Espacios de Hilbert: problemas propuestos

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

6. Problemas propuestos

6.1. Espacios con producto interior

1. Sea X un espacio con producto interior real. Probar que si $x, y \in X$ verifican $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, entonces $x \perp y$. ¿Vale este resultado si X es complejo?

2. Sea X un espacio con producto escalar. Demostrar la *identidad de Apolonio*

$$\|z-x\|^2 + \|z-y\|^2 = \frac{1}{2}\|x-y\|^2 + 2\left\|z - \frac{1}{2}(x+y)\right\|^2 \quad (x, y, z \in X),$$

   a) directamente;

   b) usando la ley del paralelogramo.

3. Sea X un espacio con producto interior. Probar:

   a) Si $u, v \in X$ y $\langle x, u\rangle = \langle x, v\rangle$ $(x \in X)$, entonces $u = v$.

   b) Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, $x \in X$ son tales que $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$ y $\lim_{n\to\infty} \langle x_n, x\rangle = \langle x, x\rangle$, entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

   c) Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ y si $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, entonces

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, y\rangle \quad (y \in X).$$

4. Demostrar que en un espacio vectorial de dimensión finita todas las normas son equivalentes, aunque no todas provienen de un producto escalar.

6.2. Espacios de Hilbert

5. Probar que todo espacio pre-Hilbert de dimensión finita es Hilbert.

6. Se considera el espacio con producto interior X formado por el polinomio $x = 0$ junto con todos los polinomios reales en $t \in [a, b]$ de grado menor o igual que 2, dotado del producto escalar

$$\langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\, dt \quad (x, y \in X).$$

   a) Demostrar que X es completo.

   b) Se considera el conjunto $Y = \{x \in X : x(a) = 0\}$. ¿Es Y un subespacio de X?

c) ¿Forman un subespacio de X todos los $x \in X$ de grado 2?

7. Sea

$$M = \left\{ f \in C[0,1] : \int_0^{1/2} f(t)\, dt - \int_{1/2}^1 f(t)\, dt = 1 \right\}.$$

Probar que M es un subconjunto convexo y cerrado de $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ que carece de elementos de norma mínima. ¿Existe alguna contradicción entre este hecho y el teorema del vector minimizante?

8. Sea

$$M = \left\{ f \in L^1[0,1] : \int_0^1 f(t)\, dt = 1 \right\}.$$

Demostrar que M es un subconjunto convexo y cerrado de $(L^1[0,1], \|\cdot\|_1)$ que contiene infinitos elementos de norma mínima. ¿Existe alguna contradicción entre este hecho y el teorema del vector minimizante?

9. Probar que en el espacio de Hilbert ℓ^2:

a) $M = \{e_k\}_{k=1}^\infty$ no es convexo, es cerrado, y contiene infinitos elementos de norma mínima.

b) $M = \{(1+1/k)\, e_k\}_{k=1}^\infty$ no es convexo, es cerrado, y no contiene elementos de norma mínima.

Explicar por qué estos ejemplos no contradicen el teorema del vector minimizante.

6.3. Ortogonalidad

10. Sea

$$M = \left\{ f \in L^2[0,2\pi] : \int_0^{2\pi} f(x)\, dx = 0 \right\}.$$

Suponiendo que nos encontramos en el punto $g(x) = 3\cos^2 5x$, ¿cuánto mide el camino más corto a elegir para llegar a M?

11. Sea M un subconjunto convexo cerrado del espacio de Hilbert H, y sean $y_0 \in M$, $x \in H$. Demostrar que

$$\|x - y_0\| = \text{mín}\,\{\|x-y\| : y \in M\}$$

si, y sólo si,

$$\Re\langle x - y_0, y - y_0\rangle \leq 0 \quad (y \in M).$$

Aquí, $\Re z$ denota la parte real del número complejo z.

12. Sea H un espacio de Hilbert, y sea M un subespacio cerrado de H. Probar que

$$\text{mín}\,\{\|x-x_0\| : x\in M\} = \text{máx}\left\{|\langle x_0,y\rangle| : y\in M^{\perp}, \|y\|=1\right\}.$$

13. Calcular

$$\underset{a,b,c}{\text{mín}} \int_{-1}^{1} |x^3-a-bx-cx^2|^2 dx$$

y obtener

$$\underset{g}{\text{máx}} \int_{-1}^{1} x^3 g(x)dx,$$

donde g está sujeta a las restricciones:

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx = \int_{-1}^{1} xg(x)dx = \int_{-1}^{1} x^2 g(x)dx = 0, \qquad \int_{-1}^{1} |g(x)|^2 dx = 1.$$

14. Demostrar que si H es un espacio de Hilbert y M un subespacio de H, entonces M es denso en H si, y sólo si, $M^{\perp} = \{0\}$.

15. Sea

$$M = \left\{ x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2 : \sum_{n=1}^{\infty} x(n) = 0 \right\}.$$

Probar:

a) M es un subespacio de ℓ^2.

b) M es denso en ℓ^2.

c) $M + M^{\perp} \neq \ell^2$. ¿Se contradice el teorema de la proyección ortogonal?

6.4. Ortonormalidad

16. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión linealmente independiente de vectores del espacio de Hilbert H, y sea $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión definida por

$$z_1 = x_1, \qquad z_n = x_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle x_n, z_i\rangle}{\|z_i\|^2} z_i \quad (n\in\mathbb{N},\ n\geq 2).$$

Demostrar que $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión ortogonal.

17. *(Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt)* Sea $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ un conjunto de vectores linealmente independientes en un espacio de Hilbert H. Probar que existe un conjunto ortonormal $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que los vectores $\{u_1, \dots, u_N\}$ y $\{v_1, \dots, v_N\}$ $(N \in \mathbb{N})$ generan el mismo subespacio de H.

18. Demostrar que las funciones

$$x_0(t) = \frac{1}{2\pi}, \quad x_{2n-1}(t) = \frac{1}{\pi} \cos nt, \quad x_{2n}(t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{sen} nt \quad (n \in \mathbb{N})$$

constituyen una sucesión ortogonal en $L^2[-\pi, \pi]$. ¿Es esta sucesión ortonormal?

19. Un espacio de Hilbert se dice *separable* si contiene un conjunto denso numerable.

    a) Usando el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt, probar la existencia de bases ortonormales contables en espacios de Hilbert separables sin apelar al principio de maximalidad de Hausdorff.

    b) Demostrar que un espacio de Hilbert H es separable si, y sólo si, H admite una base ortonormal contable.