Operadores y funcionales lineales

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1. Introducción

Recordemos que una aplicación T entre dos espacios normados $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ sobre el mismo cuerpo escalar $\mathbb{K}$ se denomina *operador*. En el caso particular de que F sea el cuerpo $\mathbb{K}$ con la norma del módulo o valor absoluto, se dice que T es una *forma* o *funcional*. El operador T es *lineal* si $T(\lambda x + \mu y) = \lambda Tx + \mu Ty$ para cualesquiera escalares $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ y vectores $x, y \in E$, y es una *isometría* si $\|Tx\|_F = \|x\|_E$ para todo $x \in E$. Un operador lineal T se dice *acotado* si $\|T\|$ es finita, donde

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|_F : x \in E,\ \|x\|_E \leq 1\}. \tag{1}$$

En lo sucesivo, por simplicidad, denotaremos de igual modo la norma en E y en F sin que ello induzca a confusión, ya que el contexto dejará claro de qué norma se trata en cada caso.

Se comprueba fácilmente que un operador lineal $T : E \to F$ es continuo (en cualquier punto de E) si, y sólo si, lo es en el origen de E y que, a su vez, esto equivale a que T sea acotado. Un *isomorfismo* es un operador lineal, biyectivo y bicontinuo (continuo con inverso continuo).

Dado un operador $T : E \to F$, denotamos por $\mathscr{N}(T) = \{x \in E : Tx = 0\}$ el *núcleo* de T y por $\mathscr{R}(T) = T(E)$ su *rango* o *recorrido*.

Proposición 1.1 *Sea $T : E \to F$ un operador lineal acotado. Se cumple:*

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{\|Tx\| : \|x\| < 1\} \\ &= \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\} \\ &= \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \neq 0\right\}. \end{aligned}$$

2. Funcionales lineales

Definición 2.1 *El espacio E' de todos los funcionales lineales continuos sobre un espacio normado E se denomina* espacio dual *de E.*

La norma (1) (con $F = \mathbb{K}$ y $\|\cdot\|_F = |\cdot|$) provee efectivamente a E' de estructura de espacio normado.

A continuación nos ocuparemos de caracterizar los funcionales lineales continuos en espacios de Hilbert.

Si X es un espacio prehilbertiano cualquiera, todo vector $y \in X$ determina un funcional lineal continuo y' sobre X mediante $y'(x) = \langle x, y\rangle$ $(x \in X)$. Esto da lugar a la aplicación $y \mapsto y'$ de X en X', que es lineal conjugada e isométrica. Comenzamos estableciendo que en espacios de Hilbert es también suprayectiva, resultado que constituye el núcleo central de este tema.

Teorema 2.2 (Teorema de representación de Fréchet-Riesz) *Si f es un funcional lineal continuo en un espacio de Hilbert H entonces existe un único vector $y \in H$ que representa a f, en el sentido de que $f(x) = \langle x, y \rangle$ $(x \in H)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f \in H'$ y sea $N = \mathcal{N}(f)$ el núcleo de f, que es un subespacio vectorial cerrado de H. Si $N = H$, entonces $f = 0$ y se toma $y = 0$. Si $N \neq H$, por el teorema de la proyección ortogonal existe $z \in N^{\perp}$ tal que $f(z) = 1$. Ahora, para cada $x \in H$ se tiene $x - f(x)z \in N$; y como $z \in N^{\perp}$, necesariamente $0 = \langle x - f(x)z, z \rangle = \langle x, z \rangle - f(x)\|z\|^2$, así que $f(x) = \|z\|^{-2}\langle x, z \rangle = \langle x, y \rangle$, donde $y = \|z\|^{-2}z$ es independiente de x. Esto prueba la afirmación de existencia.

