Tema 2: Ecuaciones en diferencias lineales

Contenidos

1. Ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes

Una **ecuación en diferencias finitas (EDF) lineal con coeficientes constantes de orden** k es una ecuación del tipo:

$$Ly_n := \alpha_k y_{n+k} + \alpha_{k-1} y_{n+k-1} + \cdots + \alpha_1 y_{n+1} + \alpha_0 y_n = d_n, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{1}$$

con $\alpha_k \alpha_0 \neq 0$, $\alpha_i \in I\!R$, que relaciona cualesquiera $k+1$ términos consecutivos de una *sucesión o función discreta* $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, que es la incógnita de la ecuación.

Una sucesión o función discreta $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ se dice *solución o solución particular de la ecuación* (1) si la verifica para todo $n = 0, 1, \ldots$.

Si en (1) el término independiente $d_n = 0$, $\forall n$, la ecuación se dice *homogénea*. Dada una ecuación (1) no homogénea, la ecuación

$$Ly_n = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{2}$$

se suele llamar ecuación homogénea asociada a (1) y, por contraposición, la ecuación (1) se llama *completa*.

Ejercicio.- Demostrar que cualquier combinación lineal de soluciones de la homogénea (2) es también solución de la homogénea y la suma de cualquier solución de la homogénea (2) y una de la completa (1) es solución de la completa.

Evidentemente, dados k valores iniciales $y_0^0, y_1^0, \ldots, y_{k-1}^0$ de $y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}$, simplemente despejando y_{n+k} de (1) e iterando, se obtiene una solución única de (1). Sin embargo, en la práctica, es más interesante encontrar una expresión explícita de esta solución. Así, se define el **problema de valores iniciales (PVI) en EDFs** como el problema de encontrar la única sucesión que verifica

$$\left\{ \begin{array}{l} Ly_n = d_n, \quad n = 0, 1, \ldots \\ y_0 = y_0^0,\ y_1 = y_1^0, \ldots,\ y_{k-1} = y_{k-1}^0 \end{array} \right. \tag{3}$$

Para resolver este problema, debemos conocer algo más del espacio de las sucesiones reales $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Se dice que k sucesiones $\{y_n^1, y_n^2, \ldots, y_n^k\}$ son *linealmente dependientes*, si existen constantes $C_1, C_2, \ldots, C_k$ no todas nulas tal que

$$C_1 y_n^1 + C_2 y_n^2 + \cdots + C_k y_n^k = 0, \quad \forall n = 0, 1, \ldots.$$

En caso contrario se dice que son *linealmente independientes*.

Teorema: *k sucesiones $\{y_n^1, y_n^2, \dots, y_n^k\}$ son linealmente independientes si y sólo si existe $n \geq 0$ tal que*

$$D_C(y_n^1, y_n^2, \dots, y_n^k) := \begin{vmatrix} y_n^1 & y_n^2 & \dots & y_n^k \\ y_{n+1}^1 & y_{n+1}^2 & \dots & y_{n+1}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n+k-1}^1 & y_{n+k-1}^2 & \dots & y_{n+k-1}^k \end{vmatrix} \neq 0 \tag{4}$$

El determinante $D_C(y_n^1, y_n^2, \dots, y_n^k)$ se llama *determinante de Casorati* de las k sucesiones.
Demostración.- Dadas k sucesiones $\{y_n^1, y_n^2, \dots, y_n^k\}$, y cualquier $n \geq 0$, consideremos el sistema lineal

$$\begin{array}{llllll} C_1 y_n^1 & +C_2 y_n^2 & +\dots & +C_k y_n^k & =0 \\ C_1 y_{n+1}^1 & +C_2 y_{n+1}^2 & +\dots & +C_k y_{n+1}^k & =0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_1 y_{n+k-1}^1 & +C_2 y_{n+k-1}^2 & +\dots & +C_k y_{n+k-1}^k & =0 \end{array} \tag{5}$$

Este es un sistema lineal homogéneo de k ecuaciones con k incógnitas $C_1, \dots, C_k$, cuya matriz de coeficientes es el determinante de Casorati (4). Por tanto, el sistema (5) tendrá solución distinta de la trivial, en cuyo caso las sucesiones son linealmente dependientes, si y solo si $D_C(y_n^1, \dots, y_n^k) = 0$. □

Se llama *sistema fundamental de soluciones* de la ecuación homogénea (2) de orden k a cualquier conjunto de k soluciones de (2) $\{y_n^1, y_n^2, \dots, y_n^k\}$ linealmente independientes.

Teorema: *Dado un sistema fundamental de soluciones $\{y_n^1, y_n^2, \dots, y_n^k\}$ de (2), y cualquier otra solución y_n de la ecuación (2), existen constantes $C_1, C_2, \dots, C_k \in I\!R$ tal que*

$$y_n = C_1 y_n^1 + C_2 y_n^2 + \dots + C_k y_n^k, \quad \forall n \geq 0.$$

Demostración.- Claramente, si y_n es la solución trivial, $C_i = 0, \forall i = 1, \dots, k$, y la demostración es inmediata. Si y_n no es la solución trivial, para cualquier $n \geq 0$ consideramos el sistema lineal

$$\begin{array}{llllll} C_1 y_n^1 & +C_2 y_n^2 & +\dots & +C_k y_n^k & =d_n \\ C_1 y_{n+1}^1 & +C_2 y_{n+1}^2 & +\dots & +C_k y_{n+1}^k & =d_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_1 y_{n+k-1}^1 & +C_2 y_{n+k-1}^2 & +\dots & +C_k y_{n+k-1}^k & =d_{n+k-1} \end{array} \tag{6}$$

que es un sistema lineal de k ecuaciones y k incógnitas cuya matriz de coeficientes es precisamente el determinante de Casorati (4). Como las k soluciones son linealmente independientes, este determinante es no nulo y, por tanto, existe una única solución $C_1, C_2, \dots, C_k$ de este sistema, lo que completa la demostración. □

Por tanto, desde que tengamos un sistema fundamental de soluciones de (2), podemos obtener cualquier otra solución de dicha ecuación. En ese caso, se llama *solución general de la ecuación homogénea* (2) a la familia $k-$paramétrica de sucesiones de la forma

$$y_n = C_1 y_n^1 + C_2 y_n^2 + \dots + C_k y_n^k, \quad C_1, C_2, \dots, C_k \in I\!R \text{ arbitrarias.} \tag{7}$$

Es más, si tenemos un sistema fundamental de soluciones de (2), podemos saber qué forma tendrá la solución general de (1). Para ello tenemos que tener en cuenta que si tenemos una solución particular y_n^c de (1), cualquier otra solución y_n de (1) verifica que

$$L(y_n - y_n^c) = L y_n - L y_n^c = d_n - d_n = 0,$$

o, lo que es lo mismo, $y_n - y_n^c$ es una solución de la ecuación homogénea (2). Por tanto, por el Teorema anterior, existirán $C_1, \dots, C_k \in I\!R$ tal que

$$y_n - y_n^c = C_1 y_n^1 + C_2 y_n^2 + \dots + C_k y_n^k.$$

En consecuencia, si llamamos y_n^h a la solución general de la ecuación homogénea dada en (7), y tenemos una solución particular cualquiera y_n^c de la ecuación completa (1), la *solución general de la ecuación completa (1)* es la familia $k-$paramétrica de sucesiones

$$y_n = y_n^h + y_n^c = C_1 y_n^1 + C_2 y_n^2 + \dots + C_k y_n^k + y_n^c.$$

1.1 Ecuaciones en diferencias lineales de primer orden

En este caso,

$$Ly_n = \alpha_1 y_{n+1} + \alpha_0 y_n = d_n, \qquad n = 0, 1, \ldots,$$

con $\alpha_1\alpha_0 \neq 0$, el cálculo de la solución general es simple por iteración (también llamado *método de Horner*, escribiendo

$$y_{n+1} = ay_n + b_n, \qquad a = -\frac{\alpha_0}{\alpha_1}, \quad b_n = \frac{d_n}{\alpha_1} \tag{8}$$

