

TEMA 3: ECUACIONES EN DIFERENCIAS NO LINEALES. BIFURCACIÓN EN SISTEMAS DISCRETOS

CONTENIDOS

1	EDFs NO LINEALES	1
2	DIAGRAMAS DE TELARAÑA	2
3	LA ECUACIÓN LOGÍSTICA	2
3.1	El camino hacia el caos	3
4	BIFURCACIÓN EN SISTEMAS DISCRETOS	5
5	BIFURCACIÓN DE LA ECUACIÓN LOGÍSTICA.	7
6	DIAGRAMA DE BIFURCACIÓN	9
7	ANEXO: MATERIAL COMPLEMENTARIO	9
7.1	Teoremas del punto fijo	9
7.2	Comparación EDF/EDO	10
8	EJERCICIOS PROPUESTOS	11
9	BIBLIOGRAFÍA	12

1. EDFs NO LINEALES

El estudio de las EDFs no lineales en general es prácticamente imposible, dado que ecuaciones relativamente sencillas pueden presentar un grado de complicación asombroso. Por ello se suele trabajar habitualmente ciertas clases de EDFs no lineales muy concretas.

Nosotros aquí solo vamos a considerar el caso de ciertas EDFs escalares no lineales de orden 1,

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \geq 0, \quad x_0 \text{ dado} \tag{1}$$

siendo f una función de una variable real suficientemente diferenciable.

Los *esquemas iterativos* que se ven en cualquier curso elemental de métodos numéricos para resolver ecuaciones no lineales $g(x) = 0$ son un caso particular de EDFs de primer orden, no lineales en general. Por ejemplo, la *iteración funcional o iteración de punto fijo* para resolver ecuaciones $g(x) = 0$ es un esquema de este tipo (1) con $f(x) = g(x) + x$. El método de Newton para resolver este mismo tipo de ecuaciones $g(x) = 0$ también es de tipo (1) con $f(x) = x - g(x)/g'(x)$.

Sabemos que si la iteración (1) converge, es decir, si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \rightarrow \alpha$ cuando $n \rightarrow \infty$, este punto α es necesariamente un *punto fijo de $f(x)$* , esto es,

$$f(\alpha) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \alpha.$$

Este punto fijo es lo que en el ámbito de las ecuaciones en diferencias anteriores es un punto de equilibrio estacionario y, en dicho caso, el esquema iterativo (1) es estable. Luego la estabilidad del esquema dependerá de si es convergente o no.

Una herramienta muy útil a la hora de estudiar el comportamiento de estos esquemas iterativos son los *diagramas de telaraña*.

2. DIAGRAMAS DE TELARAÑA

Los diagramas de telaraña son una representación geométrica que ayuda a visualizar las iteraciones de un esquema (1). Para realizar un diagrama de telaraña de un esquema, se superpone en el mismo gráfico la curva de la función $y = f(x)$ y de la bisectriz $y = x$.

Se marca en el eje OX el punto inicial x_0 y se levanta una recta vertical hasta la curva $f(x)$, cuya altura va a ser $x_1 = f(x_0)$. Desde ese punto $(x_0, f(x_0))$ se traza una línea horizontal hasta la recta $y = x$. La abscisa de este punto será la también la iteración x_1 . Ahora desde ese punto de la recta $y = x$ se levanta (o baja) una recta vertical hasta la curva $y = f(x)$, cuya altura va a ser $x_2 = f(x_1)$. Desde este punto $(x_1, f(x_1))$ se saca ahora una recta horizontal hasta la recta $y = x$ y así sucesivamente, en el eje OX van apareciendo todas las iteraciones x_0, x_1, \dots y en el gráfico aparece una "telaraña", que puede tener distintas "formas".

Por ejemplo, si consideramos la iteración (1) donde $f(x) = x^2 + 0.1$ que arranca en $x_0 = 0.6$ se obtienen las iteraciones dadas en la gráfica de la derecha de la Fig. 1, que se refleja mejor en el diagrama de telaraña que se puede ver en la izquierda de la Fig. 1.

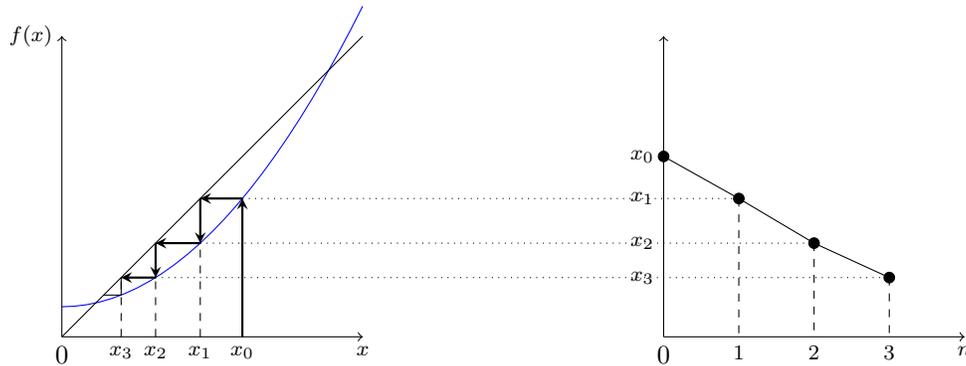


Figura 1: Diagrama de telaraña e iteraciones de (1) con $f(x) = x^2 + 0.1$.