Para establecer la unicidad, basta observar que si $\langle x, y \rangle = \langle x, w \rangle$ para todo $x \in H$ en particular será $y - w \perp y - w$, con lo que $y = w$. □

3. Aplicaciones bilineales

Definición 3.1 *Si E, F, G son espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo escalar $\mathbb{K}$, una aplicación $\varphi : E \times F \to G$ se llama* bilineal *si es lineal en cada variable (el prefijo «bi» significa «dos veces»). En el caso particular de que $G = \mathbb{K}$, tal aplicación se llama* forma *o* funcional bilineal*. Si E, F, G son espacios normados, una aplicación bilineal $\varphi : E \times F \to G$ es* acotada *si existe una constante M tal que $\|\varphi(x, y)\| \leq M\|x\|\|y\|$ $(x \in E,\ y \in F)$. Si, además, $G = \mathbb{K}$, φ se dice una* forma bilineal acotada*. La* norma *de una aplicación bilineal acotada $\varphi : E \times F \to G$ es el número*

$$\|\varphi\| = \sup\{\|\varphi(x, y)\| : \|x\| \leq 1,\ \|y\| \leq 1\}.$$

Proposición 3.2 *Sea $\varphi : E \times F \to G$ una aplicación bilineal acotada. Se cumple:*

$$\begin{aligned}\|\varphi\| &= \sup\{\|\varphi(x, y)\| : \|x\| < 1,\ \|y\| < 1\} \\ &= \sup\{\|\varphi(x, y)\| : \|x\| = 1,\ \|y\| = 1\} \\ &= \sup\left\{\frac{\|\varphi(x, y)\|}{\|x\|\|y\|} : x \neq 0,\ y \neq 0\right\}.\end{aligned}$$

4. Aplicaciones sesquilineales

Definición 4.1 *Si E, F, G son espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo escalar $\mathbb{K}$, una aplicación $\varphi : E \times F \to G$ se llama* sesquilineal *si es lineal en la primera variable y semilineal, o lineal conjugada, en la segunda (el prefijo «sesqui» indica «una vez y media», y el prefijo «semi», «media vez»). En el caso particular de que $G = \mathbb{K}$, tal aplicación se llama* forma *o* funcional sesquilineal*. Si E, F, G son espacios normados, una aplicación sesquilineal $\varphi : E \times F \to G$ es* acotada *si existe una constante M tal que $\|\varphi(x,y)\| \leq M\|x\|\|y\|$ $(x \in E,\ y \in F)$. Si, además, $G = \mathbb{K}$, φ se dice una* forma sesquilineal acotada*.*

Definición 4.2 *Dado un espacio vectorial E, llamamos* complejo conjugado *de E al espacio vectorial E^* obtenido de la forma siguiente: el conjunto E^* es el mismo que E; la suma en $E^* \times E^*$ se define igual que en $E \times E$; y el producto por escalares en $\mathbb{K} \times E^*$, que denotaremos $\circ$, se define como $\lambda \circ x = \overline{\lambda} x$, donde el producto por escalares del segundo miembro es el definido en $\mathbb{K} \times E$.*

Es fácil comprobar que fijada una estructura de espacio vectorial en el conjunto E, la de E^* constituye la única estructura de espacio vectorial que se puede definir sobre E de manera que la identidad $I : E \to E^*$ sea semilineal.

Si E es un espacio normado, E^* también lo es con la norma definida de igual modo que en E. En el caso de que $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sea un espacio prehilbertiano, el espacio vectorial X^* es también un espacio prehilbertiano con el producto escalar $[x,y] = \langle y,x \rangle$. Por tanto, X^* adquiere una norma mediante este producto escalar, y otra a través de la norma de X; ambas normas coinciden. Además, X es un espacio de Hilbert si, y sólo si, X^* lo es.

La razón para introducir el espacio E^* se encuentra en el siguiente resultado:

Proposición 4.3 *Sean E, F, G espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo escalar $\mathbb{K}$. Una aplicación $\varphi : E \times F \to G$ es sesquilineal si, y sólo si, $\varphi : E \times F^* \to G$ es bilineal.*

La identidad de polarización se puede generalizar a aplicaciones sesquilineales:

Proposición 4.4 (Identidad de polarización) *Si E, F son espacios vectoriales y $\varphi : E \times E \to F$ es sesquilineal, entonces*

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{4}\{\varphi(x+y,x+y) - \varphi(x-y,x-y) + i[\varphi(x+iy,x+iy) - \varphi(x-iy,x-iy)]\} \quad (x,y \in E).$$

DEMOSTRACIÓN. Fijados $x,y \in E$, se tiene

$$\varphi(x+y,x+y) = \varphi(x,x) + \varphi(x,y) + \varphi(y,x) + \varphi(y,y).$$

