de orden n proporciona una base ortonormal formada por autovectores.

Si $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$, entonces la matriz $U = (u_1, \ldots, u_n)$, cuyas columnas son los vectores de la base, es una matriz unitaria tal que

$$Ue_k = u_k, \qquad U^* u_k = e_k,$$

donde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{C}^n$. Si los vectores $\{u_1, \ldots, u_n\}$ son autovectores de A, entonces $U^*AUe_k = \lambda_k e_k$ $(k \in \mathbb{N},\ 1 \le k \le n)$. Sigue que $D = U^*AU$ es una matriz diagonal con los autovalores de A en la diagonal; es decir, $A = UDU^*$, donde

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Recíprocamente, si $A = UDU^*$ con U unitaria y D diagonal entonces $AU = UD$, mostrando que las columnas de U constituyen una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$ formada por vectores propios de A.

Si $A = UDU^*$, entonces $A^* = U\overline{D}U^*$. Puesto que dos matrices diagonales cualesquiera conmutan, encontramos que A conmuta con su adjunta A^*:

$$A^*A = U\overline{D}U^*UDU^* = U\overline{D}DU^* = UD\overline{D}U^* = UDU^*U\overline{D}U^* = AA^*.$$

Como sabemos, las matrices con esta propiedad se llaman *normales*. Por ejemplo, como también sabemos, las matrices hermitianas o autoadjuntas A, que satisfacen $A = A^*$, y las unitarias U, que satisfacen $U^*U = UU^* = I$, son normales.

Hemos probado que cualquier matriz con una base ortonormal de autovectores es normal. Un resultado estándar de álgebra lineal, que no demostraremos aquí, asegura la validez del recíproco:

Teorema 2.1 *Una matriz compleja A de orden n es normal si, y sólo si, $\mathbb{C}^n$ tiene una base ortonormal formada por autovectores de A.*

Una matriz normal N puede ser escrita como producto de una matriz unitaria V y otra positiva autoadjunta A. Esto sigue directamente de la forma diagonal de N. Si $N = UDU^*$ tiene autovalores $\lambda_k = |\lambda_k|e^{i\theta_k}$ podemos escribir $D = \Phi|D|$, donde Φ es una matriz diagonal con entradas $e^{i\theta_k}$ y $|D|$ es una matriz diagonal con entradas $|\lambda_k|$ $(k \in \mathbb{N},\ 1 \leq k \leq n)$. Entonces $N = VA$, donde $V = U\Phi U^*$ es unitaria y $A = U|D|U^*$ es positiva, queriendo ello decir que $u^*Au \geq 0$ $(u \in \mathbb{C}^n)$. Se comprueba inmediatamente que $VA = AV$.

La factorización $N = VA$ de la matriz normal N se denomina *descomposición polar* de N, y es el análogo matricial de la descomposición polar de un número complejo como producto de un número no negativo r y otro complejo $e^{i\theta}$ sobre la circunferencia unidad. El recíproco también es cierto: si $N = VA$, con V unitaria y A autoadjunta, y si $VA = AV$, entonces N es normal.

Los valores propios de una matriz A son las raíces del *polinomio característico* p_A de A, dado por

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Si $p_A(\lambda) = 0$ entonces $A - \lambda I$ es singular; luego, $\mathscr{N}(A - \lambda I) \neq \{0\}$, y existe un vector propio asociado. Como todo polinomio tiene al menos una raíz, resulta que toda matriz tiene al menos un autovalor, y cada autovalor distinto posee un subespacio no trivial de autovectores.

No es cierto que todas las matrices proporcionen una base de autovectores, porque la dimensión del espacio de vectores propios asociado con una raíz múltiple del polinomio característico puede ser estrictamente menor que la multiplicidad algebraica de la raíz. Llamamos *multiplicidad geométrica* de un valor propio, o simplemente *multiplicidad*, a la dimensión del espacio de autovectores asociado.

Ejemplo 2.2 *El bloque de Jordan de orden 2*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

tiene un valor propio λ de multiplicidad algebraica 2. Los autovectores asociados con λ son múltiplos escalares de $u = (1,0)^\top$, así que su multiplicidad (geométrica) es 1, y el correspondiente espacio propio no contiene una base de $\mathbb{C}^2$. La matriz no es normal, por cuanto

$$A^*A - AA^* = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq O.$$

3. Espectro de un operador

Un operador lineal acotado en un espacio de Hilbert infinito-dimensional puede carecer de valores propios, incluso si es autoadjunto. Por tanto, en general no cabe esperar que exista una base ortonormal de H formada sólo por vectores propios. En espacios de dimensión infinita necesitamos ampliar el concepto de espectro de un operador lineal, sin restringirnos solamente a los valores propios.

Definición 3.1 *El* conjunto resolvente *de un operador lineal acotado T en un espacio de Hilbert H se denota $\rho(T)$ y se define como el conjunto de los números complejos λ tales que el operador $T - \lambda I$ es biyectivo de H en H. El* espectro *de T, denotado $\sigma(T)$, es el complementario en $\mathbb{C}$ del conjunto resolvente, esto es: $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$.*

Si $T-\lambda I$ es biyectivo, el teorema de la aplicación abierta implica que su inverso $(T-\lambda I)^{-1}$ es acotado. Consecuentemente, cuando $\lambda \in \rho(T)$, tanto $T-\lambda I$ como $(T-\lambda I)^{-1}$ son operadores lineales, biyectivos y acotados.

Como en el caso finito-dimensional, se dice que un escalar λ es un *autovalor* o *valor propio* del operador lineal acotado T cuando existe un vector $x \in H \setminus \{0\}$ tal que $Tx = \lambda x$. En tal caso $\mathscr{N}(T-\lambda I) \neq \{0\}$, de manera que $T-\lambda I$ no es inyectivo, y $\lambda \in \sigma(T)$. Sin embargo, hay otras razones por las que un número complejo pertenece al espectro. De hecho, podemos partir éste como se indica a continuación.

Definición 3.2 *Sea T un operador lineal acotado en el espacio de Hilbert H.*

(i) El espectro puntual *de T, $\sigma_p(T)$, consiste en todos los $\lambda \in \sigma(T)$ tales que $T-\lambda I$ no es inyectivo. Esta parte del espectro será estudiada en la próxima sección.*

(ii) El espectro continuo *de T, $\sigma_c(T)$, consiste en todos aquellos $\lambda \in \sigma(T)$ tales que $T-\lambda I$ es inyectivo pero no sobre, y $\mathscr{R}(T-\lambda I)$ es denso en H.*

(iii) El espectro residual *de T, $\sigma_r(T)$, consiste en todos aquellos $\lambda \in \sigma(T)$ tales que $T-\lambda I$ es inyectivo pero no sobre, y $\mathscr{R}(T-\lambda I)$ no es denso en H.*

Existen operadores acotados autoadjuntos cuyo espectro es puramente continuo.