Así,

$$y_n = ay_{n-1} + b_{n-1} = a(ay_{n-2} + b_{n-2}) + b_{n-1} = a^2 y_{n-2} + (b_{n-1} + ab_{n-2}) = \ldots$$

lo que iterando hasta el valor inicial y_0 resulta

$$y_n = a^n y_0 + \sum_{j=1}^{n} a^{j-1} b_{n-j}, \qquad n \geq 1 \tag{9}$$

1.2 Ecuaciones en diferencias lineales de segundo orden

Si queremos calcular la solución general de la EDF de segundo orden

$$Ly_n = \alpha_2 y_{n+2} + \alpha_1 y_{n+1} + \alpha_0 y_n = d_n, \qquad n = 0, 1, \ldots, \tag{10}$$

con $\alpha_2\alpha_0 \neq 0$, necesitamos dos soluciones linealmente independientes de la homogénea y una particular de la completa.

Como en las ecuaciones de primer orden homogéneas ($d_n = 0$), la solución (9) es simplemente una exponencial ($y_n = a^n y_0$), para calcular soluciones de la homogénea de segundo orden se buscan también soluciones de tipo exponencial $y_n = \xi^n$, para cierto valor $\xi \neq 0$. Para ello, ξ debe verificar

$$L(\xi^n) = \alpha_2 \xi^{n+2} + \alpha_1 \xi^{n+1} + \alpha_0 \xi^n = 0, \tag{11}$$

lo que es equivalente a que

$$\rho(\xi) = 0, \qquad \text{donde} \qquad \rho(\xi) := \alpha_2 \xi^2 + \alpha_1 \xi + \alpha_0, \tag{12}$$

lo que se denomina *ecuación característica de la EDF*, siendo $\rho(\xi)$ su *polinomio característico.*

Así que la solución de la homogénea dependerá de las raíces del polinomio característico.

Teorema:

1. *Si el polinomio característico $\rho(\xi)$ (12) tiene dos raíces reales diferentes $\xi_1 \neq \xi_2$, la solución general de la homogénea se puede escribir como*

$$y_n^h = C_1 \xi_1^n + C_2 \xi_2^n$$

2. *Si $\rho(\xi)$ tiene dos raíces complejas conjugadas $\xi_1 = re^{\theta i}$, $\xi_2 = \hat{\xi_1}$, la solución general de la homogénea se puede expresar en términos reales como*

$$y_n^h = C_1 r^n \cos(n\theta) + C_2 r^n \sin(n\theta)$$

3. *Si $\rho(\xi)$ tiene una raíz real doble $\xi_1 = \xi_2$, una expresión de la solución general de la homogénea es*

$$y_n^h = C_1 \xi_1^n + C_2 n\, \xi_1^n$$

Demostración.- Por construcción en el caso 1, las dos sucesiones $y_n^1 = \xi_1^n$ y $y_n^2 = \xi_2^n$ son soluciones de la homogénea asociada a (10). Para demostrar este apartado basta ver que son linealmente independientes, esto es, que su determinante de Casorati es no nulo:

$$D_C(\xi_1^n, \xi_2^n) = \begin{vmatrix} \xi_1^n & \xi_2^n \\ \xi_1^{n+1} & \xi_2^{n+1} \end{vmatrix} = \xi_1^n \xi_2^n (\xi_2 - \xi_1) \neq 0.$$

En el caso 2, si consideramos sucesiones en el campo complejo, las dos sucesiones ξ_1^n y ξ_2^n son soluciones de la ecuación homogénea asociada a (10), por lo que cualquier combinación lineal de ellas también es solución de la homogénea. En particular, consideramos las dos soluciones

$$y_n^1 = \frac{\xi_1^n + \xi_2^n}{2} = \frac{\xi_1^n + \overline{\xi_1^n}}{2} = \mathrm{Re}(\xi_1^n) = \mathrm{Re}(r^n e^{in\theta}) = r^n \cos(n\theta)$$
$$y_n^2 = \frac{\xi_1^n - \xi_2^n}{2i} = \frac{\xi_1^n - \overline{\xi_1^n}}{2i} = \mathrm{Im}(\xi_1^n) = \mathrm{Im}(r^n e^{in\theta}) = r^n \sin(n\theta)$$

Es fácil ver que $D_C(y_n^1, y_n^2) \neq 0$, por lo que son linealmente independientes y, por tanto, se demuestra el apartado 2.

Para demostrar el apartado 3, hay que revisar las ecuaciones (11) y (12). En general, fijado cualquier $n \geq 0$, para cualquier $\xi \neq 0$ se tiene

$$L(\xi^n) = \xi^n \rho(\xi).$$

Esto se puede ver como una igualdad entre dos funciones polinómicas de ξ y, por tanto, derivables respecto de ξ, es decir,

$$\frac{d}{d\xi} L(\xi^n) = L\left(\frac{d}{d\xi}\xi^n\right) = L(n\xi^{n-1}) = n\xi^{n-1}\rho(\xi) + \xi^n \rho'(\xi).$$

Si multiplicamos esta igualdad por ξ se tiene

$$L(n\xi^n) = n\xi^n \rho(\xi) + \xi^{n+1}\rho'(\xi). \tag{13}$$

Si volvemos al apartado 3 del Teorema, ξ_1 es una raíz doble del polinomio característico, lo que significa que $\rho(\xi_1) = \rho'(\xi_1) = 0$. Por tanto, de (13) se tiene que

$$L(n\xi_1^n) = 0.$$

Además, inmediatamente se ve que $D_C(\xi_1^n, n\xi_1^n) \neq 0$, por lo que $\{\xi_1^n, n\xi_1^n\}$ es un sistema fundamental de soluciones de la homogénea asociada a (10), y se prueba el apartado 3. $\square$

Para calcular una solución particular de la completa $Ly_n^c = d_n$, de forma análoga a lo que ocurre en ecuaciones diferenciales, hay un método de variación de las constantes pero a menudo basta con probar lo que en [1] se llama *método de los coeficientes indeterminados*, pero, dado que no se puede ver como un método propiamente dicho, en [2] se suele llamar "conjetura sensata", pues básicamente consiste en conjeturar cómo debe ser esa solución particular de la completa según sea el término independiente d_n de la EDF (10). Este método funciona bien siempre que d_n sea una combinación lineal de productos y sumas de las funciones que aparecen en la tabla siguiente.