Sustituyendo y en esta expresión sucesivamente por $-y$, iy, $-iy$ encontramos que

$$\varphi(x-y,x-y) = \varphi(x,x) - \varphi(x,y) - \varphi(y,x) + \varphi(y,y),$$

$$\varphi(x+iy,x+iy) = \varphi(x,x) - i\varphi(x,y) + i\varphi(y,x) + \varphi(y,y),$$

$$\varphi(x-iy,x-iy) = \varphi(x,x) + i\varphi(x,y) - i\varphi(y,x) + \varphi(y,y).$$

Por tanto:

$$\varphi(x+y,x+y) - \varphi(x-y,x-y) = 2\varphi(x,y) + 2\varphi(y,x), \tag{2}$$

$$\varphi(x+iy,x+iy) - \varphi(x-iy,x-iy) = -2i\varphi(x,y) + 2i\varphi(y,x),$$

$$i[\varphi(x+iy,x+iy) - \varphi(x-iy,x-iy)] = 2\varphi(x,y) - 2\varphi(y,x). \tag{3}$$

La identidad buscada resulta de la combinación de (2) y (3). □

Consecuencia inmediata de este resultado es el siguiente:

Proposición 4.5 *Si $\varphi : E\times E \to F$ y $\psi : E\times E \to F$ son aplicaciones sesquilineales tales que $\varphi(x,x) = \psi(x,x)$ $(x \in E)$, entonces $\varphi(x,y) = \psi(x,y)$ $(x,y \in E)$.*

Definición 4.6 *Sea E un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Una forma sesquilineal $\varphi : E\times E \to \mathbb{K}$ se dice* hermítica *si $\varphi(y,x) = \overline{\varphi(x,y)}$ $(x,y \in E)$.*

Proposición 4.7 *Una forma sesquilineal $\varphi : E\times E \to \mathbb{K}$ es hermítica si, y sólo si, $\varphi(x,x)$ es real para todo $x \in E$.*

DEMOSTRACIÓN. Si φ es hermítica, para cada $x \in E$ se tiene $\varphi(x,x) = \overline{\varphi(x,x)}$, por lo que $\varphi(x,x)$ es real.

Recíprocamente, supongamos que $\varphi(x,x)$ es real para todo $x \in E$. Definimos $\psi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)}$ $(x,y \in E)$; entonces ψ es una forma sesquilineal en $E\times E$, y, por hipótesis, $\psi(x,x) = \varphi(x,x)$ $(x \in E)$. La Proposición 4.5 prueba ahora que $\psi = \varphi$ y, con ello, que φ es hermítica. □

Definición 4.8 *Sea E un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Una forma sesquilineal $\varphi : E\times E \to \mathbb{K}$ se dice* positiva *si $\varphi(x,x) \geq 0$ para todo $x \in E$.*

En particular, toda forma sesquilineal positiva es hermítica. Las formas sesquilineales positivas satisfacen la «desigualdad de Cauchy-Schwarz».

Proposición 4.9 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz) *Si $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ es una forma sesquilineal positiva, entonces*

$$|\varphi(x,y)|^2 \leq \varphi(x,x)\varphi(y,y) \quad (x,y \in E).$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $x,y \in E$. Si $\varphi(x,x) > 0$ o bien $\varphi(y,y) > 0$, basta proceder como en la demostración de la desigualdad de Cauchy-Schwarz «genuina».

Supongamos, por tanto, que $\varphi(x,x) = \varphi(y,y) = 0$. Para todo escalar λ, tenemos que

$$0 \leq \varphi(x+\lambda y, x+\lambda y) = \varphi(x,x) + \overline{\lambda}\varphi(x,y) + \lambda\varphi(y,x) + |\lambda|^2\varphi(y,y) = \overline{\lambda}\varphi(x,y) + \lambda\varphi(y,x).$$

En particular, para $\lambda = -\varphi(x,y)$ se obtiene $0 \leq -2|\varphi(x,y)|^2$; luego, $\varphi(x,y) = 0$. □

4.1. Aplicaciones sesquilineales acotadas

Definición 4.10 *Si E, F, G son espacios normados, una aplicación sesquilineal $\varphi : E \times F \to G$ es* acotada *si existe una constante M tal que $\|\varphi(x,y)\| \leq M\|x\|\|y\|$ $(x \in E,\ y \in F)$. Si, además, $G = \mathbb{K}$, φ se dice una* forma sesquilineal acotada *en $E \times F$.*

En otras palabras, φ es una aplicación sesquilineal acotada de $E \times F$ en G si, y sólo si, φ es una aplicación bilineal acotada de $E \times F^*$ en G (cf. Definición 4.2).