Definición 3.3 *Si λ está en el conjunto resolvente $\rho(T)$ de un operador lineal T, entonces $T-\lambda I$ es inversible en H. El operador $R_\lambda = (\lambda I - T)^{-1}$ se denomina* resolvente de T en λ, *o simplemente* resolvente de T. *Se trata de una función definida en $\rho(T) \subset \mathbb{C}$, cuyos valores son operadores.*

Lema 3.4 (Serie de Neumann) *Sea T un operador lineal acotado en un espacio de Hilbert H. Si $\|T\| < 1$ entonces $I-T$ es inversible, y*

$$(I-T)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} T^j.$$

DEMOSTRACIÓN. Bajo las hipótesis enunciadas la serie $\sum_{j=0}^{\infty} T^j$ es absolutamente convergente, ya que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|T^j\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \|T\|^j < \infty,$$

y en consecuencia $\sum_{j=0}^{\infty} T^j$ converge en la norma de operadores a un operador lineal acotado S. Es claro que

$$(I-T)\sum_{k=0}^{n} T^k = \left(\sum_{k=0}^{n} T^k\right)(I-T) = I - T^{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{1}$$

Como $\|T\| < 1$ implica $\lim_{n\to\infty} T^{n+1} = O$, haciendo $n \to \infty$ en (1) encontramos que

$$(I-T)S = S(I-T) = I,$$

lo que completa la prueba. □

Proposición 3.5 *Si T es un operador lineal acotado en un espacio de Hilbert, entonces el conjunto resolvente $\rho(T)$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ que contiene al exterior del disco $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le \|T\|\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\lambda_0 \in \rho(T)$, y escribamos

$$\lambda I - T = (\lambda_0 I - T)\left[I - (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 I - T)^{-1}\right].$$

Si $|\lambda_0 - \lambda| < \|(\lambda_0 I - T)^{-1}\|^{-1}$, es posible invertir mediante la serie de Neumann el operador que comparece en el segundo miembro. Por consiguiente, existe un disco abierto del plano complejo centrado en λ_0 y contenido en $\rho(T)$, probando que este conjunto es abierto. De otra parte, si $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > \|T\|$, la serie de Neumann también muestra que $\lambda I - T = \lambda(I - \lambda^{-1}T)$ es inversible, así que $\lambda \in \rho(T)$. □

Como el espectro $\sigma(T)$ de T es el complementario del conjunto resolvente, sigue que $\sigma(T)$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{C}$ y que

$$\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le \|T\|\}.$$

Proposición 3.6 *El espectro de un operador lineal acotado T en un espacio de Hilbert H es no vacío.*

DEMOSTRACIÓN. Si $T = O$, entonces $\sigma(T) = \{0\} \neq \emptyset$. Si $T \neq O$, para cada $x, y \in H$ definimos $f : \rho(T) \to \mathbb{C}$ mediante $f(\lambda) = \langle R_\lambda x, y\rangle$. Como antes, dado $\lambda_0 \in \rho(T)$ escribimos

$$\lambda I - T = (\lambda_0 I - T)\left[I - (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 I - T)^{-1}\right].$$

Cuando $|\lambda_0 - \lambda| < \|(\lambda_0 I - T)^{-1}\|^{-1}$, es posible invertir mediante la serie de Neumann el operador que comparece en el segundo miembro y obtener

$$R_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n (\lambda_0 I - T)^{-(n+1)}.$$

Consecuentemente

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0-\lambda)^n (\lambda_0 I - T)^{-(n+1)} x, y \right\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle (\lambda_0 I - T)^{-(n+1)} x, y \right\rangle (\lambda_0-\lambda)^n \quad (|\lambda_0-\lambda| < \|(\lambda_0 I - T)^{-1}\|^{-1}), \end{aligned}$$

probando que f es holomorfa en $\rho(T)$. Además, $\lim_{\lambda\to\infty} f(\lambda) = 0$, por cuanto $|\lambda| > \|T\|$ implica

$$R_\lambda = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} T^n,$$

de modo que

$$|f(\lambda)| = |\langle R_\lambda x, y\rangle| \leq \|R_\lambda x\|\|y\| \leq \frac{\|x\|\|y\|}{|\lambda|}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\|T\|}{|\lambda|}\right)^n = \frac{\|x\|\|y\|}{|\lambda|-\|T\|} \quad (|\lambda| > \|T\|).$$

Razonando por contradicción, supongamos que $\sigma(T) = \emptyset$. Entonces f es una función entera, y el teorema de Liouville obliga a que $f = 0$. Pero si $f = 0$ para cualesquiera $x, y \in H$, necesariamente $R_\lambda = O$ ($\lambda \in \mathbb{C}$); en particular, $R_0 = -T = O$, lo cual es imposible. Por consiguiente, $\sigma(T) \neq \emptyset$. □

No obstante lo anterior, el espectro de un operador acotado puede constar de un único punto.

Definición 3.7 *El* radio espectral *de T, denotado por $r(T)$, es el radio del menor disco centrado en cero que contiene a $\sigma(T)$,*

$$r(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\} \leq \|T\|.$$

Podemos refinar la Proposición 3.5 como sigue.

Proposición 3.8 *Para un operador lineal acotado T se satisface la* fórmula del radio espectral

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}.$$

Si T es autoadjunto entonces $r(T) = \|T\|$.

DEMOSTRACIÓN. Cuando $T = O$, la fórmula del radio espectral es trivial; supondremos, por tanto, $T \neq O$. Comenzamos estableciendo la existencia del límite del segundo miembro, al que denotaremos $L(T)$. Sea $a_n = \log\|T^n\|$ ($n \in \mathbb{N}$); queremos ver que $\{a_n/n\}_{n=1}^{\infty}$ converge. Ya que $\|T^{m+n}\| \leq \|T^m\|\|T^n\|$, tenemos $a_n \leq n a_1$ y

$a_{m+n} \leq a_m + a_n$ $(m,n \in \mathbb{N})$. Escribiendo $n = pm + q$, donde $0 \leq q < m$, encontramos que

$$\frac{a_n}{n} \leq \frac{p}{n} a_m + \frac{1}{n} a_q.$$

Si $n \to \infty$ con m fijo entonces $p/n \to 1/m$, así que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \leq \liminf_{m\to\infty} \frac{a_m}{m},$$

lo cual implica que $\{a_n/n\}_{n=1}^{\infty}$ converge, como pretendíamos.

Ahora, la serie de Neumann de T converge si $L(T) < 1$, pues en tal caso existen R con $L(T) < R < 1$ y $N \in \mathbb{N}$ satisfaciendo $\|T^n\| \leq R^n$ $(n \geq N)$. Sigue que $\lambda I - T$ puede ser invertido mediante una serie de Neumann cuando $|\lambda| > L(T)$, de manera que el espectro de T está contenido en el disco $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq L(T)\}$, obligando a que $r(T) \leq L(T)$.