3. LA ECUACIÓN LOGÍSTICA

Existe un gran grupo de ecuaciones en diferencias no lineales de este tipo (1) que presentan un comportamiento determinista pero que parece aleatorio conocido actualmente como *movimiento caótico*. En muchos de estos sistemas las soluciones (o el propio sistema) dependen de un parámetro de forma que pequeñas variaciones de dicho parámetro pueden provocar grandes diferencias de comportamiento de sus soluciones.

Una de las ecuaciones más simples de tipo (1) que presentan una dinámica caótica es la ecuación logística discreta. Esta ecuación discreta suele usarse, además, para modelizar la evolución de muchas poblaciones. Denotemos x_n a la población *fraccionaria* de cierta especie en el instante $t = n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Es decir, $x_n = 1$ representa a la población máxima que el entorno donde vive la especie puede soportar, 0.5 es la mitad de la población máxima, etc. Entonces, bajo ciertas condiciones, el crecimiento de dicha población dependerá de la capacidad de reproducirse de dicha población (*tasa de natalidad o de reproducción*), pero también estará controlado por el hecho de que el hábitat solo puede soportar a una cantidad máxima de individuos (el caso $x = 1$). Por tanto, la evolución de la población seguirá la *ecuación logística discreta*

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{2}$$

donde el parámetro $\lambda \in (0, 4]$ se llama *parámetro de crecimiento* y se toma en este intervalo para garantizar que para cualquier valor inicial $x_0 \in [0, 1]$, todas las iteraciones $x_n \in [0, 1]$, $n = 1, 2, \dots$ ($0 \leq x(1 - x) \leq 1/4$, para todo $x \in [0, 1]$). A la sucesión de iterantes $\{x_n\}$ que parte de un valor inicial x_0 dado se le suele llamar *órbita de x_0* .

Esta ecuación es un caso particular de esquema iterativo (1) con

$$f(x) = f_\lambda(x) = \lambda x(1 - x) \tag{3}$$

Obsérvese que hacemos patente la dependencia de f respecto de λ pues realmente, más que una ecuación concreta, (2) representa una familia parametrizada de ecuaciones no lineales. Desde el punto de vista práctico, este parámetro es un valor que debe calibrarse cuando se estudia una especie en particular, es decir, se debe buscar el valor apropiado que refleje el crecimiento de dicha especie en concreto. Que aparezca un comportamiento caótico en un modelo supone que pequeños errores en dicha calibración pueden provocar grandes errores en la predicción que hagamos con el modelo, lo que muestra la importancia de este análisis.

3.1 El camino hacia el caos

Podemos realizar con Matlab un experimento similar al que llevó a cabo el biólogo R. May [5] tomando varios λ con cualquier valor inicial $x_0 \in (0, 1)$ y ver cómo evolucionan las iteraciones. Experimentalmente, dibujando los correspondientes diagramas de telaraña (ver Fig. 2), se puede observar que ocurren las siguientes situaciones:

- *La población se extingue si $\lambda \in (0, 1]$* : es decir, la sucesión (2) tiende a 0 independientemente del valor $x_0 \in (0, 1)$ que se tome. También se ve claramente en el diagrama de telaraña (a) de la Fig. 2, que la gráfica rápidamente se acerca al 0 debido a que la función (3) está toda por debajo de la bisectriz.

Tomemos, por ejemplo, el caso de la evolución de la población de la polilla gitana (*lymantria dispar dispar*) que se ajusta al modelo logístico (2). Si las condiciones de temperatura, alimento, etc., provocan un parámetro de crecimiento $\lambda \in (0, 1]$, la población de polilla se extinguirá rápidamente.

- *La población se acerca a un valor límite α_λ si $\lambda \in (1, 3)$* : en este caso, si tomamos cualquier valor inicial $x_0 \in (0, 1)$, la sucesión (2) tiende al valor límite $\alpha_\lambda = (\lambda - 1)/\lambda$. Por ejemplo, si consideramos $\lambda = 2.5$, vemos en el diagrama (b) de la Fig. 2 que la curva de (3) corta en dos puntos a la bisectriz pues la ecuación $y = x$, ó $(2.5 - 1)x - 2.5x^2 = 0$, tiene como soluciones a dos puntos fijos $x = 0$ y $x = (2.5 - 1)/2.5 = 0.6$. Si hacemos un diagrama de telaraña para cualquier $x_0 \in (0, 1)$, vemos que la gráfica se acerca rápidamente a 0.6, aunque tomemos un valor de x_0 muy cercano al 0. Por eso se dice que el punto de equilibrio $x = 0$ es un *punto fijo repulsor* mientras que el punto de equilibrio $x = 0.6$ es un *punto fijo atractor*.