Definición 4.11 *Se llama* norma *de la aplicación sesquilineal acotada $\varphi : E \times F \to G$ al número*

$$\|\varphi\| = \sup\{\|\varphi(x,y)\| : \|x\| \leq 1,\ \|y\| \leq 1\}.$$

Proposición 4.12 *Sea $\varphi : E \times F \to G$ una aplicación sesquilineal acotada. Se cumple:*

$$\begin{aligned} \|\varphi\| &= \sup\{\|\varphi(x,y)\| : \|x\| < 1,\ \|y\| < 1\} \\ &= \sup\{\|\varphi(x,y)\| : \|x\| = 1,\ \|y\| = 1\} \\ &= \sup\left\{\frac{\|\varphi(x,y)\|}{\|x\|\|y\|} : x \neq 0,\ y \neq 0\right\}. \end{aligned}$$

Proposición 4.13 *Si X es un espacio prehilbertiano, la norma de una forma sesquilineal acotada hermítica*

$\varphi : X \times X \to \mathbb{K}$ *viene dada por la fórmula*

$$\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(x,x)| : \|x\| \le 1\}. \tag{4}$$

DEMOSTRACIÓN. Si $\|x\| \le 1$, por definición de $\|\varphi\|$ es $|\varphi(x,x)| \le \|\varphi\|$; luego, el supremo en (4) es un número real finito $s \le \|\varphi\|$. Evidentemente, $|\varphi(x,x)| \le s\|x\|^2$ para cada $x \in X$.

Recíprocamente, fijemos $x, y \in X$, con $\|x\| \le 1$, $\|y\| \le 1$. Pretendemos demostrar que $|\varphi(x,y)| \le s$.

Supongamos, en primer lugar, que $\varphi(x,y)$ es un número real. Ya que φ satisface la identidad de polarización (Proposición 4.4) y $\varphi(z,z)$ es real para cada $z \in X$ (Proposición 4.7), necesariamente

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{4}\{\varphi(x+y,x+y) - \varphi(x-y,x-y)\}.$$

Ahora, la ley del paralelogramo entraña que

$$|\varphi(x,y)| \le \frac{1}{4}\{|\varphi(x+y,x+y)| + |\varphi(x-y,x-y)|\} \le \frac{s}{4}\left\{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right\} = 2\cdot\frac{s}{4}\{\|x\|^2 + \|y\|^2\} \le s.$$

En general, si $\varphi(x,y)$ es un número complejo se puede escribir $|\varphi(x,y)| = \lambda\varphi(x,y)$, donde λ es un número complejo adecuado, de módulo 1. Entonces $\varphi(\lambda x, y) = \lambda\varphi(x,y) = |\varphi(x,y)|$ es real. Puesto que $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| = \|x\| \le 1$, la desigualdad buscada vale para $\varphi(\lambda x, y)$, y concluimos que $|\varphi(x,y)| \le s$, como se pretendía. □

4.2. Formas sesquilineales acotadas en espacios de Hilbert

Teorema 4.14 (Teorema de representación de Riesz) *Si H y K son espacios de Hilbert y $T : H \to K$ es un operador lineal continuo, la fórmula $\varphi_T(x,y) = \langle Tx, y\rangle$ define una forma sesquilineal acotada φ_T en $H \times K$, tal que $\|\varphi_T\| = \|T\|$. Recíprocamente, dada una forma sesquilineal acotada φ en $H \times K$, existe un único operador lineal continuo $T : H \to K$ tal que $\varphi = \varphi_T$; además, $\|\varphi\| = \|\varphi_T\| = \|T\|$.*