Fijados $x, y \in H$, la función $f(\lambda) = \langle R_\lambda x, y\rangle$ es holomorfa si $r(T) < |\lambda|$ y admite un desarrollo en serie de potencias

$$f(\lambda) = \left\langle \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} T^n x, y \right\rangle = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \langle T^n x, y\rangle \frac{1}{\lambda^n}$$

para $\|T\| < |\lambda|$, con $r(T) \leq \|T\|$. Es decir, $f(\lambda)$ admite un desarrollo en serie de potencias si $1/|\lambda| < 1/\|T\|$ y es holomorfa si $1/|\lambda| < 1/r(T)$, donde $1/\|T\| \leq 1/r(T)$. Por consiguiente, el radio de convergencia de la serie debe ser mayor o igual que $1/r(T)$. Pero el inverso de este radio es $\limsup_{n\to\infty} |\langle T^n x, y\rangle|^{1/n}$, por lo que $\limsup_{n\to\infty} |\langle T^n x, y\rangle|^{1/n} \leq r(T)$. Como x, y son arbitrarios se infiere que $L(T) \leq r(T)$, y de aquí se concluye que $L(T) = r(T)$.

Si T es autoadjunto entonces $\|T^2\| = \|T\|^2$. Aplicando repetidamente esta relación encontramos que $\|T^{2^m}\| = \|T\|^{2^m}$ $(m \in \mathbb{N})$, y la fórmula del radio espectral, restringida a la subsucesión determinada por $n = 2^m$, conduce a la igualdad $r(T) = \|T\|$. $\square$

Nótese que $r(T) = 0$ no entraña necesariamente que $T = O$.

Definición 3.9 *Un operador lineal acotado T es* nilpotente *si* $r(T) = 0$.

4. El espectro puntual

En lo que sigue, T denotará siempre un operador lineal acotado en un espacio de Hilbert $H \neq \{0\}$.

4.1. Valores y vectores propios

Definición 4.1 *Un escalar λ es un* autovalor *o* valor propio *de T si existe un vector $x \in H \setminus \{0\}$ tal que $Tx = \lambda x$. En tal caso, se dice que x es un* vector propio *de T asociado al autovalor λ.*

Un vector propio x determina unívocamente al autovalor asociado λ, toda vez que si también se tiene $Tx = \mu x$ entonces $(\lambda - \mu)x = 0$ y $x \neq 0$ implica $\lambda = \mu$. Así, λ es valor propio de T si, y sólo si, el núcleo de $T - \lambda I$ no se reduce al vector nulo o, equivalentemente, $T - \lambda I$ no es inyectivo.

Recordemos que el conjunto de todos los valores propios de un operador T se denota $\sigma_p(T)$ y se denomina *espectro puntual* de T (Definición 3.2).

Proposición 4.2 *Sean T un operador lineal acotado y $\lambda \in \sigma_p(T)$. Entonces:*

(i) $|\lambda| \leq \|T\|$.

(ii) Si T es autoadjunto, λ es real.

(iii) Si T es positivo, $\lambda \geq 0$.

(iv) Si T es isométrico, $|\lambda| = 1$.

DEMOSTRACIÓN. Sea x un vector no nulo tal que $Tx = \lambda x$; podemos suponer que $\|x\| = 1$. Se cumple:

(i) $|\lambda| = \|\lambda x\| = \|Tx\| \leq \|T\|$.

(ii) Si T es autoadjunto, $\lambda = \lambda\langle x,x\rangle = \langle \lambda x,x\rangle = \langle Tx,x\rangle$ es real.

(iii) Si T es positivo, la igualdad que acabamos de establecer entraña que $\lambda \geq 0$.

(iv) Si T es isométrico, $|\lambda| = \|Tx\| = \|x\| = 1$. □

Proposición 4.3 *Sean T un operador normal, x un vector y λ un escalar. Entonces $Tx = \lambda x$ si, y sólo si, $T^*x = \overline{\lambda}x$. En particular:*

(i) x es un vector propio de T si, y sólo si, x es vector propio de T^*;

(ii) λ es un valor propio de T si, y sólo si, $\overline{\lambda}$ es valor propio de T^*.

DEMOSTRACIÓN. Por hipótesis, $T^*T = TT^*$. Como $(T - \lambda I)^* = T^* - \overline{\lambda}I$, evidentemente $T - \lambda I$ es normal, de modo que $\|(T - \lambda I)x\| = \|(T - \lambda I)^*x\|$ $(x \in H)$. □

Ejemplo 4.4 *Sea H un espacio de Hilbert clásico, y sea T un operador sobre H.*

(i) Si T es el operador de multiplicación por la sucesión acotada de escalares $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$, entonces $\sigma_p(T) = \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$.

(ii) Si T es el operador desplazamiento a la derecha, entonces $\sigma_p(T) = \emptyset$.

4.2. Subespacios propios

Definición 4.5 *Dados un operador lineal acotado T y un escalar λ, el núcleo del operador $T - \lambda I$ se llama* subespacio propio λ-ésimo de T*, y se designa por $N_T(\lambda)$. Abreviadamente diremos que $N_T(\lambda)$ es el* λ-espacio *de T.*

Nótese que

$$N_T(\lambda) = \{x \in H : Tx = \lambda x\}.$$

Además, $N_T(\lambda)$ es un subespacio vectorial cerrado de H, con $N_T(\lambda) \neq \{0\}$ si, y sólo si, $\lambda \in \sigma_p(T)$. Un vector $x \neq 0$ es un vector propio de T si, y sólo si, x pertenece a algún λ-espacio de T.

Teorema 4.6 *Si S, T son operadores lineales acotados que verifican $ST = TS$, entonces los λ-espacios de T son invariantes bajo S; esto es, $S(N_T(\lambda)) \subset N_T(\lambda)$ para todo escalar λ.*

DEMOSTRACIÓN. Si $x \in N_T(\lambda)$, la cadena de igualdades

$$T(Sx) = (TS)x = (ST)x = S(Tx) = S(\lambda x) = \lambda(Sx)$$

muestra que $Sx \in N_T(\lambda)$. □

Corolario 4.7 *Los λ-espacios de un operador lineal acotado T son invariantes bajo T.*

Teorema 4.8 *Si T es un operador normal,*

(i) los λ-espacios de T reducen a T;

(ii) $N_T(\lambda) = N_{T^*}(\overline{\lambda})$;

(iii) $N_T(\lambda) \perp N_T(\mu)$ siempre que $\lambda \neq \mu$.

DEMOSTRACIÓN.

(i) Como $T^*T = TT^*$, $N_T(\lambda)$ es invariante bajo T^*, por el Teorema 4.6. El Corolario 4.7 establece que $N_T(\lambda)$ también es invariante bajo T. Por tanto, $N_T(\lambda)$ reduce a T.

(ii) Es el contenido de la Proposición 4.3.