Es interesante, además, observar que el comportamiento a largo plazo de la solución de (2) va a depender de λ y no del valor inicial $x_0 \in (0, 1)$ que se tome.

Obsérvese que esto constituye una gran diferencia entre los modelos lineales y este: los lineales solo tienen un punto fijo, mientras que los lineales pueden tener varios, con comportamientos de la solución diferentes según se esté cerca de un punto fijo o de otro.

Si pensamos, por ejemplo, en el caso de que para la población de polilla gitana el parámetro λ estuviera en $(1, 3)$, incluso una población muy pequeña evolucionaría hasta estabilizarse cerca de un valor positivo (que dependería de λ).

Podríamos pensar que con el estudio de los dos puntos fijos que acabamos de ver tendríamos todo resuelto, pero la ecuación logística da todavía más sorpresas.

- Si $\lambda \in [3, 3.4495\dots)$: obsérvese en la tercera telaraña de la Fig. 2 que para $\lambda = 3$ el valor inicial $x_0 = 0.1$ se mueve rápidamente en dirección al punto de equilibrio $\alpha_3 = (3 - 1)/3 = 2/3$ pero luego gradualmente gira en espiral alejándose de él y termina saltando entre dos valores que lo "rodean". Esto significa que las iteraciones con n par a lo largo del tiempo se acercan a un valor y las iteraciones con n impar se acercan a otro. Y esto se observa para cualquier valor de λ que tomemos en este intervalo.

Es decir, las órbitas no se acercan a ninguno de los dos puntos fijos, sino que experimentalmente se ve que empiezan a "girar" acercándose a una especie de "rectángulo" que rodea al punto α_λ . Este "rectángulo" que aparece experimentalmente se llama **2-ciclo atractor**, pues las órbitas se acercan a él.

Además, está claro que el valor $\lambda = 3$ es un valor que separa, dentro de la familia paramétrica de ecuaciones (2), ecuaciones cuyas órbitas tienen dinámicas completamente diferentes. Por eso se dice que la familia de funciones $\{f_\lambda\}$ dada en (3) tiene una **bifurcación en $\lambda = 3$** y al valor $\lambda = 3$ se le llama valor de bifurcación.