Si d_n es	función test $y_n^c =$
d constante	A constante
polinomio de grado m	polinomio de grado m
b^n	Ab^n
$q_1 \sin nb + q_2 \cos nb$	$A \sin nb + B \cos nb$
$a^n(q_1 \sin nb + q_2 \cos nb)$	$a^n(A \sin nb + B \cos nb)$

En el caso particular de que d_n sea solución de la ecuación homogénea, esta conjetura falla. En dicho caso, hay que probar con una solución que sea lo que aparece en la segunda columna multiplicado por n. Si además, nd_n también es solución de la homogénea, volvería a fallar de nuevo la conjetura, así que tendríamos que probar multiplicando por n^2 la función prueba.

Finalmente, la solución general de la EDF completa $Ly_n = d_n$ es

$$y_n = y_n^h + y_n^c$$

Caso de primer orden: esto también se puede aplicar para el caso (8), teniendo en cuenta que ahora el polinomio característico es $\rho(\xi) = \xi - a$, que tiene como única raíz a $\xi = a$, por lo que la solución general de la homogénea es $y^{(h)} = Ca^n$. Para calcular la particular de la completa se podría aplicar la misma "conjetura sensata" anterior.

Ejemplo: calcular la solución general de la EDF

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + 2y_n = 2^n + 1, \quad n \geq 0.$$

Solución.- El polinomio característico es

$$\rho(\xi) = \xi^2 - 2\xi + 2 = 0 \Leftrightarrow \xi_1 = 1 + i, \, \xi_2 = 1 - i.$$

Como $\xi_1 = 1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$, se tiene que la solución general de la homogénea es

$$y_n^h = C_1 2^{n/2} \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + C_1 2^{n/2} \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right).$$

Para encontrar una solución particular de la completa, como el término independiente es 2^n+1, probamos con la función test $y_n^c = A2^n + B$, y determinamos los coeficientes A y B para que y_n^c sea solución, esto es,

$$A2^{n+2} + B - 2\left(A2^{n+1} + B\right) + 2\left(A2^n + B\right) = 2^n + 1 \Leftrightarrow (2A)2^n + B = 2^n + 1$$

lo que es cierto si y solo si $A = 1/2, B = 1$. Por tanto, $y_n^c = 2^{n-1} + 1$ es una solución de la completa, y la solución general es

$$y_n = C_1 2^{n/2} \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + C_1 2^{n/2} \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right) + 2^{n-1} + 1.$$

1.2.1 Estudio cualitativo del Modelo de Samuelson

Ahora ya estamos en condiciones de abordar la resolución del modelo de Samuelson visto en el tema anterior,

$$Y_t - (c+v)Y_{t-1} + vY_{t-2} = G, \quad t = 2, 3, \ldots, \quad Y_0 \geq 0, \, Y_1 \geq 0 \text{ dados.} \tag{14}$$

En primer lugar, es sencillo ver que una solución particular de la ecuación no homogénea (14) es

$$Y_t^c = \hat{Y} := \frac{G}{1-c} \tag{15}$$

El polinomio caracterítico de este modelo es

$$\rho(\xi) = \xi^2 - (c+v)\xi + v = 0 \Leftrightarrow \xi = \frac{c + v \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

siendo el discriminante

$$\Delta = (c+v)^2 - 4v = c^2 + 2vc + (v^2 - 4v), \quad v > 0, \, 0 < c < 1.$$

Para estudiar el signo de este discriminante, estudiamos sus raíces (entendiéndolo como una parábola en c) y vemos que se puede descomponer como

$$\Delta = (c - c_1(v))(c - c_2(v)), \quad c_1(v) = -v - 2\sqrt{v}, \quad c_2(v) = -v + 2\sqrt{v}.$$

Claramente, $c_1(v) < 0, \, \forall v > 0$, pero $c_2(v)$ depende de v. Como solo estamos interesados en estudiar el comportamiento de Δ para $c \in (0,1)$, tenemos que estudiar para qué $v > 0$ se tiene $0 < c_2(v) < 1$. Así,

$$c_2(v) > 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{v} > v \Leftrightarrow 4v > v^2 \Leftrightarrow 0 < v < 4,$$

y, por otro lado,

$$c_2(v) < 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{v} < 1 + v \Leftrightarrow 4v < (1+v)^2 \Leftrightarrow (v-1)^2 > 0,$$

lo que se tiene para todo $v \neq 1$. Por tanto,

$$0 < c_2(v) < 1 \Leftrightarrow 0 < v < 4 \text{ y } v \neq 1.$$

Aplicando esto, se puede concluir que

$$\Delta < 0 \text{ si } v \in (0,1) \cup (1,4) \text{ y } 0 < c < -v + 2\sqrt{v} \quad \text{ó} \quad v = 1 \text{ y } 0 < c < 1 \tag{16}$$

$$\Delta = 0 \text{ si } v \in (0,1) \cup (1,4) \text{ y } c = -v + 2\sqrt{v} \tag{17}$$

$$\Delta > 0 \text{ si } v \in (0,1) \cup (1,4) \text{ y } -v + 2\sqrt{v} < c < 1 \quad \text{ó} \quad v \geq 4 \text{ y } 0 < c < 1 \tag{18}$$

Por tanto, si se cumplen las condiciones (16), se tienen dos autovalores complejos conjugados

$$\xi_i = \frac{c+v \pm \sqrt{-\Delta}\, i}{2}, \quad |\xi_i|^2 = \frac{(c+v)^2 + (-\Delta)}{4} = v$$

y argumento θ, por lo que la solución general de (14) es

$$Y_t = C_1(\sqrt{v})^t \cos\theta t + C_2(\sqrt{v})^t \sin\theta t + \hat{Y}, \quad t = 2, 3, \ldots$$

Si se cumplen las condiciones (17), sólo hay un autovalor doble $\xi = \sqrt{v}$ por lo que la solución es

$$Y_t = (C_1 + C_2 t)(\sqrt{v})^t + \hat{Y}, \quad t = 2, 3, \ldots$$

y en el caso (18) aparecen dos autovalores reales diferentes

$$\xi_1 = \frac{c+v-\sqrt{\Delta}}{2}, \quad \xi_2 = \frac{c+v+\sqrt{\Delta}}{2}$$

y la solución general es

$$Y_t = C_1\xi_1^t + C_2\xi_2^t + \hat{Y}, \quad t = 2, 3, \ldots$$

Obsérvese que es evidente que $\xi_2 > 0$ y, como $\xi_1\xi_2 = v > 0$, necesariamente $0 < \xi_1 < \xi_2$. Además, $0 < \xi_2 < 1$ si y sólo si $c + v + \sqrt{\Delta} < 2$ o, lo que es lo mismo, $\sqrt{\Delta} < 2 - (c+v)$. Para verlo hay que analizar los dos casos posibles dados en (18) por separado.

Si $v \in (0,1) \cup (1,4)$, $-v + \sqrt{v} < c < 1$, se tiene que

$$2 - (1+v) < 2 - (c+v) < 2 - 2\sqrt{v}.$$

Si $v \in (1,4)$ se tiene que $< 2 - 2\sqrt{v} < 0$ por lo que no es posible que ocurra $\sqrt{\Delta} < 2 - (c+v)$ y, por tanto, $\xi_2 > 1$. En cambio, si $v \in (0,1)$, $2 - (1+v) = 1 - v > 0$ y, por tanto, se puede elevar al cuadrado la desigualdad $\sqrt{\Delta} < 2 - (c+v)$ y se demuestra que $0 < \xi_1 < \xi_2 < 1$.