(iii) Dados $x \in N_T(\lambda)$, $y \in N_T(\mu)$, con $\lambda - \mu \neq 0$, necesitamos demostrar que $x \perp y$. Por (ii), $T^*y = \overline{\mu}y$. Entonces $\langle \lambda x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle = \langle x, \overline{\mu}y\rangle$ implica $\lambda\langle x,y\rangle = \mu\langle x,y\rangle$, o bien $(\lambda-\mu)\langle x,y\rangle = 0$, obligando a que $\langle x,y\rangle = 0$. $\square$

Definición 4.9 *Una familia de subespacios cerrados es* total *cuando el único vector x ortogonal a todo subespacio de la familia es $x = 0$.*

Teorema 4.10 *Sean S, T operadores lineales acotados y supongamos que los λ-espacios de T constituyen una familia total. Las siguientes afirmaciones sobre S son equivalentes:*

(i) $ST = TS$;

(ii) todo λ-espacio de T es invariante bajo S.

DEMOSTRACIÓN. Que (i) implica (ii) es consecuencia del Teorema 4.6. Para ver que (ii) implica (i), sea N el núcleo de $TS - ST$; se trata de demostrar que $N^\perp = \{0\}$. Fijemos cualquier escalar λ, y veamos que se verifica $N_T(\lambda) \subset N$. Si $x \in N_T(\lambda)$ entonces, por hipótesis, $Sx \in N_T(\lambda)$, de manera que $T(Sx) = \lambda(Sx) = S(\lambda x) = S(Tx)$, esto es, $TSx - STx = 0$, y $x \in N$. Consecuentemente, si $x \perp N$ entonces $x \perp N_T(\lambda)$ para todo escalar λ; como la familia de λ-espacios es total, concluimos que $x = 0$. $\square$

Veremos más adelante que los λ-espacios de un operador compacto normal cualquiera forman una familia total; esto constituye la esencia del llamado *teorema espectral* para tales operadores.

4.3. Valores propios aproximados

Definición 4.11 *Diremos que un escalar λ es un* valor propio aproximado *del operador lineal acotado T, y escribiremos $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$, si existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ de vectores tales que $\|x_n\| = 1$ $(n \in \mathbb{N})$ y $\|Tx_n - \lambda x_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Ejemplo 4.12 *(i) Todo valor propio de un operador lineal acotado T es también un valor propio aproximado de T: $\sigma_p(T) \subset \sigma_{ap}(T)$.*

(ii) *En un espacio de Hilbert clásico se considera el operador multiplicación por la sucesión acotada $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$. Si existe* $\lim_{k\to\infty}\mu_k = \mu$, *entonces* $\mu \in \sigma_{ap}(T)$. *Eligiendo* $\mu \neq \mu_k$ $(k \in \mathbb{N})$ *encontramos que la inclusión del apartado (i) es, en general, estricta.*

Teorema 4.13 *Dado un operador lineal acotado T, son equivalentes:*

(i) *Existe $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$ tal que $|\lambda| = \|T\|$;*

(ii) $\sup\{|\langle Tx, x\rangle| : \|x\| = 1\} = \|T\|$.

DEMOSTRACIÓN. Para probar que (i) implica (ii), supongamos que $|\lambda| = \|T\|$, $\|x_n\| = 1$ $(n \in \mathbb{N})$ y $\|Tx_n - \lambda x_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Se tiene

$$\begin{aligned}
\Big|\, |\langle Tx_n, x_n\rangle| - |\lambda|\, \Big| &= \Big|\, |\langle Tx_n, x_n\rangle| - |\lambda\langle x_n, x_n\rangle|\, \Big| \leq |\langle Tx_n - \lambda x_n, x_n\rangle| \\
&\leq \|Tx_n - \lambda x_n\|\,\|x_n\| = \|Tx_n - \lambda x_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

así que $|\langle Tx_n, x_n\rangle| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |\lambda| = \|T\|$. Designando por s el supremo del primer miembro de (ii) encontramos que $\|T\| \geq s \geq |\langle Tx_n, x_n\rangle| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|T\|$, por lo que $s = \|T\|$.

Recíprocamente, supongamos que se verifica (ii). Elegimos una sucesión de vectores $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que $\|x_n\| = 1$ $(n \in \mathbb{N})$ y $|\langle Tx_n, x_n\rangle| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|T\|$. Pasando a una subsucesión en caso necesario, podemos suponer que $\langle Tx_n, x_n\rangle \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$ para un escalar λ oportuno, de manera que $|\lambda| = \|T\|$. Entonces

$$\begin{aligned}
&0 \leq \|Tx_n - \lambda x_n\|^2 = \\
&= \|Tx_n\|^2 - \langle Tx_n, \lambda x_n\rangle - \langle \lambda x_n, Tx_n\rangle + |\lambda|^2 \\
&\leq \|T\|^2 - \langle Tx_n, \lambda x_n\rangle - \overline{\langle Tx_n, \lambda x_n\rangle} + |\lambda|^2 \\
&= |\lambda|^2 - \overline{\lambda}\langle Tx_n, x_n\rangle - \lambda\overline{\langle Tx_n, x_n\rangle} + |\lambda|^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2|\lambda|^2 - 2\overline{\lambda}\lambda = 0.
\end{aligned}$$

En definitiva, $\|Tx_n - \lambda x_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Se concluye que $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$. □

5. Teoría espectral de operadores compactos normales

5.1. Valores propios de operadores compactos

Teorema 5.1 *Si T es un operador compacto y $\lambda \neq 0$, entonces $N_T(\lambda)$ tiene dimensión finita.*

DEMOSTRACIÓN. De lo contrario, $N_T(\lambda)$ contiene una sucesión linealmente independiente $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, que podemos suponer ortonormal vía el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt. Dados $m,n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$, el teorema de Pitágoras permite escribir

$$\|Tx_m - Tx_n\|^2 = \|\lambda x_m - \lambda x_n\|^2 = |\lambda|^2 \|x_m - x_n\|^2 = 2|\lambda|^2 > 0,$$

así que $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$ no puede contener una subsucesión convergente. Como $\|x_n\| = 1$ $(n \in \mathbb{N})$, esto contradice la compacidad de T. □

Definición 5.2 *Supongamos que T es un operador lineal acotado y que $\lambda \in \sigma_p(T)$. Si $N_T(\lambda)$ tiene dimensión finita n, se dice que λ es un valor propio de* multiplicidad finita n*. Si $N_T(\lambda)$ es de dimensión infinita, se dice que λ tiene* multiplicidad infinita*. Si λ no es un valor propio de T, es decir, si $N_T(\lambda) = \{0\}$, resulta conveniente decir que λ es un valor propio de* multiplicidad cero.

Con esta terminología, el Teorema 5.1 afirma que *todo valor propio no nulo de un operador compacto tiene multiplicidad finita*. Este resultado no es siempre útil, ya que hay operadores compactos T con $\sigma_p(T) = \emptyset$.

