Tema 1: Modelos dinámicos discretos en Economía

Contenidos

Los estudios económicos y de finanzas son una gran fuente de modelos discretos. En este tema introductorio presentaremos algunos modelos de primer y segundo orden recogidos en el excelente libro [1].

1. Interés simple y compuesto

El **interés simple** es el beneficio que se obtiene de una inversión cuando los intereses producidos durante cada período de tiempo que dura la inversión se deben únicamente al capital inicial.

Es decir, si C_t es el capital que el inversionista tiene en el momento $t = 0, 1, 2, \ldots$ (meses, años, etc.), y r es la ratio o tipo de interés, se tiene que

$$C_{t+1} = C_t + rC_0, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots, \qquad C_0 > 0 \text{ dado}$$

cuyas soluciones se calculan fácilmente iterando

$$C_t = C_{t-1} + rC_0 = C_{t-2} + 2rC_0 = \cdots = C_0 + t\,rC_0, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots.$$

Con este tipo de interés, el capital invertido crecería linealmente con el tiempo. Sin embargo, en las transacciones bancarias reales lo que se suele aplicar es el llamado **interés compuesto**, en el que los intereses que se obtienen al final de cada período de inversión no se retiran sino que se reinvierten o añaden al capital anterior.

Formalmente, en este caso

$$C_{t+1} = C_t + rC_t, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots, \qquad C_0 > 0 \text{ dado}$$

por lo que las soluciones son exponenciales pues

$$C_t = (1 + r)C_{t-1} = (1 + r)^2 C_{t-2} = \cdots = (1 + r)^t C_0, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots.$$

Ejemplo Comparar los intereses obtenidos con interés simple o compuesto si invertimos durante cinco años un capital inicial de $C_0 = 10000$€ con un tipo de interés nominal anual del 3% abonados mensualmente.

Nota: en el lenguaje bancario un tipo de interés anual i abonado mensualmente significa que $r = \dfrac{i}{100 \times 12}$. Si es abonado diariamente $r = \dfrac{i}{100 \times 365}$. En este caso, $r = \dfrac{3}{100 \times 12} = 0.0025$

Solución:

Interés simple: $C_{60} = 11500$€ Interés compuesto: $C_{60} = 11616.17$€

2. Modelo francés de amortización de préstamos

Este es el modelo que se aplica habitualmente en los préstamos e hipotecas que se contratan con los bancos. En este modelo se supone que se presta un capital inicial $C_0 > 0$ a comienzos del primer período (o sea, cuando $t = 0$) con un tipo de interés constante $r > 0$ para cada uno de los períodos considerados (meses o días habitualmente) y que en cada período el receptor del préstamo paga una cantidad fija $A > 0$. Si C_t es el capital pendiente de pago al principio de cada período t, verifica el *modelo francés de amortización de préstamos*

$$C_t = C_{t-1} + rC_{t-1} - A, \qquad t = 1, 2, 3, \dots, \qquad C_0 > 0 \text{ dado} \tag{1}$$

lo que es un problema de valores iniciales en diferencias de orden 1.

Para calcular su solución general hay que recordar la fórmula para calcular la suma de n términos de una progresión geométrica

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \begin{cases} n, & \text{si } x = 1, \\ \dfrac{x^n - 1}{x - 1}, & \text{si } x \neq 1. \end{cases} \tag{2}$$

Así,

$$\begin{aligned} C_t &= (1+r)C_{t-1} - A = (1+r)\left((1+r)C_{t-2} - A\right) - A \\ &= (1+r)^2 C_{t-2} - (1 + (1+r))A = (1+r)^3 C_{t-3} - (1 + (1+r) + (1+r)^2)A = \dots \\ &= (1+r)^t C_0 - (1 + (1+r) + (1+r)^2 + \cdots + (1+r)^{t-1})A \\ &= (1+r)^t C_0 - \frac{(1+r)^t - 1}{(1+r) - 1} A \end{aligned}$$

por lo que la solución general resulta

$$C_t = \left(C_0 - \frac{A}{r}\right)(1+r)^t + \frac{A}{r}, \qquad t = 0, 1, 2, \dots$$