En consecuencia, en todos los casos, si $v > 1$ todas las soluciones de (14) verifican que $|Y_t| \to \infty$, aunque en el caso (16) oscilan. En cambio, si $0 < v < 1$, todas las soluciones tienden al valor de equilibrio $\hat{Y}$ cuando $t \to \infty$, por lo que la renta nacional se estabilizará a lo largo del tiempo. La diferencia entre los casos (18) y (17) y el (16) es que en los dos primeros la renta tiende exponencialmente hacia el punto de equilibrio, mientras que en el (16) la renta va oscilando alrededor de dicho punto de equilibrio.

1.3 Ecuaciones en diferencias lineales de orden k

Al igual que en el caso de orden 2, para calcular la solución general de la ecuación homogénea (2) de orden $k \geq 1$, se prueba con soluciones del tipo $y_n = \xi^n$, $\xi \neq 0$, y se llega a que dichos valores ξ tienen que ser raíces del polinomio característico

$$\rho(\xi) = \alpha_k\xi^k + \alpha_{k-1}\xi^{k-1} + \cdots + \alpha_1\xi + \alpha_0. \tag{19}$$

Sean $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s\}$ ($s \leq k$) las raíces (reales o complejas) del polinomio característico (19), con multiplicidades respectivas $\{m_1, m_2, \ldots, m_s\}$, siendo $\sum_{i=1}^s m_i = k$. Entonces se tiene:

Teorema: *Las k sucesiones*

$$\{\xi_1^n, n\xi_1^n, \ldots, n^{m_1-1}\xi_1^n, \xi_2^n, n\xi_2^n, \ldots, n^{m_2-1}\xi_2^n, \ldots, \xi_s^n, n\xi_s^n, \ldots, n^{m_s-1}\xi_s^n\}$$

son k soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea (2).

Además, si una de las raíces ξ_j es compleja, en cuyo caso su conjugado $\bar{\xi}_j$ también lo es, y se quieren obtener soluciones independientes reales, basta con sustituir en el conjunto anterior el par $\{n^r\xi_j^n, n^r\bar{\xi}_j^n\}$ por

$$\left\{n^r\frac{1}{2}(\xi_j^n + \bar{\xi}_j^n),\ n^r\frac{1}{2i}(\xi_j^n - \bar{\xi}_j^n)\right\} \quad ó \quad \left\{n^r\rho_j^n\cos(n\theta_j),\ n^r\rho_j^n\sin(n\theta_j)\right\},$$

siendo $\xi_j = \rho_j e^{i\theta_j}$, $r \geq 0$.

Por tanto, la solución general de la EDF homogénea (2) será

$$y_n^h = p_1(n)\xi_1^n + \cdots + p_s(n)\xi_s^n \tag{20}$$

donde los $p_j(n)$ son polinomios en n de grado $m_j - 1$, $j = 1, \ldots, s$.

La demostración de este Teorema es similar a la del Teorema para EDFs lineales de orden 2, con la única dificultad de añadir más raíces.

Para calcular soluciones particulares de la completa usaremos la conjetura sensata vista en el caso de orden 2.

2. EDF lineales de orden k y sistemas de orden 1

La ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes (1) de orden $k > 1$ se puede reducir a un sistema de k ecuaciones y k incógnitas de orden 1, denotando

$$Y_n = \begin{pmatrix} (Y_1)_n \\ (Y_2)_n \\ \vdots \\ (Y_k)_n \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{ll} (Y_1)_n & = y_n \\ (Y_2)_n & = y_{n+1} \\ \vdots & \\ (Y_k)_n & = y_{n+k-1} \end{array}$$

con lo que se tiene

$$(Y_1)_{n+1} = (Y_2)_n, \dots \ (Y_{k-1})_{n+1} = (Y_k)_n, \ (Y_k)_{n+1} = -\frac{\alpha_0}{\alpha_k}(Y_1)_n - \frac{\alpha_1}{\alpha_k}(Y_2)_n - \dots - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}(Y_k)_n + \frac{d_n}{\alpha_k}$$

que se expresa matricialmente como

$$Y_{n+1} = AY_n + B_n, \tag{21}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\frac{\alpha_0}{\alpha_k} & -\frac{\alpha_1}{\alpha_k} & -\frac{\alpha_2}{\alpha_k} & \cdots & -\frac{\alpha_{k-2}}{\alpha_k} & -\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} \end{pmatrix}, \quad B_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{d_n}{\alpha_k} \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Iterando como se hizo en la resolución de (8) pero teniendo en cuenta que ahora estamos operando matrices y vectores, obtenemos la solución general de (21) como

$$Y_n = A^n Y_0 + \sum_{j=1}^{n} A^{j-1} B_{n-j}, \tag{23}$$

que es aplicable para cualquier sistema lineal de orden 1 (21), con cualquier matriz constante A y vector independiente B_n, no solo para el caso (22).

Obsérvese que el polinomio característico de la matriz A dada en (22) es

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \frac{1}{\alpha_k}\rho(\lambda)$$

donde $\rho(\lambda)$ es el polinomio característico (19) de la EDF lineal de coeficientes constantes de orden k (1). Por tanto, los autovalores de la matriz A (22) van a ser los que determinan la solución del sistema lineal (21). Esto va a ser así para cualquier sistema lineal (21) de orden 1.

Obsérvese también que necesariamente $\det A \neq 0$, pues si A fuera singular, por lo que el 0 sería un autovalor de A, se tendría que $p(0) = 0$, ó $\rho(0) = 0$ y, por tanto, la ecuación diferencial (1) sería reducible ($\alpha_0 = 0$).

Recíprocamente,

Teorema 1 *Todo sistema lineal de k ecuaciones y k incógnitas de orden 1 de tipo* (21) *con* $\det A \neq 0$, *es equivalente a una ecuación lineal de coeficientes constantes de orden k* (1).

Más precisamente, si A es cualquier matriz no singular, existe una matriz no singular Q tal que el sistema (21) *es equivalente al sistema*

$$V_{n+1} = \tilde{A}V_n + \tilde{G}_n, \quad n = 0, 1, \dots, \tag{24}$$

siendo

$$\tilde{A} = QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_{k-2} & \beta_{k-1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{G}_n = \tilde{B}_n - \tilde{A}G_n + G_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g_n \end{pmatrix}.$$

$$\tilde{B}_n = \left(\tilde{B}_{n,i}\right)_{i=1}^{k} = QB_n, \qquad G_n = (G_{n,i})_{i=1}^{k}, \quad G_{n,1} = 0, \quad G_{n,i} = \sum_{j=0}^{i-2} \tilde{B}_{n+j,i-1-j}, \; 2 \le i \le k. \tag{25}$$

Además, si denotamos $Q_i^T = (Q_{i1}, Q_{i2}, \ldots, Q_{ik})$ a la $i-$ésima fila de la matriz Q, se tiene que $Q_i^T = Q_{i-1}^T A = Q_1^T A^{i-1}$, $i = 2, \ldots, k$, por lo que tenemos k grados de libertad para poder elegir la matriz Q (su primera fila), siempre que sea no singular.

En consecuencia, el sistema (21) es equivalente a la ecuación de orden k

$$v_{n+k} = \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j v_{n+j-1} + g_n, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{26}$$

y la solución de (21) se obtiene como $Y_n = Q^{-1}(V_n - G_n)$ donde V_n es la solución de (24) o, lo que es lo mismo, $V_n = (v_{n+j-1})_{j=1}^{k}$ donde v_n es la solución de (26) .

