Operadores no acotados: problemas propuestos

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

3. Problemas propuestos

3.1. Operadores densamente definidos, simétricos, autoadjuntos y cerrados

1. Sean S, T operadores lineales densamente definidos. Probar:

   a) T^* es lineal.

   b) $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$ $(\alpha \in \mathbb{K})$.

   c) $S^* + T^* \prec (S+T)^*$. ¿Qué condición debemos imponer para que esta expresión tenga sentido?

2. Demostrar que cualquier operador lineal acotado $T : \mathscr{D}(T) \to H$ cuyo dominio no es denso en H admite una extensión lineal acotada a H cuya norma es $\|T\|$.

3. Sean H un espacio de Hilbert complejo y $T : \mathscr{D}(T) \to H$ un operador lineal densamente definido en H. Probar que T es simétrico si, y sólo si, $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ $(x \in \mathscr{D}(T))$.

4. Demostrar que si T es lineal y densamente definido en H y si T^* está definido en todo H, entonces T es acotado.

5. Sea $T : \mathscr{D}(T) \to H$ un operador lineal, acotado y simétrico. Probar que T tiene una extensión a $\overline{\mathscr{D}(T)}$ lineal, acotada y simétrica.

6. Un operador lineal es *maximalmente simétrico* si es simétrico y no tiene extensiones simétricas propias. Demostrar que todo operador lineal autoadjunto es maximalmente simétrico.

7. Sea $T : \mathscr{D}(T) \to \ell^2$, donde $\mathscr{D}(T) \subset \ell^2$ consiste en todas las sucesiones $x = \{\xi(j)\}_{j=1}^{\infty}$ con un número finito de términos distintos de cero y $(Tx)(j) = j\xi(j)$ $(j \in \mathbb{N})$. Probar:

   a) T es acotado y no cerrado.

   b) T tiene una extensión lineal cerrada $\widetilde{T}$ a

   $$\mathscr{D}(\widetilde{T}) = \left\{ x = \{\xi(j)\}_{j=1}^{\infty} \in \ell^2 : \sum_{j=1}^{\infty} j^2 |\xi(j)|^2 < \infty \right\},$$

   definida por $(\widetilde{T}x)(j) = j\xi(j)$ $(j \in \mathbb{N})$.

8. Sea $T : \mathscr{D}(T) \subset H \to H$ un operador lineal cerrado. Demostrar que si T es inyectivo, entonces T^{-1} es cerrado.