DEMOSTRACIÓN. Para probar la primera parte, comenzamos observando que φ_T es trivialmente sesquilineal. Sean $x \in H$, $y \in K$ con $\|x\| \le 1$, $\|y\| \le 1$. Entonces $|\langle Tx, y\rangle| \le \|Tx\|\|y\| \le \|T\|\|x\|\|y\| \le \|T\|$. Por tanto,

$$s = \sup\{|\langle Tx, y\rangle| : \|x\| \le 1,\ \|y\| \le 1\} \le \|T\|.$$

Inversamente, sean $x \in H$, $y \in K$ con $\|x\| \le 1$, $\|y\| \le 1$. Entonces $|\langle y, Tx\rangle| = |\langle Tx, y\rangle| \le s$. Fijado x, $z \mapsto \langle z, Tx\rangle$

es un funcional lineal continuo sobre K, de norma $\|Tx\|$. Por tanto, tomando supremos en y encontramos que $\|Tx\| \leq s$. Tomando ahora supremos en x concluimos que $\|T\| \leq s$, y con ello que $\|T\| = s$.

Recíprocamente, dado $x \in H$ el problema consiste en definir $Tx \in K$ tal que $\varphi_T = \varphi$. A tal fin, consideremos el funcional lineal f_x definido sobre K mediante $f_x(y) = \overline{\varphi(x,y)}$ $(y \in K)$. Este f_x es continuo, con $\|f_x\| \leq \|\varphi\|\|x\|$. El teorema de representación de Fréchet-Riesz proporciona un único $z \in K$ tal que $f_x(y) = \langle y,z\rangle$ $(y \in K)$ y $\|f_x\| = \|z\|$. Definiendo $Tx = z$ se cumple que $\langle y,Tx\rangle = f_x(y) = \overline{\varphi(x,y)}$ $(y \in K)$ o, equivalentemente, $\langle Tx,y\rangle = \varphi(x,y)$ $(y \in K)$.

La aplicación $T : H \to K$ así definida es lineal, ya que para cualesquiera $u,v \in H$ y $\lambda,\mu \in \mathbb{K}$ se verifica

$$\begin{aligned}\langle T(\lambda u+\mu v),y\rangle &= \varphi(\lambda u+\mu v,y) = \lambda\varphi(u,y)+\mu\varphi(v,y)\\ &= \lambda\langle Tu,y\rangle+\mu\langle Tv,y\rangle = \langle \lambda Tu+\mu Tv,y\rangle \quad (y \in K).\end{aligned}$$

Además, $\|Tx\| = \|z\| = \|f_x\| \leq \|\varphi\|\|x\|$, de modo que T es continua y su norma no excede $\|\varphi\|$. Puesto que $\varphi = \varphi_T$, se infiere de la primera parte que $\|\varphi\| = \|\varphi_T\| = \|T\|$.

Para establecer la unicidad de T, supongamos que $S : H \to K$ es otra aplicación satisfaciendo $\langle Sx,y\rangle = \varphi(x,y) = \langle Tx,y\rangle$ $(x \in H,\ y \in K)$. La igualdad $\langle Sx,y\rangle = \langle Tx,y\rangle$ $(x \in H,\ y \in K)$ ya entraña que $S = T$. □

5. Operadores adjuntos

En toda esta sección, H, K y L designarán espacios de Hilbert.

Teorema 5.1 (Operador adjunto) *Si $T : H \to K$ es un operador lineal continuo, existe un único operador lineal continuo $T^* : K \to H$ tal que $\langle Tx,y\rangle = \langle x,T^*y\rangle$ $(x \in H,\ y \in K)$. Además, $\|T^*\| = \|T\|$.*

DEMOSTRACIÓN. Basta aplicar el teorema de representación de Riesz a la forma sesquilineal acotada $\psi(y,x) = \langle y,Tx\rangle$ $(x \in H,\ y \in K)$, con $\|\psi\| = \|T\|$. □

Definición 5.2 *En la notación del Teorema 5.1, el operador T^* se llama* adjunto *de T.*

El resto de esta sección está dedicado a establecer algunas propiedades de los operadores adjuntos que serán de gran utilidad en lo sucesivo.

Proposición 5.3 *Si $S : H \to K$, $T : H \to K$ son operadores lineales continuos y λ es un escalar, se verifica:*

(i) $\langle T^*y, x\rangle = \langle y, Tx\rangle$ $(x \in H,\ y \in K)$*;*

(ii) $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$*;*

(iii) $(S+T)^* = S^* + T^*$*;*

(iv) $T^{**} = T$*;*

(v) $\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2$*;*

(vi) $T^*T = 0$ *si, y sólo si,* $T = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Las propiedades (i)-(iv) son consecuencias inmediatas de la definición, del mismo modo que (vi) se deduce inmediatamente de (v).