Demostración.- En primer lugar, tenemos que buscar una matriz Q que verifique el teorema, esto es, que $\tilde{A}Q = QA$. En lo que sigue, denotaremos como $e_i^T = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ el $i-$ésimo vector canónico en $\mathbb{R}^k$, Q_i^T la $i-$ésima fila de la matriz Q, tal y como se dice en el enunciado del teorema, y $\beta^T = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k)$. Por tanto, $\tilde{A}Q = QA$ si y sólo si

$$e_i^T Q = Q_{i-1}^T A, \; i = 2, \ldots, k, \quad \beta^T Q = Q_k^T A.$$

Como $e_i^Q = Q_i^T$, claramente todas las filas de Q excepto la primera, quedan perfectamente determinadas. Esto demuestra que podemos tomar cualesquiera k valores para la primera fila de Q, siempre que se elijan de forma que $\det Q \neq 0$. Aplicando esta descomposición de A en (21), denotando $Z_n = QY_n$, se obtiene un sistema equivalente

$$Z_{n+1} = \tilde{A}Z_n + \tilde{B}_n, \qquad \tilde{B}_n = QB_n. \tag{27}$$

en el que la matriz de coeficientes $\tilde{A}$ ya tiene la forma apropiada para transformar el sistema en una EDF escalar.

Si tras este cambio el vector $\tilde{B}_n$ tuviera una estructura similar a la de B_n en (22), no tendríamos que hacer nada más, solo detallar la EDF buscada. En caso contrario, tenemos que hacer una traslación de Z_n de la forma

$$V_n = Z_n + G_n.$$

Para averiguar cómo tiene que ser este vector G_n, basta sustituir en el sistema (27) $Z_n = V_n - G_n$,

$$V_{n+1} - G_{n+1} = \tilde{A}V_n - \tilde{A}G_n + \tilde{B}_n,$$

lo que nos da (24), y se busca G_n para que todas las componentes de $\tilde{G}_n$ sean nulas excepto la última. Así que tenemos k parámetros a determinar (las componentes del vector G_n) y $k-1$ ecuaciones, por lo que tendremos un grado de libertad para elegir G_n. Por simplicidad, tomamos $G_{n,1} = 0$, y las demás salen de tomar

$$G_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{B}_{n,1} \\ \tilde{B}_{n,2} \\ \vdots \\ \tilde{B}_{n,k-2} \\ \tilde{B}_{n,k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{B}_{n+1,1} \\ \vdots \\ \tilde{B}_{n+1,k-3} \\ \tilde{B}_{n+1,k-2} \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \tilde{B}_{n+k-2,1} \end{pmatrix}$$

o, lo que es lo mismo, la expresión dada en (25). Sabemos que $(\tilde{A}G_n)_i = G_{n,i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$, por tanto, para $i = 1$,

$$\tilde{G}_{n,i} = \tilde{B}_{n,i} - G_{n,2} + G_{n+1,1} = \tilde{B}_{n,i} - \tilde{B}_{n,i} + 0 = 0.$$

Para $2 \le i \le k-1$,

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{n,i} = \quad & \tilde{B}_{n,i} - G_{n,i+1} + G_{n+1,i} = \tilde{B}_{n,i} - \sum_{j=0}^{i-1} \tilde{B}_{n+j,i-j} + \sum_{j=0}^{i-2} \tilde{B}_{n+1+j,i-1-j} \\ & = \tilde{B}_{n,i} - \tilde{B}_{n,i} - \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{B}_{n+j,i-j} + \sum_{j=0}^{i-2} \tilde{B}_{n+1+j,i-1-j} \\ & = -\sum_{l=0}^{i-2} \tilde{B}_{n+l+1,i-l-1} + \sum_{j=0}^{i-2} \tilde{B}_{n+1+j,i-1-j} = 0. \end{aligned}$$

con lo que se demuestra el teorema. □

Nótese que la EDF (26) tiene como polinomio característico

$$\rho(\lambda) = \lambda^k - \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \lambda^{j-1}$$

por lo que las soluciones van a venir determinadas por las raíces de este polinomio que, como ya sabemos, son los autovalores de la matriz $\tilde{A}$, que es semejante a la matriz A. En otras palabras, el comportamiento de las soluciones del sistema (21) dependerá de los autovalores de la matriz A.

Al igual que ocurre con los sistemas lineales de ecuaciones diferenciales, para resolver (21) también se puede aplicar la descomposición de Jordan de la matriz A, es decir, calcular la matriz de Jordan J y la matriz de cambio P con $\det P \neq 0$ tal que $A = PJP^{-1}$. Llamando

$$Z_n = P^{-1}Y_n, \qquad C_n = P^{-1}B_n, \qquad n = 0, 1, \dots,$$

el sistema (21) es equivalente al sistema de Jordan

$$Z_{n+1} = JZ_n + C_n \quad \text{con solución} \quad Z_n = J^n Z_0 + \sum_{j=1}^{n} J^{j-1} C_{n-j}$$

y obtener la solución de (21) deshaciendo el cambio $Y_n = PZ_n$. Sin embargo, el cómputo de las potencias de la matriz J explícitamente solo se puede hacer cuando las cajas de Jordan que la componen son de dimensión baja. Más precisamente, es bien sabido que $J =$diag$(J_{\lambda_1}, \dots, J_{\lambda_s})$ donde cada caja J_{λ_j} depende de la multiplicidad geométrica del autovalor λ_j de A. Si J_λ tiene dimensión m es de la forma

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

y sus potencias son

$$J_\lambda^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \lambda^n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \lambda^n & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \binom{n}{m-2}\lambda^{n-(m-2)} & \binom{n}{m-3}\lambda^{n-(m-3)} & \binom{n}{m-4}\lambda^{n-(m-4)} & \dots & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \lambda^n & 0 \\ \binom{n}{m-1}\lambda^{n-(m-1)} & \binom{n}{m-2}\lambda^{n-(m-2)} & \binom{n}{m-3}\lambda^{n-(m-3)} & \dots & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \lambda^n \end{pmatrix}$$

entendiendo que $\binom{n}{q} = 0$ si $q > n$.

Cuando el término independiente B_n es complicado o las cajas de Jordan tienen una dimensión alta, esta alternativa puede ser muy costosa y poco práctica.

3. Estabilidad de las ecuaciones en diferencias

Los primeros términos de una ecuación en diferencias no suelen tener mucho interés, pues básicamente, podemos calcularlos de forma relativamente sencilla. Otra cosa bien distinta es saber qué va a pasar cuando $n \to \infty$, lo que se suele llamar *comportamiento asintótico* de sus soluciones.

Diremos que una ecuación en diferencias es **estable** si todas sus soluciones tienden a comportarse como una misma función discreta cuando $n \to \infty$, esto es, cuando existe una solución de la EDF $\{y_n^*\}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} y_n - y_n^* = 0 \tag{28}$$

para cualquier solución $\{y_n\}$ de la EDF.

