Clases de operadores I: problemas propuestos

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

8. Problemas propuestos **1**

8.1. Operadores isométricos, unitarios, autoadjuntos, normales 1

8.2. Operadores positivos 2

8. Problemas propuestos

8.1. Operadores isométricos, unitarios, autoadjuntos, normales

1. Sean S, T operadores lineales acotados, y sea M un subconjunto total en H. Demostrar:

    a) Si $\langle Sx,y\rangle = \langle Tx,y\rangle$ $(x,y \in M)$, entonces $S = T$.

    b) Puede suceder que $\langle Sx,x\rangle = \langle Tx,x\rangle$ $(x \in M)$ y $S \neq T$.

2. Sean M, N subespacios cerrados de un espacio de Hilbert H, y sea T una isometría en H tal que $T(M) = N$. Probar que $T(M^{\perp}) \subset N^{\perp}$.

3. Sea $S : H \to H$ una aplicación satisfaciendo $\langle Sx,Sy\rangle = \langle x,y\rangle$ $(x,y \in H)$. Demostrar que si $\mathscr{R}(S)$ es un subespacio de H, entonces S es un operador isométrico.

4. Sea $T : H \to H$ una aplicación satisfaciendo $\langle Tx,Ty\rangle = \langle y,x\rangle$ $(x,y \in H)$. Probar que si $\mathscr{R}(T)$ es un subespacio de H, entonces T^2 es un operador isométrico.

5. Sean S, T operadores unitarios. Demostrar que ST es unitario.

6. Probar que un operador $T : H \to H$ es unitario si, y sólo si, T es un isomorfismo de espacios de Hilbert (es decir, es lineal, biyectivo y conserva el producto escalar). Más en general, demostrar que una aplicación $T : H \to K$ entre dos espacios de Hilbert H y K es un isomorfismo de espacios de Hilbert si, y sólo si, T es una aplicación lineal continua tal que $T^*T = I_H$ (operador identidad en H) y $TT^* = I_K$ (operador identidad en K).

7. Probar que si $T : H \to H$ es una aplicación suprayectiva que conserva el producto escalar, entonces T es un operador unitario.

8. Sea M un subconjunto total de H y sea T un operador isométrico. Demostrar que T es unitario si, y sólo si, $T(M)$ es un subconjunto total de H.

9. Sea T un operador autoadjunto, y sea $x \in H$. Probar que $Tx = 0$ si, y sólo si, $T^2x = 0$. Dar un ejemplo de un operador $T \neq O$ tal que $T^2 = O$.

10. Sea $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de operadores autoadjuntos que converge en la norma de operadores a un operador lineal acotado T. Demostrar que T es autoadjunto.

11. Probar que si T es un operador autoadjunto entonces también lo es T^n $(n \in \mathbb{N})$.

12. Se considera el operador $T:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ definido por $Tx=(\xi_1+i\xi_2,\xi_1-i\xi_2)$ $\big(x=(\xi_1,\xi_2)\in\mathbb{C}^2\big)$.

    a) Determinar T^*.

    b) Demostrar que $T^*T=TT^*=2I$.

    c) Escribir T en su forma cartesiana.

13. Sean S, T dos operadores lineales en un espacio de Hilbert H. Se dice que S es *unitariamente equivalente* a T si existe un operador unitario U en H tal que $S=UTU^{-1}=UTU^*$. Probar que si T es autoadjunto y S es unitariamente equivalente a T, entonces S también es autoadjunto.

14. Dar un ejemplo de operador normal que no sea autoadjunto ni unitario. [*Sugerencia*: Considerar $T=2iI$.]

15. Determinar el rango, núcleo, norma y adjunto del operador desplazamiento a la derecha T. ¿Es T normal? ¿Isométrico? ¿Unitario?

16. Sea $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de operadores normales que converge en la norma de operadores a un operador lineal acotado T. Demostrar que T es normal.

17. Probar que si T es normal entonces $\|T^2\|=\|T\|^2$.

8.2. Operadores positivos

18. Sean S, T operadores autoadjuntos tales que $S\le T$ y $S\ge T$. Demostrar que $S=T$.

19. Sean A, B, T operadores autoadjuntos tales que $T\ge O$ y T conmuta con A y B. Probar que $A\le B$ implica $AT\le BT$.

20. Demostrar que si $T\ge O$, entonces $I+T$ es inyectivo.

21. Encontrar operadores $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ tales que $T^2=I$ y decidir cuál de ellos es la raíz cuadrada positiva de I.

22. Sea T el operador definido sobre ℓ^2 mediante $(Tx)(1)=(Tx)(2)=0$, $(Tx)(n)=x(n)$ $(n\in\mathbb{N},\ n\ge 3)$. ¿Es T acotado? ¿Autoadjunto? ¿Positivo? Determinar una raíz cuadrada de T.

23. Sea $T\ge O$. Probar que $|\langle Tx,y\rangle|\le\langle Tx,x\rangle^{1/2}\langle Ty,y\rangle^{1/2}$ $(x\in H)$:

    a) usando $T^{1/2}$;

    b) sin usar $T^{1/2}$.

24. Sea $T \geq O$. Demostrar que $\|Tx\| \leq \|T\|^{1/2}\langle Tx, x\rangle^{1/2}$ $(x \in H)$, de forma que $\langle Tx, x\rangle = 0$ si, y sólo si, $Tx = 0$.