Esta expresión permite calcular la cuota A a pagar por el receptor del préstamo dada la cantidad inicial C_0, el tipo de interés r y el número total de cuotas a pagar T, ya que para ello tiene que ocurrir que

$$C_T = 0 \Leftrightarrow \frac{(1+r)^T - 1}{r} A = (1+r)^T C_0 \Leftrightarrow A = \frac{r(1+r)^T}{(1+r)^T - 1} C_0. \tag{3}$$

Por otra parte, de (1) se puede observar que la cantidad fija que paga el receptor del préstamo se puede escribir como

$$A = C_{t-1} - C_t + rC_{t-1} = A_t + I_t,$$

donde $A_t = C_{t-1} - C_t$ se llama *cuota de amortización*, es decir, la cantidad en que disminuye la deuda pendiente del período de $t-1$ al t, e $I_t = rC_{t-1}$ son los intereses acumulados a lo largo del período t por la deuda pendiente.

Ejemplo Queremos pedir una hipoteca de 100000€ para comprar una casa. El banco nos ofrece un interés anual del *euribor*[1] + 1% a 15 años. Si el *euribor* del primer año es el 0.5%, ¿cuál será la cuota que tendremos que pagar al banco mensualmente? ¿y si la pudiéramos hacer a 25 años? Si el segundo año se revisa el índice y el *euribor* ha subido al 2%, ¿cuál será la cuota a pagar el segundo año?

Ayuda: En las hipotecas a tipo variable, cada año se rehace la cuenta (3), tomando como C_0 el capital que resta por pagar en ese momento, como r el nuevo tipo de interés y en lugar de T se aplica para $T - 12$.

[1] El euribor es un índice de referencia publicado diariamente que indica el tipo de interés promedio al que un gran número de bancos europeos dicen concederse préstamos a corto plazo entre ellos para prestárselo a terceros, y que es muy utilizado actualmente para referenciar la mayor parte de las hipotecas.

3. El modelo de Samuelson

El *modelo de Samuelson* describe el funcionamiento de una economía cerrada a partir de cuatro variables relacionadas: la renta nacional Y_t, la inversión privada I_t, el consumo privado C_t y el gasto público G_t en un período de tiempo t. La evolución de estas variables se supone que sigue las tres reglas siguientes:

1. El único determinante del consumo en un período es la renta en el período inmediatamente anterior, siguiendo la relación lineal
$$C_t = cY_{t-1}, \qquad 0 < c < 1 \quad \text{(multiplicador keynesiano)}$$
2. La inversión en cada período depende linealmente de la diferencia entre las rentas obtenidas en los dos períodos inmediatamente anteriores:
$$I_t = v(Y_{t-1} - Y_{t-2}), \qquad v > 0 \quad \text{(acelerador)}$$
3. Se verifica la *condición de equilibrio macroeconómico*, esto es, la producción nacional debe coincidir con la demanda nacional en cada período de tiempo:
$$Y_t = C_t + I_t + G_t$$

Si además suponemos que el gasto público se mantiene constante a lo largo del tiempo ($G_t = G$, $\forall t \geq 0$), reuniendo todas las propiedades anteriores se tiene
$$Y_t = cY_{t-1} + v(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + G, \quad t = 2, 3, \dots,$$
o, lo que es lo mismo, la ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes *de orden 2*:
$$Y_t - (c+v)Y_{t-1} + vY_{t-2} = G, \quad t = 2, 3, \dots,$$
Obsérvese que el período inicial y el primer período no vienen determinados por esta ecuación, ya que la regla de la inversión privada entra en juego solo a partir de $t = 2$. Por tanto, para que este modelo esté definido unívocamente necesitaremos conocer los valores de Y_0 e Y_1.