Por ejemplo, la EDF $y_{n+1} = 0.5y_n + 1$ tiene como solución general $y_n = C0.5^n + 2$ por lo que si $y_n^* = 2$, se tiene que $y_n - 2 \to 0$ cuando $n \to \infty$, por lo que la EDF es estable y, además, todas sus soluciones convergen al mismo valor $K = 2$. Esto es lo que se llama *valor de equilibrio estacionario*. Otra EDF estable es $y_{n+1} = 0.5y_n + n$, ya que tiene como solución $y_n = C0.5^n + 2n - 4$ que, para todo C, cuando $n \to \infty$ tiende a comportarse como $y_n^* = 2n - 4$. Por tanto, esta EDF es estable pero todas sus soluciones son divergentes.

Otro ejemplo clarificador es la EDF $y_{n+1} = y_n$, cuya solución general es $y_n = C = y_0$. Por tanto, todas las soluciones son convergentes (es más, constantes), pero la EDF no es estable pues dependiendo de C (del valor inicial), las soluciones se comportarán de forma diferente cuando $n \to \infty$.

Observación 1: Hay que observar que si una EDF es estable la sucesión $\{y_n^*\}$ no es única. Por ejemplo, en la EDF anterior $y_{n+1} = 0.5y_n + 1$ con solución general $y_n = C0.5^n + 2$ se puede tomar $y_n^* = 3 \cdot 0.5^n + 2$ y se cumple también la definición anterior.

En el caso de los problemas lineales, si tenemos dos soluciones y_n^* y $\tilde{y}_n$ de la ecuación $Ly_n = d_n$, tal que $y_n - y_n^* \to 0$ e $y_n - \tilde{y}_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, como la diferencia $\tilde{y}_n - y_n^*$ es solución de la homogénea, se tendrá que

$$\tilde{y}_n = y_n^* + \sum_i C_i \xi_i^n,$$

por lo que se suele preferir tomar y_n^* como la solución que no incluye ningún término que sea, a su vez, solución de la homogénea.

Observación 2: hay otro concepto de estabilidad que se suele estudiar cuando se trabaja con algunos métodos numéricos, que es el de la *sensibilidad a los valores iniciales*. Es decir, asegurar que, si el mismo esquema iterativo arranca de dos conjuntos de valores iniciales cercanos $\{y_0^0, \ldots, y_{k-1}^0\}$ y $\{\tilde{y}_0^0, \ldots, \tilde{y}_{k-1}^0\}$, las dos correspondientes sucesiones y_n e $\tilde{y}_n$ están cercanas.

En el ejemplo anterior, $y_{n+1} = 0.5y_n + 1$ con solución $y_n = C0.5^n + 2 \to 2$ o, expresándola en función del valor inicial y_0, $y_n = (y_0 - 2)0.5^n + 2$, si partimos de $y_0 \neq \tilde{y}_0$, se tiene

$$|y_n - \tilde{y}_n| = |y_0 - \tilde{y}_0| 0.5^n < |y_0 - \tilde{y}_0|, \quad \forall n \geq 1,$$

por lo que también sería estable en este ámbito. La EDF $y_{n+1} = 0.5y_n + n$ cuya solución es $y_n = C0.5^n + 2n - 4$, también sería estable desde este punto de vista. En cambio, $y_{n+1} = y_n$, con solución $y_n = y_0$ sería estable, pero no según la definición (28).

Realmente el concepto de EDF estable solo tiene pleno sentido dentro del grupo de EDFs lineales, pues en dichas ecuaciones todas las soluciones se comportan de la misma forma cuando $n \to \infty$, independientemente de la condición inicial considerada. Sin embargo, aunque se puede aplicar este concepto a una EDF no lineal, es muy probable que, dependiendo del valor inicial tomado, el comportamiento de unas soluciones y de otras de la misma EDF no lineal, difiera enormemente. En dicho caso, se hablará de puntos de equilibrio estables o inestables, pues se estudiará sólo el comportamiento de las soluciones de la EDF que partan de valores iniciales cercanos a dichos puntos de equilibrio. En el siguiente tema abordaremos con más detalle el caso de los problemas no lineales. Por ahora nos quedaremos en el estudio de las EDF lineales de coeficientes constantes.

3.1 Estabilidad de EDFs lineales de coeficientes constantes

Ya sabemos que la solución general de la EDF lineal de coeficientes constantes (1) de orden $k \geq 1$ completa es $y_n = y_n^h + y_n^c$. Como la y_n^c no depende de las constantes arbitrarias (no depende de los valores iniciales impuestos), la estabilidad va a depender solo de la y_n^h. Más precisamente,

Teorema 2 *La EDF* (1) *es estable si y sólo si* $\lim_{n\to\infty} y_n^h = 0$ *para cualquier conjunto de valores iniciales* $\{y_0^0, \ldots, y_{k-1}^0\}$ *elegidos.*

Demostración: Demostrar que si $y_n^h \to 0$ cuando $n \to \infty$ se tiene la estabilidad es sencillo usando que toda solución de (1) se puede expresar como $y_n = y_n^h + y_n^c$, donde y_n^c es cualquier solución de la completa. Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} y_n^h = \lim_{n\to\infty} y_n - y_n^c = 0$$

implica la existencia de $y_n^* = y_n^c$, lo que demuestra la estabilidad.

Para demostrar que si la EDF es estable, necesariamente $y_n^h \to 0$ cuando $n \to \infty$, tenemos que tener en cuenta que, por hipótesis, existe y_n^* tal que $y_n - y_n^* \to 0$ cuando $n \to \infty$ para toda solución y_n de (1), lo que implica que cada solución de la ecuación completa se puede escribir como

$$y_n = y_n^* + \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \to 0, \quad n \to \infty. \tag{29}$$

Como cada y_n se puede escribir también como $y_n = y_n^h + y_n^c$, se tiene que cualquier solución de la homogénea verifica

$$y_n^h = y_n - y_n^c = y_n^* - y_n^c + \varepsilon_n \to 0, \quad n \to \infty,$$

ya que, por hipótesis, también se tiene $y_n^* - y_n^c \to 0$, lo que demuestra el Teorema. □

Como la solución y_n^h viene dada por (20) tenderá a 0, o sea, *la EDF será estable si y solamente si todas las raíces del polinomio característico verifican* $|\xi_i| < 1$, $\forall i = 1, \ldots, s$. Esto también se suele expresar diciendo que todas las raíces del polinomio característico tienen que estar en el interior del círculo unidad $S = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| < 1\}$.

En el caso de sistemas de k ecuaciones en diferencias lineales con k incógnitas (21) de orden 1, por el Lema 1, se tiene que serán estables si y sólo si todos los autovalores de la matriz de coeficientes A están en el disco unidad S.

En general, el cálculo de las raíces del polinomio característico puede ser complicado. Por ello se han investigado criterios para saber si una EDF es estable o no a partir de sus coeficientes. En el caso de EDFs de orden 2 el criterio es relativamente simple.

Teorema 3 *Consideremos, sin pérdida de generalidad, la EDF lineal de coeficientes constantes de orden 2*

$$y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = d_n, \quad n \geq 0.$$

Esta EDF es estable si y sólo si

$$|a_0| < 1, \quad |a_1| < 1 + a_0. \tag{30}$$

Demostración.- El polinomio característico de esta EDF y sus raíces son

$$\rho(\xi) = \xi^2 + a_1\xi + a_0 = 0 \Leftrightarrow \xi = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}.$$

Para demostrar el Teorema tenemos que considerar los tres tipos de raíces posibles según el signo del discriminante.