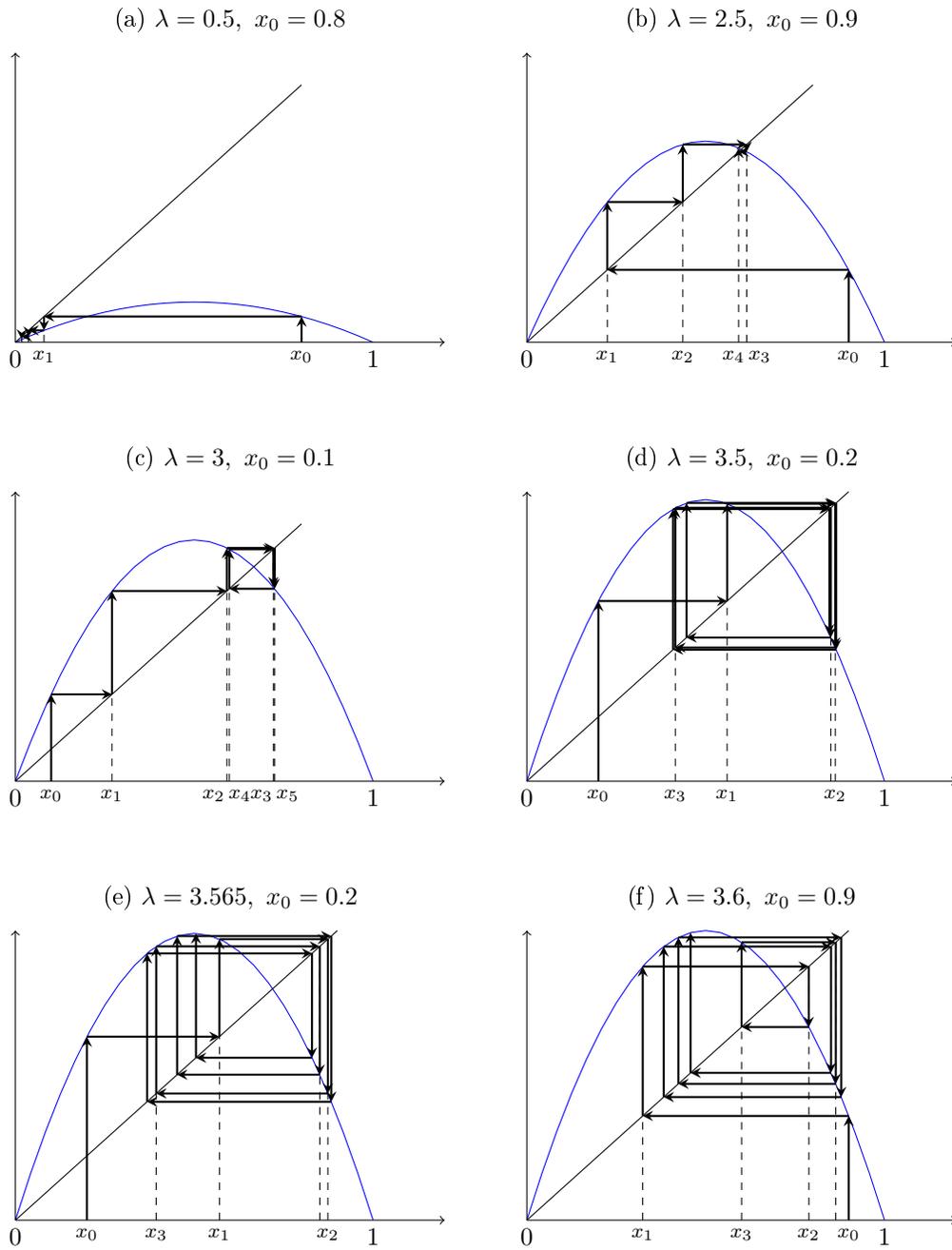


Figura 2: Diagramas de telaraña de la ecuación logística (2)

En el caso de la polilla, si tuviésemos un valor de λ en este intervalo, la población experimentaría una explosión demográfica en años alternos. En la naturaleza se pueden observar en ciertas situaciones este tipo de períodos de explosión de poblaciones cada dos años (ciertas poblaciones de peces, insectos, etc.) .

- Si $\lambda \in (3.4495\dots, 3.5441\dots)$: el 2-ciclo se bifurca de nuevo, formando lo que se llama **4-ciclo atractor**. Las soluciones van a estar moviéndose alternadamente entre cuatro valores diferentes (que dependen de λ), como se puede ver en la telaraña (d) de la Fig. 2, y el valor $\lambda_2 = 3.4495\dots$ es otro valor de bifurcación.

Si las condiciones provocasen una situación de este tipo en el caso de las polillas, el crecimiento de la población variaría con ciclos de 4 años.

- Si $\lambda \in (3.5441\dots, 3.56994\dots)$: va surgiendo una sucesión de valores de λ , también llamada *cascada duplicadora de períodos*,

$$\lambda_3 := 3.5441\dots < \lambda_4 < \lambda_5 < \dots < \lambda_\infty := 3.56994\dots$$

de tal forma que la solución para $\lambda_3 \leq \lambda < \lambda_4$ tiene un 8-ciclo atractor, para $\lambda_4 \leq \lambda < \lambda_5$ tiene un 16-ciclo atractor, para $\lambda_5 \leq \lambda < \lambda_6$ tiene un 32-ciclo atractor, etc. Así hasta llegar al punto de acumulación λ_∞ . Por ejemplo, en la quinta telaraña de la Fig. (2) se puede ver qué pasa con el valor $\lambda = 3.565$.

En el ejemplo de la polilla, si este caso sucediera y el biólogo que está estudiando la población de polillas no tiene datos de muchos años hacia atrás, los períodos en que se vuelve a repetir el proceso serían tan largos que parecería que la población sigue un crecimiento aleatorio.

- Si $\lambda \in (3.56994\dots, 4)$: en [5], el autor muestra que para $\lambda > \lambda_\infty$ hay un número infinito de ciclos diferentes. Hay también valores iniciales para los que se tiene un órbita acotada pero sin ninguna periodicidad. Por ejemplo, en la última telaraña de la Fig. 2 se puede ver lo que ocurre cuando $\lambda = 3.6$. Recomendamos realizar este diagrama con Matlab, computando 500 iteraciones para ver mejor este comportamiento. En este caso la solución aparentemente salta sin sentido y sin ningún tipo de orden. En otras palabras, la solución de la ecuación logística (2) se hace caótica.

Un biólogo en este caso pensaría que la población de polillas crece de forma aleatoria, sin seguir ningún tipo de ley dinámica.

Sin embargo, este intervalo aún tiene una sorpresa más: la existencia de un 3-ciclo en el punto $\lambda = 1 + \sqrt{8} = 3.8284\dots$ que cambia la dinámica para $\lambda \in (1 + \sqrt{8}, 4)$, aunque sigue siendo caótica. Para llegar a este punto tenemos que abordar el estudio analítico de este modelo.