Para probar (v), obsérvese que están definidas las composiciones $T^*T : H \to H$ y $TT^* : K \to K$. Si $x \in H$, $\|x\| \leq 1$, se tiene $\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle \leq \|T^*Tx\|\|x\| \leq \|T^*Tx\| \leq \|T^*T\|$; tomando supremos en x encontramos que $\|T\|^2 \leq \|T^*T\|$. Inversamente, es claro que $\|T^*T\| \leq \|T^*\|\|T\| = \|T\|^2$. Por último, la validez de la igualdad $\|TT^*\| = \|T\|^2$ sigue sin más que intercambiar los papeles de T^* y T. □

Proposición 5.4 *Si* $T : H \to K$*,* $S : K \to L$ *son operadores lineales continuos, entonces* $(ST)^* = T^*S^*$.

DEMOSTRACIÓN. De nuevo, es consecuencia inmediata de la definición. □

Proposición 5.5 *Sea* $T : H \to K$ *un operador lineal continuo. Si* $M \subset H$*,* $N \subset K$ *y* $T(M) \subset N$*, entonces* $T^*(N^\perp) \subset M^\perp$*. En particular, si* M *y* N *son subespacios cerrados entonces* $T(M) \subset N$ *si, y sólo si,* $T^*(N^\perp) \subset M^\perp$.

DEMOSTRACIÓN. Probemos la primera afirmación. Dado $z \in K$ con $z \perp N$, el problema consiste en demostrar que $T^*z \perp M$. Ahora bien, si $x \in M$ entonces $Tx \in N$, de donde $0 = \langle z, Tx\rangle = \langle T^*z, x\rangle$.

Si M y N son subespacios cerrados, basta observar que $T^*(N^\perp) \subset M^\perp$ implica $T^{**}(M^{\perp\perp}) \subset N^{\perp\perp}$, con $T^{**} = T$, $M^{\perp\perp} = M$ y $N^{\perp\perp} = N$. □

Teorema 5.6 *Sea* $T : H \to K$ *un operador lineal continuo. Se verifica:*

(i) $\mathscr{N}(T) = \mathscr{R}(T^*)^\perp$*;*

(ii) $\mathscr{N}(T)^\perp = \overline{\mathscr{R}(T^*)}$*;*

(iii) $\mathscr{N}(T^*) = \mathscr{R}(T)^\perp$*;*

(iv) $\mathscr{N}(T^*)^\perp = \overline{\mathscr{R}(T)}$.

DEMOSTRACIÓN. Sólo probaremos la primera igualdad, ya que la segunda se deduce inmediatamente de ésta y las dos últimas se obtienen de las dos primeras sin más que intercambiar en ellas los papeles de T y T^*.

Aunque (i) se puede establecer probando directamente la doble inclusión, daremos una demostración que se apoya en la Proposición 5.5.

Sean $M = \mathscr{N}(T)$ y $N = \mathscr{N}(T^*)$. Como $T(M) \subset \{0\}$, la Proposición 5.5 establece que $T^*(K) = T^*(\{0\}^\perp) \subset M^\perp$, esto es,

$$\mathscr{R}(T^*) \subset \mathscr{N}(T)^\perp. \tag{5}$$

Por otra parte, trivialmente $T(H) \subset \mathscr{R}(T)$, así que $T^*(\mathscr{R}(T)^\perp) \subset H^\perp = \{0\}$ implica $T^*(\mathscr{R}(T)^\perp) = \{0\}$ o, lo que es igual,

$$\mathscr{R}(T)^\perp \subset \mathscr{N}(T^*). \tag{6}$$

Aplicando (6) a T^* en sustitución de T,

$$\mathscr{R}(T^*)^\perp \subset \mathscr{N}(T). \tag{7}$$

De (5),

$$\mathscr{N}(T) = \mathscr{N}(T)^{\perp\perp} \subset \mathscr{R}(T^*)^\perp. \tag{8}$$

Finalmente, (7) y (8) conducen a (i). □