Test de autoevaluación

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

1. Sea
$$M = \left\{ f \in L^2[0,2\pi] : \int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0 \right\}.$$
Suponiendo que nos encontramos en el punto $g(x) = 3\cos^2 5x$, ¿cuánto mide el camino más corto a elegir para llegar a M?
   a) 0.
   b) 1.
   c) $9\pi^2/2$.
   d) $3\sqrt{\pi/2}$.

2. Sea M un subconjunto arbitrario del espacio de Hilbert H. ¿Cuál es la condición necesaria y suficiente para que M sea total en H?
   a) $M^\perp = \{0\}$.
   b) $M \cap M^\perp = \{0\}$.
   c) $M^\perp = \emptyset$.
   d) $M \cap M^\perp = \emptyset$.

3. Todo espacio pre-Hilbert de dimensión finita es Hilbert.
   a) Verdadero.
   b) Falso.

4. Sea $S : \ell^2 \to \ell^2$ el operador definido mediante
$$(Sx)(2j-1) = 0, \quad (Sx)(2j) = (-1)^j x(2j) \quad (j \in \mathbb{N}).$$
La norma de S vale:
   a) 1/2.
   b) 1.
   c) 2.
   d) $1/\sqrt{2}$.

5. Sea S el operador definido en la Cuestión 4. El núcleo de S, $\mathcal{N}(S)$, está formado por:

a) Las sucesiones cuyos términos pares son todos nulos.

b) Las sucesiones cuyos términos impares son todos nulos.

c) Las sucesiones cuyos términos son todos nulos a partir de uno en adelante.

d) La sucesión idénticamente nula.

6. Sea S el operador definido en la Cuestión 4. El rango de S, $\mathscr{R}(S)$, está formado por:

a) Las sucesiones cuyos términos pares son todos nulos.

b) Las sucesiones cuyos términos impares son todos nulos.

c) Las sucesiones cuyos términos son todos nulos a partir de uno en adelante.

d) La sucesión idénticamente nula.

7. El operador S definido en la Cuestión 4 tiene rango cerrado.

a) Verdadero.

b) Falso.

8. Sea $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base ortonormal de un espacio de Hilbert H, y sea T un operador diagonal, con diagonal $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$; esto es,

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \qquad \left(x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \in H \right).$$

Se verifica que T es compacto si, y sólo si:

a) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

b) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 1$.

c) $\lim_{n\to\infty} |\alpha_n| = \infty$.

d) No existe $\lim_{n\to\infty} \alpha_n$.

9. Sea P una proyección, y sea I el operador identidad. ¿Qué igualdad satisface el operador $S = 2P - I$?

a) $S^2 = I$.

b) $S^2 = P$.

c) $S^2 = I - P$.

d) $S^2 = P - I$.

10. Sea I el operador identidad en un espacio de Hilbert complejo. El operador $T = 2iI$ es:

a) Normal.

b) Autoadjunto.

c) Unitario.

d) Positivo.

11. El espectro puntual aproximado del operador desplazamiento a la derecha en un espacio de Hilbert complejo clásico es:

a) $[-1,1]$.

b) $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.

c) $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

d) $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}$.

12. Sea U el operador desplazamiento a la derecha en un espacio de Hilbert complejo clásico. Se sabe que $1 \in \sigma_{ap}(U)$. La norma de $(1/2)(U+U^*)$ vale:

a) 1/2.

b) 1.

c) 2.

d) $1/\sqrt{2}$.

13. Sea T un operador compacto normal. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos podrían ser el espectro puntual de T?

a) $\{0\} \cup \{1/n\}_{n=1}^{\infty}$.

b) $\{0,1\}$.

c) $[0,1]$.

d) $]0,1[$.

14. Sea T un operador normal de rango finito. ¿Cuál de los siguientes conjuntos podría ser el espectro puntual de T?

a) $\{0\} \cup \{1/n\}_{n=1}^{\infty}$.

b) $\{0,1\}$.

c) $[0,1]$.

d) $]0,1[$.

15. Sean A, B operadores densamente definidos en H. ¿Cuáles de los siguientes enunciados son correctos?

    a) Si $A \prec B$, entonces $A^* \prec B^*$.

    b) Si $A \prec B$, entonces $B^* \prec A^*$.

    c) Si B^* es densamente definido, entonces $B \prec B^{**}$.

    d) Si B^* es densamente definido, entonces $B^{**} \prec B$.

16. Los operadores posición y momento son acotados, densamente definidos, autoadjuntos y cerrados en $L^2(\mathbb{R})$.

    a) Verdadero.

    b) Falso.