Todo operador compacto *normal* tiene al menos un valor propio. Este resultado se apoya en el siguiente:

Teorema 5.3 *Si T es un operador compacto y λ es un valor propio aproximado no nulo de T, entonces $\lambda \in \sigma_p(T)$.*

DEMOSTRACIÓN. Por hipótesis, existe una sucesión de vectores $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que $\|x_n\| = 1$ $(n \in \mathbb{N})$ y $\|Tx_n - \lambda x_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Ya que T es compacto, pasando a una subsucesión en caso necesario podemos suponer que $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un cierto vector $u \in H$. Como $\|u - \lambda x_n\| \leq \|u - Tx_n\| + \|Tx_n - \lambda x_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, tenemos que $\lambda x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u$. Entonces $Tu = \text{lím}_{n\to\infty} T(\lambda x_n) = \lambda\, \text{lím}_{n\to\infty} Tx_n = \lambda u$. Finalmente, puesto que $\|u\| = \text{lím}_{n\to\infty} \|\lambda x_n\| = |\lambda| > 0$, u es un vector propio. □

Lema 5.4 *Todo operador compacto autoadjunto S tiene un autovalor λ tal que $|\lambda| = \|S\|$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $S = O$ entonces $\lambda = 0$ es un valor propio. Si $S \neq O$ entonces, por el Teorema 4.13, S tiene un valor propio aproximado λ tal que $|\lambda| = \|S\| > 0$, y basta aplicar el Teorema 5.3. □

Teorema 5.5 *Cualquier operador compacto normal T tiene al menos un valor propio. Siempre existe un valor propio λ tal que $|\lambda| = \|T\|$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea T un operador compacto normal. Dado que $\|T^*x_m - T^*x_n\| = \|T^*(x_m - x_n)\| = \|T(x_m - x_n)\| = \|Tx_m - Tx_n\|$ $(m,n \in \mathbb{N})$, resulta evidente que T^* es, a su vez, compacto (de hecho, este es el contenido del teorema de Schauder), y que, por tanto, los operadores autoadjuntos A y B que dan la forma cartesiana $T = A + iB$ de T también lo son. Por el Lema 5.4, existe un escalar real α tal que el subespacio propio $N = N_A(\alpha)$ es no nulo. Como T es normal, $AB = BA$, así que N es invariante bajo B (Teorema 4.6). Sea $R = B_{|N}$ la restricción de B a N; R es autoadjunto en N. En virtud del Lema 5.4, existen un escalar β y un vector $x \in N \setminus \{0\}$ tales que $Rx = \beta x$, esto es, $Bx = \beta x$. La definición de N entraña que $Ax = \alpha x$, y consecuentemente $Tx = Ax + iBx = (\alpha + i\beta)x = \lambda x$, donde $\lambda = \alpha + i\beta$. Así, $\lambda \in \sigma_p(T)$.

Ahora, por la Proposición 4.3, $T^*x = \overline{\lambda}x$; sigue que $T^*Tx = |\lambda|^2 x$, o bien $\|Tx\|^2 = |\lambda|^2\|x\|^2$, obligando a que sea $\|T\| \le |\lambda|$. Como también $\|T\| \ge |\lambda|$ (Proposición 4.2), necesariamente $|\lambda| = \|T\|$. □

5.2. El teorema espectral

A lo largo de esta sección, T designará un operador compacto normal fijo.

Teorema 5.6 (Teorema espectral) *Los subespacios propios de T forman una familia total. Esto es, si $x \perp N_T(\lambda)$ para todo escalar λ, necesariamente $x = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $M = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{K}} N_T(\lambda)$, y sea $N = M^{\perp}$. Se trata de demostrar que $N = \{0\}$.

Como todo $N_T(\lambda)$ reduce a T^* (Teorema 4.8), $T^*(M) \subset M$ y $T(M) \subset M$. Entonces $T(N) \subset N$ y $T^*(N) \subset N$, así que N reduce a T.

Razonando por contradicción, supongamos que $N \neq \{0\}$, y sea $R = T_{|N}$. Entonces R es un operador normal en N; probaremos que R es un operador compacto en el espacio de Hilbert N. En efecto, si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset N$ y $\|x_n\| \le 1$, la sucesión $\{Rx_n\}_{n=1}^{\infty}$, dada por $Rx_n = Tx_n$ $(n \in \mathbb{N})$, contiene una subsucesión $\{Rx_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, convergente a un cierto $u \in H$. Como N es cerrado, $u \in N$.

Por consiguiente, R es un operador compacto normal en el espacio de Hilbert $N \neq \{0\}$. En virtud del Teorema 5.5, existen un vector no nulo $x \in N$ y un escalar μ tales que $Rx = \mu x$, esto es, $Tx = \mu x$. Entonces $x \in N_T(\mu) \subset M$; pero $x \in N = M^{\perp}$, por lo que $x = 0$, una contradicción. □

Sea $P(\mu) = P_T(\mu)$ el proyector de recorrido $N_T(\mu)$. El resultado siguiente es, esencialmente, una aplicación del teorema espectral.

Teorema 5.7 *Las siguientes condiciones sobre un operador S son equivalentes:*

(i) $ST = TS$.

(ii) *Los* μ*-espacios de* T *son invariantes bajo* S.

(iii) $ST^* = T^*S$.

(iv) *Los* μ*-espacios de* T *reducen a* S.

(v) $SP(\mu) = P(\mu)S$ *para todo escalar* μ.

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 4.6, (i) implica (ii).

Para ver que (ii) implica (iii), observamos que los μ-espacios de T^* también son invariantes bajo S, toda vez que $N_{T^*}(\mu) = N_T(\overline{\mu})$ (Teorema 4.8). Puesto que, por el teorema espectral, forman una familia total, del Teorema 4.10 se concluye que $ST^* = T^*S$.

Probaremos a continuación que (iii) implica (iv). Los μ-espacios de T^* son invariantes bajo S, por el Teorema 4.6. Equivalentemente, también lo son los μ-espacios de T (Teorema 4.8). Como $S^*T = TS^*$, los μ-espacios de T son asimismo invariantes bajo S^* (Teorema 4.10).

La equivalencia de (iv) y (v) es conocida.

Por último, (iv) implica (i), en virtud del Teorema 4.10 y el teorema espectral. □

Los diferentes valores propios de T se pueden disponer en sucesión (finita o infinita).

Teorema 5.8 *Para todo* $\varepsilon > 0$*, el anillo circular* $\varepsilon \le |\lambda| \le \|T\|$ *contiene a lo sumo un número finito de valores propios distintos de* T*. Todo valor propio de* T *está situado en el círculo* $|\lambda| \le \|T\|$*; es decir,* $N_T(\lambda) = \{0\}$ *siempre que* $|\lambda| > \|T\|$*.*

DEMOSTRACIÓN. Si μ es un valor propio de T entonces, como se demostró en la Proposición 4.2, $|\mu| \le \|T\|$; esto no requiere condiciones particulares sobre T.

