Operadores y funcionales lineales: problemas propuestos

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

Universidad de La Laguna

6. Problemas propuestos

6.1. Funcionales lineales

1. *a*) Sea f un funcional lineal en el espacio vectorial E, $f \neq 0$, y sea N el núcleo de f. Demostrar que existe un vector y con la siguiente propiedad: todo $x \in E$ tiene una representación única $x = \lambda y + z$, donde $z \in N$ y λ es un escalar conveniente.

   b) Deducir que dos funcionales lineales con el mismo núcleo son necesariamente múltiplos escalares el uno del otro.

2. Sea X un espacio prehilbertiano.

   a) Probar que la aplicación $\Lambda : X \to X'$ definida por $(\Lambda y)x = \langle x, y \rangle$ $(x, y \in X)$ es lineal conjugada e isométrica.

   b) Demostrar que Λ es suprayectiva si, y sólo si, X es un espacio de Hilbert.

3. Probar que el dual X' de un espacio prehilbertiano X es un espacio de Hilbert.

4. *a*) Dado un espacio prehilbertiano X, denotamos por $X'' = (X')'$ su *bidual*. Demostrar que la aplicación $\Phi : X \to X''$ definida por $(\Phi x)f = f(x)$ $(x \in X,\ f \in X')$ es un isomorfismo unitario de X en $\mathscr{R}(\Phi) \subset X''$, con $\mathscr{R}(\Phi)$ denso en X''.

   b) En la notación del apartado anterior, probar que si X es un espacio de Hilbert entonces Φ es sobre (en otras palabras, todo espacio de Hilbert es *reflexivo*). Recíprocamente, demostrar que si Φ es sobre entonces X es un espacio de Hilbert.

   c) Deducir del apartado *a*) que todo espacio prehilbertiano admite una *compleción*, esto es, que dado un espacio prehilbertiano X, existen un espacio de Hilbert H y un isomorfismo unitario $T : X \to \mathscr{R}(T) \subset H$ tales que $\mathscr{R}(T)$ es denso en H. Probar que H es único salvo isomorfismos unitarios.

5. Demostrar que si X es un espacio prehilbertiano verificando $M^{\perp\perp} = M$ para todo subespacio cerrado M, entonces X es un espacio de Hilbert. [*Sugerencia*: Usar el Ejercicio 2 y repasar la demostración del teorema de representación de Fréchet-Riesz.]

6. Sea f un funcional lineal en un espacio de Hilbert, y sea N el núcleo de f.

   a) Probar que si f no es continuo entonces N es un subespacio denso.

   b) Deducir que f es continuo si, y sólo si, N es un subespacio cerrado.

7. Usando el teorema de representación de Fréchet-Riesz, demostrar que si M es un subespacio completo de un espacio prehilbertiano X, entonces $X = M \oplus M^{\perp}$.

8. Sean H un espacio de Hilbert, f un funcional lineal continuo sobre H, no idénticamente nulo, y N el núcleo de f. Probar que $N^{\perp}$ es un subespacio unidimensional.

9. Demostrar que el dual del espacio ℓ^2 real es ℓ^2.

10. Hallar el vector que según el teorema de Fréchet-Riesz representa a los funcionales definidos sobre ℓ^2 por:

    a) $f(x) = x(3) + x(4)$;

    b) $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)$.

11. Definimos

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & \ell^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & v & \longmapsto & \varphi(v) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v(n)}{2^{n-1}}. \end{array}$$

Probar que φ es un funcional lineal continuo sobre ℓ^2, determinar el vector de ℓ^2 que lo representa según el teorema de Fréchet-Riesz, y calcular $\|\varphi\|$.

12. Definimos

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & L^2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & f & \longmapsto & \varphi(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} 3x f(x)\, dx. \end{array}$$

Demostrar que φ es un funcional lineal continuo sobre $L^2(\mathbb{R})$, determinar el vector de $L^2(\mathbb{R})$ que lo representa según el teorema de Fréchet-Riesz, y calcular $\|\varphi\|$.

6.2. Aplicaciones bilineales

13. Probar que si E, F son espacios vectoriales y $\varphi : E \times E \to F$ es una aplicación bilineal, entonces

$$\varphi(x+y, x+y) - \varphi(x-y, x-y) + i\,[\varphi(x+iy, x+iy) - \varphi(x-iy, x-iy)] = 0 \quad (x, y \in E).$$

14. Si E, F, G son espacios normados y $\varphi : E \times F \to G$ es una aplicación bilineal, demostrar que son equivalentes:

    a) φ es acotada.

b) Si $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ e $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$, entonces $\varphi(x_n, y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(x,y)$.

c) Si $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ e $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, entonces $\varphi(x_n, y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

15. Sean E, F espacios normados, B un espacio de Banach. Probar que si M es un subespacio denso de E, N un subespacio denso de F, y $\varphi : M \times N \to B$ una aplicación bilineal acotada, entonces existe una única aplicación bilineal acotada $\phi : E \times F \to B$ tal que $\phi(x,y) = \varphi(x,y)$ $(x \in M,\ y \in N)$.