Si $a_1^2 - 4a_0 < 0$ tenemos dos raíces complejas

$$\xi = \frac{-a_1 \pm \sqrt{-a_1^2 + 4a_0}\, i}{2}, \quad \text{tal que } |\xi|^2 = \frac{a_1^2 + (-a_1^2 + 4a_0)}{4} = a_0$$

Obsérvese que, en este caso, necesariamente $a_0 > 0$ porque si fuera $a_0 \leq 0$, se tendría que $a_1^2 - 4a_0 \geq 0$. Así que $|\xi| < 1$ sii $0 < a_0 < 1$ en este caso.

Por tanto, si se verifican las condiciones (30), en este caso se tiene que la EDF es estable. Recíprocamente, si la EDF es estable, se tiene $|a_0| < 1$ y, además, se tiene la segunda condición en (30) porque

$$a_1^2 < 4a_0 \Rightarrow |a_1| < 2\sqrt{a_0} < 1 + a_0$$

ya que $(2\sqrt{a_0})^2 < (1 + a_0)^2$ es equivalente a que $(a_0 - 1)^2 > 0$.

Si $a_1^2 - 4a_0 > 0$ tenemos dos raíces reales diferentes

$$\xi_1 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}, \quad \xi_2 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}, \quad \text{con } \xi_1 < \xi_2.$$

Se tiene que $|\xi_i| < 1$ si y sólo si

$$-2 < -a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0} < 2, \quad -2 < -a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0} < 2,$$

o que

$$-2 + a_1 < -\sqrt{a_1^2 - 4a_0} < 2 + a_1, \quad -2 + a_1 < \sqrt{a_1^2 - 4a_0} < 2 + a_1.$$

Estas desigualdades solo tienen sentido si y sólo si $-2+a_1<0$ y $2+a_1>0$, o, lo que es lo mismo, sii $-2<a_1<2$. En tal caso, solo habría que garantizar que

$$\sqrt{a_1^2-4a_0}<-(-2+a_1) \quad \text{y} \quad \sqrt{a_1^2-4a_0}<2+a_1$$

Elevando al cuadrado en ambas desigualdades, teniendo en cuenta que todos los miembros son positivos, esto es equivalente a que

$$1-a_1+a_0>0 \quad \text{y} \quad 1+a_1+a_0>0,$$

o, lo que es lo mismo, $1+a_0>|a_1|$. Con esta información tenemos que demostrar la equivalencia dada por el Teorema. Si en este caso la EDF es estable, se tiene que $1+a_0>|a_1|$ y que $-2<a_1<2$. Faltaría demostrar que $|a_0|<1$. Si $a_0<0$ se tiene que $1+a_0>|a_1|\geq 0$ por lo que $1+a_0>0$, o $a_0>-1$. Si $a_0\geq 0$, ya que $a_1^2>4a_0\geq 0$ se tiene que $2\sqrt{a_0}<|a_1|<2$, lo que implica que $a_0<1$. Por tanto, en cualquier caso, $|a_0|<1$ y se verifica (30). Recíprocamente, si se tiene (30), se tiene que $|a_1|<1+a_0<2$ y se garantiza que la EDF es estable.

En el caso $a_1^2-4a_0=0$ solo se tiene la raíz múltiple $\xi=-a_1/2$ que verificará que $|\xi|<1$ sii $|a_1|<2$. Así que si la EDF es estable, $|a_1|<2$ por lo que

$$|a_0|=\frac{|a_1|^2}{4}<1.$$

Además, como $a_0\geq 0$,

$$|a_1|=2\sqrt{a_0}<1+a_0$$

lo que ya se demostró en el caso de las raíces complejas, por lo que se cumplen las condiciones (30). Recíprocamente, si se cumple (30) en este caso, se tiene que $|\xi|<1$ y la EDF es estable. □

Intentar construir un criterio parecido para órdenes más altos es bastante más complejo. El problema de localizar las raíces de un polinomio característico no es solo importante para conocer la estabilidad de una EDF lineal sino también para la estabilidad de sistemas lineales de EDFs, de ecuaciones diferenciales o la localización de ceros de polinomios y de autovalores en general. Por eso en la literatura hay muchos criterios que dan condiciones necesarias o suficientes para garantizar que las raíces de un polinomio caigan en el interior del círculo unidad. El siguiente criterio, en la versión dada en [2], da unas condiciones necesarias y suficientes que lo garantizan, aunque su aplicación para órdenes altos también es muy complicada.

Teorema 4 Criterio de Schur: *Consideremos la EDF (1) de orden k con $\alpha_k>0$. Para cada $r=1,\ldots,k$ se construyen los siguientes determinantes de orden $2r$:*

$$D_r=\begin{vmatrix} \alpha_k & 0 & \cdots & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{r-1} \\ \alpha_{k-1} & \alpha_k & \cdots & 0 & 0 & \alpha_0 & \cdots & \alpha_{r-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k-r+1} & \alpha_{k-r+2} & \cdots & \alpha_k & 0 & 0 & \cdots & \alpha_0 \\ \alpha_0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_k & \alpha_{k-1} & \cdots & \alpha_{k-r+1} \\ \alpha_1 & \alpha_0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha_k & \cdots & \alpha_{k-r+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{r-1} & \alpha_{r-2} & \cdots & \alpha_0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_k \end{vmatrix}$$

La EDF (1) si y sólo si $D_r>0$, $\forall r=1,2,\ldots,k$.

Para verlo más fácilmente,

$$D_r=\left|\begin{array}{c|c} P_r & Q_r^T \\ \hline Q_r & P_r^T \end{array}\right|,\ P_r=\begin{pmatrix} \alpha_k & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{k-1} & \alpha_k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k-r+1} & \alpha_{k-r+2} & \cdots & \alpha_k \end{pmatrix},\ Q_r=\begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{r-1} & \alpha_{r-2} & \cdots & \alpha_0 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, si $k = 2$:

$$D_1 = \left|\begin{array}{c:c} \alpha_2 & \alpha_0 \\ \hdashline \alpha_0 & \alpha_2 \end{array}\right| = \alpha_2^2 - \alpha_0^2, \; D_2 = \left|\begin{array}{cc:cc} \alpha_2 & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 0 & \alpha_0 \\ \hdashline \alpha_0 & 0 & \alpha_2 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & \alpha_2 \end{array}\right| = (\alpha_0 - \alpha_2)^2 \left((\alpha_0 + \alpha_2)^2 - \alpha_1^2\right)$$

de donde se deduce que una EDF (1) de orden 2, con $\alpha_2 > 0$, es estable si y sólo si

$$\alpha_2 > |\alpha_0|, \quad |\alpha_0 + \alpha_2| > |\alpha_1|,$$

que son las mismas condiciones que se dedujeron en el Teorema 3, tomando $a_0 = \alpha_0/\alpha_2$, $a_1 = \alpha_1/\alpha_2$.

3.2 Estabilidad de sistemas de EDFs lineales de primer orden

El estudio de estabilidad de los sistemas de EDFs lineales de primer orden de dimensión $k \geq 1$ de la forma (21), con matriz A no singular, está directamente relacionado con la estabilidad de las EDFs escalares lineales de orden k (1) ya que, como vimos en el Lema 1 de la Sección 2, cualquier sistema de este tipo es equivalente a una EDF (26) de orden k.