Dado $\varepsilon > 0$ supongamos, para alcanzar una contradicción, que existe una sucesión infinita $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ de valores propios distintos de T tales que $\varepsilon \le |\mu_n| \le \|T\|$ $(n \in \mathbb{N})$. Pasando a una subsucesión en caso necesario, podemos suponer que $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a μ, donde $\varepsilon \le |\mu| \le \|T\|$. Sea $Tx_n = \mu_n x_n$, $\|x_n\| = 1$ $(n \in \mathbb{N})$. Volviendo a pasar a una subsucesión si fuese necesario, la compacidad de T permite suponer que $Tx_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$ para algún $y \in H$. Por tanto, $\mu x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$; como $\mu_n^{-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu^{-1}$, necesariamente $x_n = \mu_n^{-1}(\mu_n x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu^{-1}y$, de donde $\|x_m - x_n\| \underset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Pero esto es imposible porque $\|x_m - x_n\|^2 = 2$ siempre que $m, n \in \mathbb{N}$, $m \ne n$, toda vez que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es ortonormal (Teorema 4.8). □

Consideramos ahora un caso particular.

Teorema 5.9 *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) T *es de rango finito.*

(ii) T *tiene solamente un número finito de valores propios distintos* $\mu_1, \ldots, \mu_n$.

En tal caso, $T = \sum_{k=1}^{n} \mu_k P(\mu_k)$.

DEMOSTRACIÓN. Estableceremos la doble implicación. Para ver que (i) implica (ii) supongamos, por el contrario, que existe una sucesión infinita $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ de valores propios distintos. Sea $Tx_k = \mu_k x_k$, $\|x_k\| = 1$ $(k \in \mathbb{N})$. La sucesión $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ es ortonormal (Teorema 4.8), y por lo tanto linealmente independiente. Como sólo puede ser nulo uno de los μ_k a lo sumo, para los restantes k se tiene $x_k = T(\mu_k^{-1} x_k) \in \mathscr{R}(T)$, impidiendo que la dimensión de $\mathscr{R}(T)$ sea finita.

Para ver que (ii) implica (i), sea N el subespacio vectorial generado por $N_T(\mu_1), \ldots, N_T(\mu_n)$. Evidentemente, N es el conjunto de los vectores x de la forma $x = \sum_{k=1}^{n} y_k$, con $y_k \in N_T(\mu_k)$ $(k \in \mathbb{N},\ 1 \leq k \leq n)$. Ya que los subespacios propios son mutuamente ortogonales, podemos escribir $N = N_T(\mu_1) \oplus \ldots \oplus N_T(\mu_n)$.

Veamos que $N = H$. Como la suma ortogonal de dos subespacios cerrados de un espacio de Hilbert es también cerrada, encontramos que N es cerrado; así pues, será suficiente mostrar que $N^{\perp} = \{0\}$. A tal fin, sea

$$M = \bigcup_{k=1}^{n} N_T(\mu_k).$$

Obviamente, $N^{\perp} = M^{\perp}$. Pero $M^{\perp} = \{0\}$, como ya se probó en la demostración del teorema espectral.

Ahora, dado un vector $x \in H$ tenemos $x = \sum_{k=1}^{n} y_k$, con $y_k \in N_T(\mu_k)$ $(k \in \mathbb{N})$. Si $j, k \in \mathbb{N}$, $j \neq k$, entonces $y_k \in N_T(\mu_j)^{\perp}$, de donde $P(\mu_j) y_k = 0$; se sigue que $P(\mu_j)x = \sum_{k=1}^{n} P(\mu_j) y_k = y_j$, luego $x = \sum_{k=1}^{n} y_k = \sum_{k=1}^{n} P(\mu_k)x$. Esto demuestra que $\sum_{k=1}^{n} P(\mu_k) = I$. Además,

$$Tx = \sum_{k=1}^{n} Ty_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k y_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k P(\mu_k)x,$$

de modo que $T = \sum_{k=1}^{n} \mu_k P(\mu_k)$. □

Obsérvese que en el Teorema 5.9, si T es inyectivo entonces H ha de tener dimensión finita.

En adelante supondremos que T no es de rango finito, es decir, que T posee infinitos valores propios distintos.

Teorema 5.10 *Suponiendo que el operador* T *no es de rango finito,* *(i) los distintos valores propios del operador T se pueden disponer en una sucesión infinita $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$;*

(ii) podemos ordenarlos de modo que $|\mu_1| \geq |\mu_2| \geq |\mu_3| \ldots$;

(iii) necesariamente $\mu_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

DEMOSTRACIÓN. Para todo $n \in \mathbb{N}$, sea Λ_n el conjunto (posiblemente vacío) de los valores propios μ de T tales que $1/n \leq |\mu| \leq \|T\|$. Por el Teorema 5.8, cada Λ_n contiene a lo sumo un número finito de autovalores distintos, y todo valor propio no nulo pertenece a algún Λ_n $(n \in \mathbb{N})$. Como $\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \ldots$, los valores propios no nulos se pueden disponer en sucesión, colocando en primer lugar los de Λ_1, luego los de $\Lambda_2 \setminus \Lambda_1$, y así sucesivamente. Esto prueba (i).

La parte (ii) es inmediata a partir de la demostración de (i). Obsérvese, incidentalmente, que $|\mu_1| = \|T\|$ (Teorema 5.5).

Por último, supongamos que $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión arbitaria de valores propios distintos de T. Dado cualquier $\varepsilon > 0$, en virtud del Teorema 5.8, $|\lambda_n| \geq \varepsilon$ para un número finito de índices $n \in \mathbb{N}$, a lo sumo, por lo que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|\lambda_n| < \varepsilon$ siempre que $n \geq N$. En consecuencia $\lambda_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, y queda probado (iii). □

En adelante, $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ designará la sucesión de valores propios distintos no nulos de T, enumerados como en el Teorema 5.10; $P(\mu_k)$ denotará el proyector cuyo rango es el subespacio propio $N_T(\mu_k)$, y $P(0)$ el proyector cuyo rango es el núcleo de T. El próximo resultado demostrará que $T = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_k P(\mu_k)$, en un sentido adecuado.

Lema 5.11 *Si $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ denota una sucesión de subespacios cerrados de H, ortogonales dos a dos, entonces son equivalentes las condiciones que siguen:*

(i) La familia $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ es total.

(ii) El menor subespacio cerrado que contiene a $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ es el propio H.

(iii) Todo $x \in H$ se puede expresar unívocamente en la forma $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$, con $x_k \in N_k$ $(k \in \mathbb{N})$ y $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2 < \infty$.

DEMOSTRACIÓN. Sea
$$M = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k.$$
Sabemos que $N = M^{\perp\perp}$ es el menor subespacio cerrado que contiene a $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$. Como $N^{\perp} = M^{\perp\perp\perp} = M^{\perp}$ encontramos que $N = H$ si, y sólo si, $M^{\perp} = \{0\}$. Esto demuestra la equivalencia entre (i) y (ii).