4. BIFURCACIÓN EN SISTEMAS DISCRETOS

Como hemos visto experimentalmente, en los esquemas iterativos (1) los puntos fijos de la función $f(x)$ van a ser determinantes en la estabilidad de dichos esquemas, pero no sólo ellos, sino también los llamados *puntos periódicos*. Veamos solamente una introducción a la teoría de la bifurcación de este tipo de EDFs no lineales que explica lo que experimentalmente se observa en la ecuación logística. Un análisis más profundo se sale de lo que podemos dar en un curso como este.

Dada la ecuación (1) con valor inicial x_0 , se llama *órbita de x_0* a la sucesión de iteraciones

$$\{x_0, x_1, x_2, \dots\} = \{x_0, f(x_0), f(f(x_0)), \dots\}$$

Para manejar estos valores denotamos la composición iterada de funciones en la notación de producto

$$f^k(x_0) = f(f(\dots(f(x_0))\dots)) = x_k, \quad k \geq 0$$

Como ya sabemos, se llama *punto fijo de f* a cualquier valor α tal que $f(\alpha) = \alpha$. Por tanto, si α es un punto fijo de f se tiene

$$f(\alpha) = \alpha, \quad f^2(\alpha) = f(\alpha) = \alpha, \quad f^3(\alpha) = f(f^2(\alpha)) = f(\alpha) = \alpha, \dots f^k(\alpha) = \alpha, \quad \forall k \geq 1,$$

es decir, la órbita de $x_0 = \alpha$ es la sucesión constante $\{\alpha, \alpha, \dots\}$.

Hay muchos teoremas que garantizan la existencia de puntos fijos bajo ciertas condiciones sobre f y el dominio en el que se está trabajando. Por ahora, nosotros trabajaremos con la siguiente versión sencilla en \mathbb{R} , que es una aplicación directa del Teorema de Bolzano:

Teorema 1 Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Si $I \subset f(I)$, entonces f tiene un punto fijo en I .

Como vimos en la ecuación logística (2), los puntos fijos explican lo que ocurre cuando $0 < \lambda < 3$ pero no lo que pasa después. Por ejemplo, hay casos en los que las órbitas los términos pares se acercan a un valor y los impares a otro. Es decir, tienden a una órbita del tipo

$$\{\dots, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_2, \dots\} \tag{4}$$

Si arrancásemos la iteración en un valor $x_0 = \alpha_2$ tal que $f(\alpha_2) = \alpha_1 \neq \alpha_2$ pero $f(f(\alpha_2)) = f(\alpha_1) = \alpha_2$, tendríamos una órbita como ésta. Esto es lo que se va a llamar un punto periódico de f de período 2 o un *punto 2-periódico* de f , y a la órbita (4) resultante se llama *2-ciclo*.

En general, dada una función f , si existe un punto α y un entero n tal que

$$f^n(\alpha) = \alpha, \quad \text{pero } f^k(\alpha) \neq \alpha \text{ para todo } k < n,$$

se dice que α es un **punto periódico de f de período n o un punto n -periódico de f** .

Un punto 1-periódico es un punto fijo de f y α es un punto n -periódico de f si y sólo si α es un punto fijo de f^n .

Obsérvese que si un punto α es 2-periódico, también lo es $\beta = f(\alpha) \neq \alpha$, pues $f(\beta) = f^2(\alpha) = \alpha \neq \beta$, $f^2(\beta) = f(f(\beta)) = f(f^2(\alpha)) = f(\alpha) = \beta$. De la misma forma, si un punto α es 3-periódico, también lo van a ser $\beta_1 = f(\alpha) \neq \alpha$ y $\beta_2 = f^2(\alpha) \neq \alpha$ y $\beta_2 \neq \beta_1$. Y así sucesivamente. En otras palabras, cuando se tiene un punto α n -periódico de f , realmente se tienen n puntos n -periódicos $\{\alpha, f(\alpha), f^2(\alpha), \dots, f^{n-1}(\alpha)\}$. Este conjunto se llama *n -ciclo* de f .

Usualmente, en los cursos básicos de Análisis Numérico se suele estar familiarizado con la versión escalar del Teorema 4, que se puede ver en el Anexo y que se demuestra cuando se estudia la convergencia de la iteración funcional (1) para resolver ecuaciones no lineales, que dice que si α es un punto fijo de f ($f(\alpha) = \alpha$) y $|f'(\alpha)| < 1$, existe un entorno de α tal que para todo valor inicial tomado en dicho entorno, la iteración funcional (1) converge al punto fijo. Esto se basa en la aplicación del teorema del valor medio,

$$|x_1 - \alpha| = |f(x_0) - f(\alpha)| = |f'(\xi_0)||x_0 - \alpha|, \quad \xi_0 \text{ entre } x_0 \text{ y } \alpha.$$

Si $|f'(\alpha)| < 1$ existe un entorno de α en el que $|f'(x)| < 1$, por lo que tomando cualquier valor inicial x_0 en dicho entorno, se tiene garantizado que la iteración converge a α . Pero, además, también se ve que si $|f'(\alpha)| > 1$, aunque partamos la iteración funcional (1) en un punto inicial x_0 muy cercano al punto fijo α , la sucesión de iterantes se alejará rápidamente de dicho punto fijo. Por eso, cuando tenemos varios puntos fijos de la misma $f(x)$ (lo que ocurre en los problemas no lineales, como veremos posteriormente), se suele usar la siguiente clasificación:

- Si $|f'(\alpha)| < 1$, el punto fijo α de $f(x)$ se llama *atractor*.
- Si $|f'(\alpha)| > 1$, el punto fijo α de $f(x)$ se llama *repulsor*.

