Teoría espectral: problemas propuestos

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

6. Problemas propuestos

6.1. Valores y vectores propios

1. Determinar los valores y vectores propios del operador $T = \mu I$, donde μ es un escalar.

2. Sea P una proyección con rango N, donde N es un subespacio propio de H, esto es, distinto del nulo y del total. Probar que los únicos valores propios de P son 0 y 1, y que todo vector propio de P pertenece a N ó a $N^{\perp}$.

3. Sean H un espacio de Hilbert clásico, $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ una base ortonormal de H, y T el operador de multiplicación por la sucesión acotada de escalares $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$, definido mediante $Tx_k = \mu_k x_k$ $(k \in \mathbb{N})$. Demostrar que $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ son todos y los únicos valores propios de T.

4. Probar que el operador desplazamiento a la derecha carece de valores propios. Deducir que si λ es un valor propio de un operador T, no se sigue necesariamente que $\overline{\lambda}$ sea valor propio de T^*.

5. Considerando el operador desplazamiento bilateral, demostrar que existen operadores normales carentes de valores propios.

6. Probar que existen operadores autoadjuntos que carecen de valores propios.

7. Recordemos que un operador lineal continuo T en un espacio de Hilbert H se dice *hiponormal* si $\|T^*x\| \leq \|Tx\|$ $(x \in H)$. Demostrar que si T es hiponormal, $x \in H$ y $Tx = \lambda x$, entonces $T^*x = \overline{\lambda}x$.

8. Sea T un operador lineal acotado en H. Probar:

   a) Un vector $x \neq 0$ es un vector propio de T si, y sólo si, $|\langle Tx, x\rangle| = \|Tx\|\|x\|$.

   b) Para que T tenga un valor propio λ verificando $|\lambda| = \|T\|$, es condición necesaria y suficiente que exista un vector $x \in H$ con $\|x\| = 1$ y $|\langle Tx, x\rangle| = \|T\|$.

   c) Si $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de escalares tales que $\alpha_k \geq 0$ $(k \in \mathbb{N})$ y $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 = 1$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \alpha_{k+1} < 1$.

6.2. Subespacios propios

9. Si T es cualquier operador lineal y continuo y P_λ es el proyector de recorrido $\mathscr{N}_T(\lambda)$, demostrar que $P_\lambda T P_\lambda = T P_\lambda = \lambda P_\lambda$.

10. Supongamos que T es un operador normal cuyos λ-espacios forman una familia total. Probar que si T es un operador tal que $ST = TS$, entonces $ST^* = T^*S$.

11. Si los λ-espacios de un operador T forman una familia total y $\mathcal{N}_T(\lambda) \subset \mathcal{N}_{T^*}(\overline{\lambda})$ para todo λ, demostrar que T es normal.

12. Sea T un operador hiponormal. Probar:

    a) Para todo escalar λ, $\mathcal{N}_T(\lambda) \subset \mathcal{N}_{T^*}(\overline{\lambda})$.

    b) Fijado un escalar λ, sea $N = \mathcal{N}_T(\lambda)$. Entonces N reduce a T y $T_{|N}$ es normal.

    c) Se tiene $\mathcal{N}_T(\lambda) \perp \mathcal{N}_T(\mu)$ siempre que $\lambda \neq \mu$.

    d) Si los λ-espacios de T forman una familia total, entonces T es normal.

6.3. Valores propios aproximados

13. En las condiciones del Ejercicio 3, supongamos además que la sucesión $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ converge hacia un límite $\mu \neq \mu_k$ $(k \in \mathbb{N})$. Demostrar que $\mu \in \sigma_{ap}(T)$.

14. Probar:

    a) T es inversible si, y sólo si, T y T^* son acotados inferiormente.

    b) Si $T^*T \geq I$ y $TT^* \geq I$, entonces T es inversible.

    c) Si T es normal y $T^*T \geq I$, entonces T es inversible.

    d) Si T es normal y acotado inferiormente, entonces T es inversible.

    e) T es inversible si, y sólo si, T^* lo es.

15. Demostrar:

    a) $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$ si, y sólo si, $T - \lambda I$ no es acotado inferiormente.

    b) Si $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$, entonces $T - \lambda I$ no es inversible.