A fin de simplificar la exposición, en el resto de la prueba denotaremos por P_k el proyector con rango N_k $(k \in \mathbb{N})$.

Para ver que (i) implica (iii), supongamos en primer lugar que $x_k \in N_k$ $(k \in \mathbb{N})$ y $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2 < \infty$. Entonces se puede construir el vector $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k = \text{lím}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k$. Como $P_j x_k = 0$ si $k, j \in \mathbb{N}$, $k \neq j$, resulta que $P_j\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = x_j$ siempre que $n, j \in \mathbb{N}$, $n \geq j$, de donde $P_j x = \text{lím}_{n\to\infty} P_j\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = x_j$.

A continuación, dado cualquier $x \in H$ definimos $x_k = P_k x$ $(k \in \mathbb{N})$. Entonces $Q_n = \sum_{k=1}^{n} P_k$ $(n \in \mathbb{N})$ es una proyección; como los x_k $(k \in \mathbb{N})$ son mutuamente ortogonales, $\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 = \|\sum_{k=1}^{n} x_k\|^2 = \|\sum_{k=1}^{n} P_k x\|^2 = \|Q_n x\|^2 \leq \|x\|^2$, por lo que $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2 < \infty$. Ahora formamos el vector $y = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$. Para todo $j \in \mathbb{N}$, $P_j y = x_j = P_j x$, es decir, $P_j(y-x) = 0$, de donde $y - x \in N_j^{\perp}$. Como los N_j $(j \in \mathbb{N})$ forman un conjunto total, necesariamente $y - x = 0$, y así $x = y = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$. Ya que $x_j = P_j\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right)$ $(j \in \mathbb{N})$, la unicidad de esta representación es evidente.

Establezcamos, por último, que (iii) implica (i). Supongamos que $x \in N_j^{\perp}$ $(j \in \mathbb{N})$. Por (iii) podemos poner $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$, con $x_k \in N_k$ $(k \in \mathbb{N})$. Como $x \in N_j^{\perp}$, se tiene $0 = P_j x = x_j$ $(j \in \mathbb{N})$, así que $x = 0$. □

Definición 5.12 *En las condiciones del Lema 5.11, escribimos*

$$H = \bigoplus_{k=1}^{\infty} N_k.$$

Más en general, sea $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de subespacios vectoriales cerrados, y sea N el menor subespacio cerrado que contiene a todos los N_k $(k \in \mathbb{N})$. Si $x \in N_k^{\perp}$ $(k \in \mathbb{N})$, entonces $x \in N^{\perp}$. En efecto, dado $x \in N_k^{\perp}$ $(k \in \mathbb{N})$, denotamos por M el subespacio cerrado generado por x; se tiene $M \subset N_k^{\perp}$ $(k \in \mathbb{N})$, esto es, $N_k \subset M^{\perp}$ $(k \in \mathbb{N})$, de donde $N \subset M^{\perp}$, o bien $M \subset N^{\perp}$; en particular, $x \in N^{\perp}$. Se sigue que $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ constituye una familia total de subespacios en el espacio de Hilbert N. Si, además, $N_j \perp N_k$ $(j, k \in \mathbb{N},\ j \neq k)$, resulta que $N = \bigoplus_{k=1}^{\infty} N_k$ en el sentido de la Definición 5.12. Es claro que $\bigoplus_{k=1}^{\infty} N_k = N_1 \oplus \bigoplus_{k=2}^{\infty} N_k$.

Teorema 5.13 *Si $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de valores propios no nulos distintos de T, entonces:*

(i) $H = N_T(0) \oplus \bigoplus_{k=1}^{\infty} N_T(\mu_k) = N_{T^*}(0) \oplus \bigoplus_{k=1}^{\infty} N_{T^*}(\overline{\mu}_k)$;

(ii) $N_T(0) = N_{T^*}(0)$ *es el núcleo de T y de T^*, y*

$$\overline{\mathscr{R}(T)} = \overline{\mathscr{R}(T^*)} = \bigoplus_{k=1}^{\infty} N_T(\mu_k) = \bigoplus_{k=1}^{\infty} N_{T^*}(\overline{\mu}_k);$$

(iii) $\|T - \sum_{k=1}^{n} \mu_k P(\mu_k)\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *y* $\|T^* - \sum_{k=1}^{n} \overline{\mu}_k P(\mu_k)\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

DEMOSTRACIÓN. La parte (i) resulta del del Teorema 4.8, del teorema espectral (Teorema 5.6) y del Lema 5.11.

Para probar (ii), sea $N = \bigoplus_{k=1}^{\infty} N_T(\mu_k)$. A partir de (i) es evidente que $N = N_T(0)^{\perp} = N_{T^*}(0)^{\perp}$, de forma que $N = \overline{\mathscr{R}(T^*)} = \overline{\mathscr{R}(T)}$.

Por último, dado $x \in H$ tenemos que $x = P(0)x + \sum_{k=1}^{\infty} P(\mu_k)x$, de acuerdo con el Lema 5.11. Entonces, $Tx = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k P(\mu_k)x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu_k P(\mu_k)x$. Como $\mu_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, necesariamente

$$\left\| T - \sum_{k=1}^{n} \mu_k P(\mu_k) \right\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

El resto de la tesis (iii) sigue del hecho de que un operador y su adjunto tienen la misma norma. □

Corolario 5.14 *Si T es un operador compacto normal, existe una sucesión $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ de operadores de rango finito tales que $\|T - T_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Corolario 5.15 *En las condiciones del Teorema 5.13, dado un vector $y \in \overline{\mathscr{R}(T)}$ existe el desarrollo $y = \sum_{k=1}^{\infty} y_k$, donde los $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ son mutuamente ortogonales, $\sum_{k=1}^{\infty} \|y_k\|^2 < \infty$, y $Ty_k = \mu_k y_k$ $(k \in \mathbb{N})$.*

Corolario 5.16 *Para cada operador compacto normal T en un espacio de Hilbert de dimensión infinita H existen una sucesión ortonormal $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ que constituye una base de $\overline{\mathscr{R}(T)}$, y una sucesión $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ formada por autovalores no nulos de T, donde cada valor propio no nulo λ se repite un número finito de veces igual a la dimensión de $N_T(\lambda)$, tales que todo $x \in H$ admite una única representación de la forma*

$$x = v + \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n,$$

con $Tv = 0$, y

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle x, e_n \rangle e_n.$$

El resultado anterior permite dar la siguiente representación de cualquier operador compacto.

Corolario 5.17 *Sea H un espacio de Hilbert de dimensión infinita y sea T un operador lineal acotado sobre H. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) El operador T es compacto.