Esta clasificación entre atractores o repulsores se puede aplicar también a los puntos n -periódicos. Si α es un punto n -periódico de $f \in C^1(\mathbb{R})$,

- Si $|(f^n)'(\alpha)| < 1$, α es un *punto n -periódico de f atractor* o que f tiene un n -ciclo atractor $\{\alpha, f(\alpha), f^2(\alpha), \dots, f^{n-1}(\alpha)\}$.
- Si $|(f^n)'(\alpha)| > 1$, α es un *punto n -periódico de f repulsor* o que f tiene un n -ciclo repulsor $\{\alpha, f(\alpha), f^2(\alpha), \dots, f^{n-1}(\alpha)\}$.

Si $|f'(\alpha)| = 1$, el punto fijo (o n -periódico) α se llama *punto no hiperbólico*. El estudio de estos puntos fijos no hiperbólicos es demasiado amplio para abordarlo aquí, pero fundamentalmente son interesantes porque son puntos en los que cambia la dinámica del esquema iterativo (1), por lo que suelen ser *puntos de bifurcación*. En particular, son destacados los puntos no hiperbólicos *semiestables*, es decir, puntos que son atractores si arrancamos con valores iniciales por un lado de α y son repulsores si arrancamos por el otro lado.

Así, si consideramos un esquema iterativo general (1) donde la función $f(x)$ es continuamente diferenciable y depende de un parámetro λ , esto es, $f(x) = f_\lambda(x)$, $\lambda \in I \subset \mathbb{R}$, la familia parametrizada de funciones $\{f_\lambda\}_{\lambda \in I}$ se dice que tiene una **bifurcación** en $\lambda = \lambda_0$ (o que λ_0 es un punto de bifurcación) si existe

$\varepsilon > 0$ tal que, para cualesquiera dos valores a y b verificando que $\lambda_0 - \varepsilon < a < \lambda_0$ y $\lambda_0 < b < \lambda_0 + \varepsilon$, la dinámica de $f_a(x)$ es diferente (en algún sentido) a la de $f_b(x)$.

Por ejemplo, como vimos en la ecuación logística (2), el punto $\lambda = 3$ es un punto de bifurcación pues tomando cualquier $1 < \lambda = a < 3$ tenemos dos puntos fijos, uno repulsor y otro atractor, mientras que para cualquier $3 < \lambda = b < 3.4495\dots$ tenemos un 2-ciclo atractor (un punto 2-periódico).

5. BIFURCACIÓN DE LA ECUACIÓN LOGÍSTICA

Aplicando lo visto en la sección anterior se pueden justificar los fenómenos observados experimentalmente con la ecuación logística (2) con

$$f(x) = f_\lambda(x) = \lambda x(1 - x), \quad x \in [0, 1], \quad \lambda \in [0, 4],$$

para garantizar que todas las órbitas estén en $[0, 1]$.

Hay que observar previamente que hay algunos casos que tienen escaso interés. Por ejemplo, si $x_0 = 0$, $x_n = 0$, $\forall n \geq 0$; si $x_0 = 1$, $x_n = 0$, $\forall n \geq 1$. Además, si existe un n_0 tal que $x_{n_0} = 1$, entonces $x_n = 0$, $\forall n \geq n_0$, lo cual puede ocurrir si $\lambda = 4$. Y también se tiene el caso trivial $\lambda = 0$, por lo que en realidad se considera el problema con

$$x \in (0, 1), \quad \lambda \in (0, 4).$$

Para explicar parte de lo que se observa en los experimentos numéricos con esta ecuación, podemos hacer un estudio de sus puntos fijos y 2-periódicos.

- *Puntos fijos (1-periódicos)*: salen dos $x = 0$ y $x = \alpha_\lambda = (\lambda - 1)/\lambda$, pero cuando $0 < \lambda \leq 1$, el 0 es el único punto fijo ($\alpha_\lambda \leq 0$ por lo que no puede ser punto fijo).
- *Puntos 2-periódicos*: resolver la ecuación $f_\lambda^2(x) = x$ es equivalente a encontrar los ceros del polinomio

$$Q_2(x) = f_\lambda^2(x) - x = x(\lambda^2(1 - x)(1 - \lambda x(1 - x)) - 1).$$

Como sabemos que los dos puntos fijos 0 y α_λ tienen que ser ceros de este polinomio, tendrá que verificarse que $Q_2(x) = x(x - \alpha_\lambda)(Ax^2 + Bx + C)$. Igualando ambas expresiones de $Q_2(x)$ resulta

$$Q_2(x) = x(x - \alpha_\lambda)(-\lambda^3 x^2 + \lambda^2(\lambda + 1)x - \lambda(\lambda + 1))$$

