Clases de operadores II: problemas propuestos

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

Universidad de La Laguna

5. Problemas propuestos

5.1. Proyecciones

1. Ilustrar el teorema de las sucesiones monótonas mediante la sucesión $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$, donde, para cada $n \in \mathbb{N}$, P_n denota la proyección de ℓ^2 sobre el subespacio de ℓ^2 cuyos términos son todos nulos desde el $(n+1)$-ésimo en adelante.

2. Probar que una proyección P en un espacio de Hilbert H satisface $O \leq P \leq I$. ¿Bajo qué condiciones será:

   a) $P = O$;

   b) $P = I$?

3. Encontrar operadores lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ que sean idempotentes pero no autoadjuntos (y, por tanto, no sean proyecciones).

4. Mostrar con un contraejemplo que la suma de dos proyecciones no es necesariamente una proyección.

5. En $H = \mathbb{R}^3 = \{x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) : \xi_i \in \mathbb{R},\ i = 1,2,3\}$, sean Q la proyección en el plano $O\xi_1\xi_2$ y P la proyección sobre la recta $\xi_1 = \xi_2$ del mismo plano. Dibujar los rangos M, N de estas proyecciones, sus complementos ortogonales $M^{\perp}$, $N^{\perp}$, y el complemento ortogonal de M en N. Determinar las coordenadas de $(Q-P)x$ $(x \in \mathbb{R}^3)$. ¿Es $P+Q$ una proyección?

6. Probar que si T es una isometría, entonces TT^* es una proyección.

7. Sea W un operador lineal acotado en un espacio de Hilbert H. Demostrar:

   a) W es una isometría parcial si, y sólo si, W^*W es una proyección.

   b) Si W es una isometría parcial, entonces $WW^*W = W$ y W^* es una isometría parcial.

8. Se considera el operador desplazamiento a la derecha S en un espacio de Hilbert clásico. Probar que S y S^* son isometrías parciales, identificar sus espacios inicial y final, y describir las proyecciones S^*S y SS^*.

5.2. Subespacios invariantes y reducción de operadores

9. Supongamos que T es una isometría y M es un subespacio invariante bajo T. Demostrar:

a) Si $T(M) \subset M$, entonces M reduce a T.

b) Si $T_{|M}$ es normal, entonces M reduce a T y $T_{|M}$ es unitario.

10. Diremos que un operador lineal acotado T en un espacio de Hilbert H es *hiponormal* si $\|T^*x\| \leq \|Tx\|$ $(x \in H)$. Probar:

a) T es hiponormal si, y sólo si, $TT^* \leq T^*T$.

b) Si T es isométrico, entonces T es hiponormal.

c) Si T es hiponormal, M es invariante bajo T, y $T_{|M}$ es normal, entonces M reduce a T.

11. Sea M un subespacio cerrado, invariante bajo T, y sea $R = T_{|M}$. Demostrar:

a) $\|R^*x\| \leq \|T^*x\|$ $(x \in M)$.

b) Si T es hiponormal, también lo es R.

12. Probar que un operador lineal acotado T es hiponormal si, y sólo si, existe un operador lineal acotado V, con $\|V\| \leq 1$, tal que $T^* = VT$.

13. Sea $T = A + iB$ la forma cartesiana del operador T, y sea $AB = C + iD$ la forma cartesiana de AB. Demostrar que T es hiponormal si, y sólo si, $D \leq O$.

14. Sea $Tx_k = x_{k+1}$ $(k \in \mathbb{N})$ el operador desplazamiento a la derecha. Probar que el único subespacio de dimensión finita M invariante bajo T es $M = \{0\}$.

15. Sea $Tx_k = x_{k+1}$ $(k \in \mathbb{N})$ el operador desplazamiento a la derecha. Demostrar que existe un subespacio vectorial M, distinto de $\{0\}$ y de H, que satisface $T(M) \subset M$ y $T^*(M) \subset M$. Probar que M es necesariamente denso en H, y que entre todos los subespacios que verifican esta propiedad existe uno mínimo para la inclusión.

5.3. Operadores compactos

16. Demostrar que ningún operador compacto en un espacio de Hilbert de dimensión infinita es inversible.

17. Probar que un operador lineal acotado T en un espacio de Hilbert es compacto si, y sólo si, T^*T es compacto.

18. Sea H un espacio de Hilbert. Demostrar que si y, z son vectores dados, con $y \neq 0$, existe un operador compacto T tal que $Ty = z$. Más en general, probar que el conjunto de los operadores compactos es

n veces transitivo en el siguiente sentido: si $y_1, \ldots, y_n$ son linealmente independientes y $z_1, \ldots, z_n$ son arbitrarios, existe un operador compacto T tal que $Ty_k = z_k$ $(k \in \mathbb{N})$.