Pero también se puede hacer directamente estudiando la solución dada en forma matricial (23). Si llamamos

$$Y_n^* = \sum_{j=1}^{n} A^{j-1} B_{n-j}, \tag{31}$$

se tiene que cualquier solución de la forma (23) (cualquier solución obtenida variando Y_0), verificará

$$\|Y_n - Y_n^*\| = \|A^n Y_0\| \leq \|A^n\| \|Y_0\| \longrightarrow 0, \; n \to \infty \quad \iff \quad \|A^n\| \to 0, \; n \to \infty,$$

pues hay que recordar que la norma matricial inducida por la norma vectorial considerada es el menor valor que cumple la desigualdad anterior. Exigir esta condición a la matriz A es lo mismo que decir que A tiene que ser una *matriz convergente* (que exista una norma matricial[1] tal que $\|A^n\| \to 0$, $n \to \infty$), o, lo que es lo mismo, que $r_\sigma(A) < 1$, donde $r_\sigma(A)$ denota el radio espectral de la matriz A,

$$r_\sigma(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

En consecuencia, el sistema de EDFs (21) es estable si y sólo si $r_\sigma(A) < 1$, es decir, si y sólo si todos los autovalores de A están en el interior del círculo unidad.

Si el coeficiente no homogéneo es constante ($B_n = B$, $\forall n$), se tendrá un vector de equilibrio estacionario $Y_n^* = \left(\sum_{j=1}^{n} A^{j-1}\right) B$, mientras que en el caso de tener coeficiente B_n variable tendremos el vector de equilibrio dinámico (31).

Por otra parte, usando la descomposición de Jordan de la matriz A también se puede estudiar el comportamiento de las soluciones (23), llegándose a la misma conclusión, que el sistema es estable si y solo si $r_\sigma(A) < 1$, pero esto no lo veremos en este curso.

4. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Resolver las ecuaciones en diferencias de primer orden

   (a) $y_{n+1} + 2y_n = 1$ (b) $y_{n+1} = y_n + n$ (c) $y_{t+1} = 2y_t + t$

   (d) $y_{t+1} + 2y_t = t^2 + t$ (e) $y_{n+1} + 2y_n = 3^n$ (f) $y_{n+1} + 2y_n = \sin n\pi$

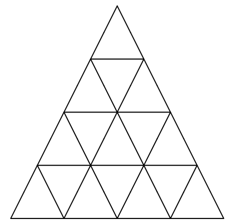
2. Resolver las ecuaciones en diferencias lineales de segundo orden y coeficientes constantes

   (a) $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 3y_n = 2^{n-1}$ (b) $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 3y_n = 3^{n-1}$ (c) $y_{t+2} + y_t = 2$

   (d) $y_{t+2} + 2y_{t+1} + y_t = \cos \pi t/2$ (e) $y_{n+2} + y_n = \cos n\pi/2$ (f) $y_{n+2} - 6y_{n+1} + 9y_n = 2^n$

[1] Recuérdese también que todas las normas matriciales en $\mathbb{R}^k$ son equivalentes.

3. Supongamos que cada lado de un triángulo equilátero con el vértice ascendente está dividido en n partes iguales, que son luego utilizadas para dividir el triángulo en triángulos equiláteros más pequeños, tal y como muestra la figura (para $n = 4$):



¿Cuántos triángulos con el vértice ascendente de todos los tamaños hay?

4. Supongamos que los conejos se reproducen con una velocidad de tal forma que una pareja nace cada mes a partir de una pareja mayor de dos meses. Si inicialmente hay una pareja de adultos y ninguno muere, comprobar que el número total de parejas en los sucesivos meses vienen dados por 1,2,3,5,8,... (*sucesión de Fibonacci*). Determinar una ecuación en recurrencia que permita calcular el número de parejas en función de los meses transcurridos.

5. Tenemos una viga que está inicialmente deteriorada en un 25%. Mediante un proceso catalítico, se consigue que mensualmente se recupere un 40% de la zona deteriorada, aunque se sigue deteriorando un 20% de la zona sana. >Cuál es la situación a los 3 meses? >Y al cabo de mucho tiempo?.

6. Sea A_n el determinante de orden n definido por:

$$A_1 = |2|, \qquad A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \qquad A_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad n \geq 3$$

(a) Demostrar que verifica la relación de recurrencia $A_n - A_{n-1} = A_{n-1} - A_{n-2}$, $n \geq 3$ (o, lo que es lo mismo, $A_n = 2A_{n-1} - A_{n-2}$)

(b) Calcular el valor de A_n en función del orden n.

7. En el estudio cíclico de inventarios de Metzler el crecimiento del ingreso está dado por la ecuación en diferencias finitas
$$y_t = 2by_{t-1} - by_{t-2} + I$$
donde $0 < b < 1$ e I es un nivel constante de inversión autónoma. Resolver el caso en que $b = 1/2$, $y_0 = 1000$, $y_1 = 1100$. ¿Qué ocurrirá cuando $t \longrightarrow \infty$?

8. Transformar los siguientes sistemas lineales $Y_{n+1} = AY_n + B_n$ de orden 1 en ecuaciones de orden 2 y resolverlos:

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$, $B = 0$ (b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix}$ (d) $A = \begin{pmatrix} 3n & 0 \\ 0 & 2n/(n+1) \end{pmatrix}$, $B = 0$,

(e) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ n \end{pmatrix}$ (f) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} n \\ n^2 \end{pmatrix}$,

(g) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2n \end{pmatrix}$ (h) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3n^2 \end{pmatrix}$,

(i) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ n \end{pmatrix}$ (j) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2n \\ 0 \end{pmatrix}$,

9. La interacción entre las lechuzas y las ratas, en un bosque, se puede modelizar mediante la ecuación en diferencias
$$\begin{cases} L_{k+1} = \dfrac{1}{2}L_k + \dfrac{1}{4}R_k \\ \\ R_{k+1} = -\dfrac{1}{2}L_k + \dfrac{5}{4}R_k \end{cases}$$
donde L_k es la cantidad de lechuzas en el mes k y R_k la cantidad de ratas (en miles) en el mes k. Calcular la población de lechuzas y ratas en cada mes $k \geq 1$, sabiendo que $L_1 = 15$ y $R_1 = 14$.

10. Si denotamos por R_t y U_t las respectivas poblaciones rural y urbana en un país en el año t, medidas en millones de habitantes, la evolución de la migración interna en dicho país puede modelizarse por el siguiente modelo lineal
$$\begin{array}{rl} R_{t+1} = & \alpha_t R_t + (1-\beta_t)U_t, \\ U_{t+1} = & (1-\alpha_t)R_t + \beta_t U_t, \qquad t = 0, 1, \ldots \end{array} \tag{32}$$
siendo α_t y β_t los porcentajes de población que se quedan en la zona rural y urbana, respectivamente.
   (a) Resolver el sistema (32) en el caso particular de que $\alpha_t = \beta_t = 1/3$, es decir, cuando un tercio de cada población se queda en su lugar y los dos tercios emigra, teniendo en cuenta que las respectivas poblaciones iniciales son $R_0 = 1$ y $U_0 = 6$.
   (b) ¿Cómo van a evolucionar ambas poblaciones a lo largo del tiempo?

5. BIBLIOGRAFÍA

[1] S. Goldberg, *Introduction to difference equations*, Ed. John Wiley and Sons, 1958.

[2] C. González-Concepción, J. A. Barrios García, *Análisis discreto en Economía y Empresa*, Ed. AC, 2000.