Así que $Q_2(x)$ tendrá dos ceros reales si el discriminante de la ecuación de segundo grado $R_2(x) = -\lambda^3 x^2 + \lambda^2(\lambda + 1)x - \lambda(\lambda + 1)$ es positivo, es decir, si

$$\Delta = \lambda^4(\lambda + 1)^2 - 4\lambda(\lambda + 1)\lambda^3 = \lambda^4(\lambda + 1)(\lambda - 3) > 0 \iff \lambda > 3.$$

Obsérvese que si $\lambda = 3$, se tiene la raíz doble $\alpha_3 = 2/3$ (el punto fijo), por lo que por continuidad cuando $\lambda \gtrsim 3$, las dos raíces están cerca de $2/3$.

Sin embargo, para asegurar que esas dos raíces reales son puntos 2-periódicos deben caer en $(0, 1)$. Un cálculo directo nos da que si $\lambda > 3$, estas dos raíces de $R_2(x)$ son

$$\beta_{1,2} = \frac{1}{2\lambda} \left(\lambda + 1 - \sqrt{(\lambda + 1)(\lambda - 3)} \right), \quad \beta_{2,2} = \frac{1}{2\lambda} \left(\lambda + 1 + \sqrt{(\lambda + 1)(\lambda - 3)} \right)$$

Claramente, $\beta_{2,2} > 0$ y, como $-\lambda^3 \beta_{1,2} \beta_{2,2} = -\lambda(\lambda + 1)$, también lo es $\beta_{1,2} > 0$. Por otro lado,

$$\beta_{1,2} < 1 \iff -\sqrt{(\lambda + 1)(\lambda - 3)} < \lambda - 1,$$

lo que siempre se da porque $\lambda - 1 > 0$. Además, como

$$(\lambda + 1)(\lambda - 3) = (\lambda - 1)^2 - 4 < (\lambda - 1)^2 \Rightarrow \sqrt{(\lambda + 1)(\lambda - 3)} < \lambda - 1 \Rightarrow \beta_{2,2} < 1$$

Así $\{\beta_{1,2}, \beta_{2,2}\}$ son los dos únicos puntos 2-periódicos de la ecuación logística. Por ello, en realidad, estos dos puntos forman un 2-ciclo pues, como se tiene que si un punto α es 2-periódico, también lo es $f(\alpha)$, necesariamente $f(\beta_{1,2}) = \beta_{2,2}$, $f(\beta_{2,2}) = \beta_{1,2}$.

Analizando el carácter de estos puntos 1 y 2-periódicos podemos entender en gran medida lo que ocurre con el modelo logístico. Tenemos que

$$f'(x) = \lambda(1 - 2x), \quad (f^2)'(x) = f'(f(x))f'(x) = \lambda^2(1 - 2f(x))(1 - 2x),$$

por lo que los puntos fijos verifican

$$f'(0) = \lambda, \quad f'(\alpha_\lambda) = 2 - \lambda,$$

y los 2-periódicos

$$\begin{aligned} (f^2)'(\beta_{1,2}) &= \lambda^2(1 - 2f(\beta_{1,2}))(1 - 2\beta_{1,2}) = \lambda^2(1 - 2\beta_{2,2})(1 - 2\beta_{1,2}) \\ (f^2)'(\beta_{2,2}) &= \lambda^2(1 - 2f(\beta_{2,2}))(1 - 2\beta_{2,2}) = \lambda^2(1 - 2\beta_{1,2})(1 - 2\beta_{2,2}) \end{aligned}$$

En consecuencia,

- Si $0 < \lambda < 1$, 0 es el único punto fijo y es atractor, y no hay puntos periódicos.
- El punto $\lambda = 1$ es un punto de bifurcación.
- Si $1 < \lambda < 3$, el punto fijo 0 pasa a ser repulsor mientras que el segundo punto fijo α_λ es atractor, y no hay puntos periódicos.
- El punto $\lambda = 3$ es otro punto de bifurcación.
- Si $\lambda > 3$, aparece un 2-ciclo $\{\beta_{1,2}, \beta_{2,2}\}$ cuyo carácter es atractor si

$$|\lambda^2(1 - 2\beta_{2,2})(1 - 2\beta_{1,2})| < 1$$

o, lo que es equivalente,

$$\left| \left(-1 - \sqrt{(\lambda + 1)(\lambda - 3)} \right) \left(-1 + \sqrt{(\lambda + 1)(\lambda - 3)} \right) \right| < 1 \Leftrightarrow |\lambda^2 - 2\lambda - 4| < 1,$$

lo que ocurre solo si $3 < \lambda < 1 + \sqrt{6} = 3.4494897\dots$. Por tanto,

- ▶ Si $3 < \lambda < 1 + \sqrt{6}$ tenemos un 2-ciclo atractor.
- ▶ El punto $\lambda = 1 + \sqrt{6}$ es otro punto de bifurcación.
- ▶ Si $\lambda > 1 + \sqrt{6}$ tenemos un 2-ciclo repulsor. En este caso debemos estudiar la presencia de otros puntos n -periódicos con $n \geq 3$.