16. Sean T un operador y λ un escalar. Probar que son equivalentes:

    a) $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$.

    b) Existe una sucesión $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ de operadores que verifican $\|S_n\| = 1$ $(n \in \mathbb{N})$ y $\|(T - \lambda I)S_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

17. Demostrar que cualquier operador tiene al menos un valor propio aproximado.

18. Probar que si $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$, no se sigue necesariamente que $\overline{\lambda} \in \sigma_{ap}(T^*)$.

19. Sea T un operador hiponormal. Demostrar:

    a) Si $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$, entonces $\overline{\lambda} \in \sigma_{ap}(T^*)$.

    b) Sean λ, μ dos valores propios aproximados distintos de T. Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones de vectores unitarios tales que $\|Tx_n - \lambda x_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ y $\|Ty_n - \mu y_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, entonces $\langle x_n, y_n\rangle \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

20. Sea T un operador lineal acotado en un espacio de Hilbert. Recordemos que se define el *espectro* de T, $\sigma(T)$, como el conjunto de los escalares λ tales que $T - \lambda I$ no es inversible. Probar:

    a) $\sigma_{ap}(T) \subset \sigma(T)$.

    b) $\lambda \in \sigma(T)$ si, y sólo si, $\overline{\lambda} \in \sigma(T^*)$.

    c) $\sigma(T + \lambda I) = \{\mu + \lambda : \mu \in \sigma(T)\}$.

    d) $\sigma(\lambda T) = \{\lambda\mu : \mu \in \sigma(T)\}$.

    e) El operador T es inversible si, y sólo si, $0 \notin \sigma(T)$.

    f) Si T es inversible entonces $\sigma(T^{-1}) = \left\{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(T)\right\}$.

    g) Si T es autoadjunto entonces $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.

    h) Si T es positivo entonces $\sigma(T) \subset [0, \infty[$.

    i) Para todo T, $\sigma(T)$ es un conjunto cerrado no vacío de números complejos, y $|\lambda| \leq \|T\|$ $(\lambda \in \sigma(T))$.

    j) Si T es normal, entonces $\lambda \in \sigma(T)$ si, y sólo si, $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$.

    k) Si T es unitario entonces $|\lambda| = 1$ $(\lambda \in \sigma(T))$.

21. Sea T el operador desplazamiento a la derecha. Demostrar que $\sigma(T)$ es el disco unidad cerrado del plano complejo.

22. Sean $\Lambda \neq \emptyset$ cualquier conjunto cerrado y acotado de números complejos y H un espacio de Hilbert clásico. Probar que existe un operador normal T tal que:

    a) $\Lambda = \sigma_{ap}(T)$.

    b) $\Lambda = \sigma(T)$.

23. Un operador lineal acotado se dice *nilpotente generalizado* si su único valor propio aproximado es el cero. Demostrar que son equivalentes:

a) T es nilpotente generalizado.

b) $\sigma(T) = \{0\}$.

c) $\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = 0$, donde se define $T^1 = T$, $T^{n+1} = T^n T$ $(n \in \mathbb{N})$.

[*Observación*: Un operador T es *nilpotente* si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n = O$.]

24. Probar que el operador $S = TR$ es nilpotente generalizado, donde T es el desplazamiento a la derecha y R es la multiplicación por $\{1/k\}_{k=1}^{\infty}$ en un espacio de Hilbert clásico.

6.4. Teoría espectral de operadores compactos normales

25. Demostrar:

   a) Si T es un operador compacto normal, existe $x \in H$, con $\|x\| = 1$, tal que $|\langle Tx, x\rangle| = \|T\|$.

   b) Para todo operador compacto normal T, se tiene: $\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : \|x\| = 1\}$.

26. Probar que si H es de dimensión finita entonces todo operador T tiene al menos un valor propio.

27. Demostrar que si T, S son operadores normales, $ST = TS$ y S es compacto, entonces $S+T$, ST son normales.

28. Sean T, S operadores lineales continuos en un espacio de Hilbert. Probar:

   a) *(Teorema de Fuglede)* Si T es normal y $ST = TS$, entonces $ST^* = T^*S$.

   b) Si T, S son normales y $ST = TS$, entonces $S+T$, ST son normales.

   c) Si T, S son hiponormales y $ST^* = T^*S$, entonces $T - S$ es hiponormal.

   d) Si T es normal, S hiponormal y $ST = TS$, entonces $T - S$ es hiponormal.

29. Demostrar que dada una sucesión de operadores compactos normales que conmutan dos a dos, existe un vector propio común a todos ellos.