Es definitiva, para estudiar cómo va a evolucionar la renta nacional a lo largo del tiempo, necesitaremos encontrar la solución del *problema de valores iniciales de orden 2*
$$Y_t - (c+v)Y_{t-1} + vY_{t-2} = G, \quad t = 2, 3, \dots, \quad Y_0 \geq 0,\ Y_1 \geq 0 \text{ dados.} \tag{4}$$
Para resolver dicho problema necesitamos ampliar nuestro conocimiento sobre ecuaciones en diferencias. En el siguiente tema, comenzaremos estudiando las lineales de coeficientes constantes, a las que pertenece este modelo (4).

4. Ejercicios propuestos

1. El *modelo dinámico discreto de la telaraña oferta-demanda* viene dado por las siguientes funciones de demanda y oferta
$$D_t = a + bP_t, \quad O_t = c + dP_{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots, \quad b < 0,\ d > 0,\ a > c$$
donde P_t es el precio del producto en el mes t y P_0 es conocido. Estas variables tienen que cumplir la condición de equilibrio usual $D_t = O_t$, $\forall t \geq 1$.
   (a) Aplicar dicha condición de equilibrio a las funciones anteriores y deducir la ecuación en diferencias lineal que modeliza la evolución del precio P_t a lo largo del tiempo.
   (b) Resolver la ecuación obtenida en el apartado anterior para los valores $a = 5$, $b = -2$, $c = -2$, $d = 1$ y precio inicial $P_0 = 2$.
   (c) ¿Qué va a pasar con el precio P_t calculado en el apartado anterior cuando $t \to \infty$?
2. En 1626, Peter Minuit compró la isla de Manhattan por un valor de 24\$. Si estos 24\$ se hubiesen invertido con un interés anual del 7% abonados trimestralmente, ¿cuál sería el capital actual?

3. Invertimos 300€en un banco que abona mensualmente los intereses a un 6% anual. ¿Cuánto tendremos en el banco después de 10 años? ¿Cuánto tiempo tiene que transcurrir para doblar nuestro dinero?

4. En 1517 el rey de Francia, Francis I, compró un cuadro de Leonardo da Vinci, la "Mona Lisa", para su baño en 4000 florines de oro, es decir, 492 onzas de oro. Suponiendo que el valor del cuadro en onzas ha permanecido constante y que el oro ha aumentado su cotización en un 3% anual, ¿cuántos florines podría valer el cuadro al final de este año?

5. Juan se ha comprado una casa de 90000€, mediante una hipoteca por todo este valor al 5% anual durante 25 años.

   (a) Si consideramos que el interés se mantiene fijo a lo largo de estos 25 años, calcular:

      i. ¿Cuánto va a pagar cada mes (cuota mensual)?
      ii. En la primera cuota, ¿cuánto pagará de intereses y cuánto de amortización del préstamo? ¿y después de 1 año? ¿y de 10 años? ¿y después de 20?
      iii. ¿Cuánto habrá ganado el banco al final?

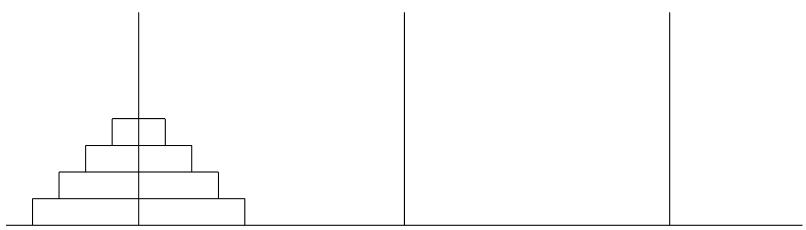
   (b) Si la hipoteca es a interés variable y la revisión del primer año es del 6.5%, ¿cuánto valdrá la cuota del segundo año? Si quiere que la cuota del segundo año sea de 600€, ¿cuánto capital habrá de amortizar anticipadamente el primer año, aparte de las cuotas?