(ii) Existe un conjunto numerable $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ de escalares positivos cuyo único punto de acumulación es el cero, y conjuntos ortonormales $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ en H, tales que

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle u_n \qquad (x \in H).$$

DEMOSTRACIÓN. Veamos en primer lugar que (i) implica (ii). El operador $S = T^*T$ es compacto y autoadjunto, y además

$$\langle Sx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle \qquad (x \in H), \tag{2}$$

por lo que $\sigma_p(S) \subset [0, \|S\|]$. En virtud del Corolario 5.16, existen un conjunto ortonormal numerable $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ que es base de $\overline{\mathscr{R}(S)}$ y una sucesión $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ de escalares positivos, tales que

$$x = v + \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n, \quad Sx = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle x, e_n\rangle e_n \qquad (x \in H),$$

con $Sv = 0$. Nótese que (2) implica $\mathscr{N}(S) = \mathscr{N}(T)$. Entonces

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle Te_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^{1/2} \langle x, e_n\rangle \left(\mu_n^{-1/2} Te_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^{1/2} \langle x, e_n\rangle u_n,$$

donde $u_n = \mu_n^{-1/2} Te_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Resta comprobar que $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una familia ortonormal. Pero, en efecto:

$$\langle u_j, u_k\rangle = \frac{1}{\mu_j^{1/2}\mu_k^{1/2}} \langle Te_j, Te_k\rangle = \frac{1}{\mu_j^{1/2}\mu_k^{1/2}} \langle Se_j, e_k\rangle = \left(\frac{\mu_j}{\mu_k}\right)^{1/2} \langle e_j, e_k\rangle \qquad (j, k \in \mathbb{N}).$$

Veamos ahora que (ii) implica (i). Sea T el operador definido por

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle u_n \qquad (x \in H),$$

donde $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un conjunto de escalares positivos con el cero como único punto de acumulación, y sean $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ conjuntos ortonormales. Queremos ver que T es compacto. La sucesión $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada, ya que

$$|\lambda_n| = \|\lambda_n u_n\| = \|Te_n\| \le \|T\| \, \|e_n\| = \|T\| \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Así, dado $\varepsilon > 0$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : |\lambda_n| \ge \varepsilon\}$ es finito, y por lo tanto $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Sea $x \in H$, $\|x\| \le 1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\left\| Tx - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x, e_k\rangle u_k \right\| = \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} |\lambda_k|^2 |\langle x, e_k\rangle|^2 \right\}^{1/2} \le \sup_{k \ge n+1} |\lambda_k| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Al ser límite en la norma de operadores de una sucesión de operadores de rango finito, T es compacto. $\square$

5.3. Aplicaciones: alternativa de Fredholm

La alternativa de Fredholm es uno de los teoremas más importantes en matemática aplicada. Proporciona un criterio para la existencia de soluciones de ecuaciones que involucran operadores lineales.

Teorema 5.18 (Alternativa de Fredholm) *Sea T un operador compacto autoadjunto en un espacio de Hilbert H, y sea $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base de $\overline{\mathscr{R}(T)}$ tal que T se expresa en la forma*

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle x, e_n \rangle e_n$$

(Corolario 5.16).

(i) Si $\lambda \notin \sigma_p(T) \cup \{0\}$ entonces para cada $y \in H$ la ecuación $(\lambda I - T)x = y$ tiene una única solución, que viene dada por la fórmula

$$x = \frac{1}{\lambda}\left(y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{\lambda - \mu_n} \langle y, e_n \rangle e_n \right). \tag{3}$$

(ii) Si $\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}$ entonces la ecuación $(\lambda I - T)x = y$ tiene solución si, y sólo si, $y \in N_T(\lambda)^{\perp}$, siendo la solución general, en este caso,

$$x = z + \frac{1}{\lambda}\left(y + \sum_{n \in J_\lambda} \frac{\mu_n}{\lambda - \mu_n} \langle y, e_n \rangle e_n \right), \tag{4}$$

donde $z \in N_T(\lambda)$ es arbitrario y $J_\lambda = \{n \in \mathbb{N} : \mu_n \neq \lambda\}$.

(iii) La ecuación $Tx = y$ tiene solución si, y sólo si, $y \in \mathscr{N}(T)^{\perp}$ y

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle y, e_n \rangle|^2 \frac{1}{|\mu_n|^2} < \infty. \tag{5}$$

En tal caso, las soluciones vienen dadas por

$$x = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} \langle y, e_n \rangle e_n,$$

donde $z \in \mathscr{N}(T)$ es arbitrario.

DEMOSTRACIÓN. Nótese que si existe solución a la ecuación $(\lambda I - T)x = y$, con $y \in H$ y $\lambda \neq 0$, entonces ésta cumpliría

$$x = \frac{1}{\lambda}(y + Tx) = \frac{1}{\lambda}\left(y + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle x, e_n \rangle e_n \right).$$

Por tanto, $\langle x, e_n \rangle = \lambda^{-1} (\langle y, e_n \rangle + \mu_n \langle x, e_n \rangle)$, o sea,

$$(\lambda - \mu_n)\langle x, e_n \rangle = \langle y, e_n \rangle \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Para probar (i), sea $\lambda \notin \sigma_p(T) \cup \{0\}$. Entonces $\lambda - \mu_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$. La serie en (3) converge, ya que $\lim_{n\to\infty} \mu_n = 0$ implica $\sup_{n\in\mathbb{N}} |\mu_n/(\lambda - \mu_n)| < \infty$, con lo cual

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\mu_n}{\lambda - \mu_n} \right|^2 |\langle y, e_n \rangle|^2 < \infty.$$

Es claro que x, expresada por la serie (3), es la única solución de la ecuación $(\lambda I - T)x = y$.

Para probar (ii), sea ahora $\lambda \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}$. Si la ecuación $(\lambda I - T)x = y$ tiene solución entonces $y \in \mathscr{R}(\lambda I - T) \subset N_T(\lambda)^{\perp}$, ya que T es autoadjunto. Recíprocamente, si $y \in N_T(\lambda)^{\perp}$ se comprueba que el vector (4), donde $z \in N_T(\lambda)$ es arbitrario y $J_\lambda = \{n \in \mathbb{N} : \mu_n \neq \lambda\}$, satisface la ecuación $(\lambda I - T)x = y$.

Por último, para establecer (iii) observamos que si la ecuación $Tx = y$ tiene solución, entonces $y \in \mathscr{R}(T) \subset \mathscr{N}(T)^{\perp}$. Por otro lado,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle x, e_n \rangle e_n = Tx = y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, e_n \rangle e_n,$$

de donde $\langle x, e_n \rangle = \mu_n^{-1} \langle y, e_n \rangle$, y

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle y, e_n \rangle|^2 \frac{1}{|\mu_n|^2} < \infty.$$

Recíprocamente, si se cumple que

$$y \in \mathscr{N}(T)^{\perp}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |\langle y, e_n \rangle|^2 \frac{1}{|\mu_n|^2} < \infty,$$

se comprueba directamente que el vector definido por (5), para $z \in \mathscr{N}(T)$ arbitrario, es solución de la ecuación $Tx = y$. $\square$