16. Sean E, F, G espacios normados y $\varphi : E \times F \to G$ una aplicación bilineal, continua en cada variable. Demostrar que si E ó F es un espacio de Banach, entonces φ es acotada.

6.3. Aplicaciones sesquilineales

17. Sean E, F espacios vectoriales y $\varphi : E \times E \to F$ una aplicación bilineal o sesquilineal. Probar que φ satisface la «ley del paralelogramo»:

$$\varphi(x+y, x+y) + \varphi(x-y, x-y) = 2\varphi(x,x) + 2\varphi(y,y) \quad (x, y \in E).$$

18. Demostrar que si X es un espacio prehilbertiano, G un espacio normado y $\varphi : X \times X \to G$ una aplicación bilineal acotada verificando $\varphi(y,x) = \varphi(x,y)$ $(x,y \in X)$, entonces $\|\varphi\| = \sup\{\|\varphi(x,x)\| : x \in X,\ \|x\| \leq 1\}$.

19. Probar que el producto interior de un espacio prehilbertiano X es una forma sesquilineal acotada en X. ¿Cuál es su norma?

20. Una *seminorma* en el espacio vectorial E es una aplicación $p : E \to \mathbb{R}$ que satisface los siguientes axiomas:

(i) $p(x) \geq 0$ $(x \in E)$;

(ii) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ $(\lambda \in \mathbb{K},\ x \in E)$;

(iii) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ $(x, y \in E)$.

Demostrar que si φ es una forma sesquilineal positiva en un espacio vectorial E, entonces $p(x) = \varphi(x,x)^{1/2}$ $(x \in E)$ define una seminorma sobre E.

21. Sean X, Y espacios prehilbertianos y sean X^*, Y^* sus espacios prehilbertianos complejos conjugados. Probar que son equivalentes:

a) $T : X \to Y$ es lineal conjugado, y $\langle Tx, Ty \rangle = \langle y, x \rangle$ $(x, y \in X)$.

b) $T : X \to Y^*$ es lineal, y $[Tx,Ty] = \langle x,y\rangle$ $(x,y \in X)$.

c) $T : X^* \to Y$ es lineal, y $\langle Tx,Ty\rangle = [x,y]$ $(x,y \in X^*)$.

[*Observación*: Si $X = Y$, un operador suprayectivo T que satisfaga *a*) se llama una *conjugación* del espacio prehilbertiano X. Por ejemplo, $(Tx)(n) = \overline{x(n)}$ $(x \in \ell^2,\ n \in \mathbb{N})$ define una conjugación del espacio de Hilbert ℓ^2.]

22. Sea H un espacio de Hilbert. Demostrar:

a) La aplicación $U : H \to (H')^*$ que a cada $x \in H$ le hace corresponder el funcional lineal continuo $Ux = x'$ definido por x sobre H es un isomorfismo vectorial.

b) $(H')^*$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar $[x',y'] = \langle y',x'\rangle$ $(x',y' \in (H')^*)$. El operador $T : H \to H'$ definido por $Tx = x'$ $(x \in H)$ satisface la condición *a*) del Ejercicio 21.

c) La aplicación $U : H \to (H')^*$ es un isomorfismo unitario.

23. Sean X, Y espacios prehilbertianos y sea $T : X \to Y$ una aplicación tal que $\langle Tu,Tv\rangle = \langle v,u\rangle$ $(u,v \in X)$. Probar:

a) Si $\mathscr{R}(T)$ es un subespacio de Y, entonces T es lineal conjugada.

b) En particular, si $X = Y$ y T es suprayectiva, entonces T es una conjugación de X (cf. Ejercicio 21).

c) Si $X = H$ es un espacio de Hilbert y $\mathscr{R}(T)$ es un subconjunto total de Y, entonces T es sobre.

6.4. Operador adjunto

24. Sean X, Y espacios prehilbertianos, y supongamos que $T : X \to Y$, $S : Y \to X$ son aplicaciones que verifican $\langle Tx,y\rangle = \langle x,Sy\rangle$ $(x \in X,\ y \in Y)$. Demostrar:

a) S, T son lineales.

b) Si $X = H$ es un espacio de Hilbert, entonces S, T son continuas.

c) Si, además, $Y = K$ es un espacio de Hilbert, entonces $S = T^*$.

25. Sea S un operador lineal acotado en un espacio de Hilbert, tal que $S^*S = 0$. Probar que $S = 0$.

26. Demostrar que dos operadores lineales cualesquiera S, T sobre un espacio de Hilbert satisfacen la «identidad de polarización»:

$$4T^*S = (S+T)^*(S+T) - (S-T)^*(S-T) + i[(S+iT)^*(S+iT) - (S-iT)^*(S-iT)].$$