6. Queremos comprar un coche pidiendo un préstamo personal de 20000€ y nuestro banco nos ofrece las siguientes posibles cuotas mensuales [2] según el dinero que pidamos y el tiempo de amortización

12 meses	24 meses	36 meses	48 meses	60 meses	72 meses
1748.10€	912.78€	635.06€	496.75€	414.20€	359.52€

   ¿Qué tipo de interés anual están aplicando al préstamo a 12 meses? ¿Y a 24 meses? ¿Y a 72? ¿Es el mismo? ¿Cuánto acabaríamos pagando en cada opción?

7. "El problema de la Torre de Hanoi": el problema se basa en determinar el número mínimo de movimientos $y(t)$ necesarios para mover t anillos del primer palo (ver dibujo) al tercer palo. Un movimiento consiste en mover un anillo de un palo a otro, con la restricción de que un anillo más grande no puede estar sobre uno más pequeño.



8. El cuerpo de un enfermo de diabetes no produce insulina de forma natural. Si no se inyecta insulina, la cantidad de dicha sustancia en su cuerpo decrece un 25% cada día. Modeliza con un modelo discreto la cantidad de insulina que dicho enfermo tiene cada día suponiendo que cuando comienzan las inyecciones no tiene nada de insulina en su cuerpo y que se inyecta 100 gr cada día. Calcula explícitamente la cantidad de insulina que tendrá después de n días. ¿Cómo evolucionará esta cantidad a lo largo del tiempo?

9. Determinar el número máximo de puntos de intersección de t rectas en el plano.

10. Si $R(t)$ denota el número de regiones que determinan t rectas en el plano, de tal forma que dos de ellas no sean paralelas y que tres no se corten en un único punto, determinar $R(t)$.

[2] Datos reales actualizados a febrero de 2021

11. En un juego de azar un jugador gana N veces su apuesta si gana pero si pierde tiene que volver a jugar apostando de nuevo cada vez. Denotemos y_i su apuesta en el juego $i-$ésimo cuando ha perdido en todos los anteriores. Esta cantidad debe determinarse de tal forma que si el jugador gana en el $n-$ésimo juego, recupere no solo todas las apuestas que perdió anteriormente sino además una cierta cantidad s fijada antes de comenzar, es decir,

$$Ny_n = s + \sum_{j=1}^{n} y_j, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{5}$$

   (a) Demostrar que podemos expresar la relación entre y_{n+1} e y_n en forma de ecuación en diferencias y resolverla. ¿Qué ocurrirá cuando el número de juegos seguidos sin ganar aumenta?

   (b) Si dejamos que el valor de la primera apuesta y_1 lo elija el jugador, es decir, que no se tenga que cumplir la relación (5) para $n = 1$, ¿cuál será la solución de la ecuación en diferencias anterior?

   (c) En el juego de la ruleta la apuesta más simple sigue este modelo con $N = 2$. Supongamos que vamos al casino con la intención de ganar 100 € a la ruleta y nos proponemos que en el momento en que los ganemos nos vamos del casino. ¿Cuánto dinero tendremos que apostar en la primera tirada si queremos asegurarnos de que si la ganamos ya podremos parar? Si apostamos dicha cantidad, ¿qué pasará si perdemos 8 tiradas seguidas? ¿Cuánto tendremos que apostar en la novena para asegurarnos de que si la ganamos podremos parar con el beneficio buscado? En el caso de que perdamos la novena tirada y no tengamos más dinero para apostar, ¿cuánto habremos perdido en total?

   (d) Hacer los mismos cálculos que se piden en el apartado anterior pero en el caso de que queramos ganar 100 € en total a la ruleta pero solo apostamos 10 € en la primera tirada. Estudiar también el caso en que no tenemos ninguna cantidad s como beneficio objetivo pero no queremos irnos del casino con pérdidas.

5. Bibliografía

[1] C. González-Concepción, J. A. Barrios García, *Análisis discreto en Economía y Empresa*, Ed. AC, 2000.