El estudio de los puntos 3-periódicos es muy importante debido al siguiente Teorema:

Teorema 2 Teorema de Sarkovskii: *Sea $f : I \rightarrow I$ una función continua definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Si f tiene un punto periódico de período tres, entonces f tiene puntos de período k en I para todo $k = 1, 2, 3, \dots$*

El estudio general de la existencia de puntos 3-periódicos analíticamente se complica excesivamente en la ecuación logística. Para estudiar la existencia de puntos 3-periódicos tenemos que encontrar las raíces del polinomio de grado 8

$$Q_3(x) = f_\lambda^3(x) - x$$

del que solo sabemos que tiene como raíces a 0 y a α_λ , por lo que se puede expresar

$$Q_3(x) = x(x - \alpha_\lambda)R_{3,\lambda}(x)$$

donde $R_{3,\lambda}(x)$ es el polinomio de grado 6 (con la ayuda de un programa de cálculo simbólico)

$$\begin{aligned} R_{3,\lambda}(x) = & -\lambda^7 x^6 + \lambda^6(3\lambda + 1)x^5 - \lambda^5(3\lambda + 1)(\lambda + 1)x^4 \\ & + \lambda^4(\lambda^3 + 5\lambda^2 + 3\lambda + 1)x^3 - \lambda^3(2\lambda + 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)x^2 \\ & + \lambda^2(\lambda + 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)x - \lambda(\lambda^2 + \lambda + 1) \end{aligned}$$

Para analizar para qué valores de λ este polinomio tiene raíces reales en $[0, 1]$, se puede construir un programa que tome 430 valores $\lambda_i = 3.57 + i \cdot 0.001$, $1 \leq i \leq 430$ y que teste si el correspondiente $R_{3,\lambda}(x)$

tiene raíces reales o no. Así se puede ver numéricamente que para $\lambda \leq 3.828$ (aproximadamente), este polinomio no tiene raíces en $[0, 1]$. Sin embargo, para $\lambda = 3.829$ tiene exactamente 6 raíces

$$\{0.15766\dots, 0.16214\dots, 0.50851\dots, 0.52018\dots, 0.95567\dots, 0.95698\dots\}$$

Esto es lo que explica la zona caótica en $\lambda \in (3.8284\dots, 4)$.

Sin embargo, en la literatura muchos autores han demostrado usando diferentes técnicas que exactamente para $\lambda = 1 + \sqrt{8} = 3.8284\dots$ hay un 3-ciclo atractor y que para todo $\lambda \in (1 + \sqrt{8}, 4)\dots$ hay dos 3-ciclos, uno atractor y otro repulsor. En particular, es recomendable que el estudiante vea la demostración dada en [6], que se basa en una simple interpretación geométrica de los 3-ciclos.

En consecuencia, para cada λ en este intervalo, se pueden encontrar n -ciclos para todos los enteros positivos $n = 1, 2, \dots$. En otras palabras, tomando valores iniciales x_0 diferentes se pueden obtener ciclos atractores de cualquier número de puntos, lo que muestra la extrema sensibilidad a los valores iniciales de este tipo de problemas.

6. DIAGRAMA DE BIFURCACIÓN

Una de las ventajas de trabajar con ecuaciones en diferencias es que podemos computar muchas iteraciones fácilmente con un ordenador, construyendo numéricamente incluso un *diagrama de bifurcación*, que nos permitirá visualizar el comportamiento asintótico de las soluciones de esta ecuación.

El *diagrama de bifurcación* o *diagrama de órbitas* ayuda a detectar la existencia de puntos de bifurcación.

En el caso de la ecuación logística (2), este diagrama nos da una forma práctica y visual de entender el fenómeno de "doblar los ciclos" que aparece cuando $\lambda > 1 + \sqrt{6}$, y que es muy complicado de abordar de forma teórica, retratando el "camino al caos" de esta ecuación y lo que ocurre cuando ya se llega ahí. En este diagrama se ponen los valores de λ en el eje X, mientras que en el eje Y se marca el o los límites de la solución para cada valor de λ cuando en todos los casos se arranca del mismo valor inicial $x_0 \in (0, 1)$. El diagrama va a ser prácticamente igual para cualquier x_0 , pues ya vimos que el comportamiento cualitativo de la solución va a depender de λ y no de x_0 .

Así se puede hacer un simple programa (en Matlab, por ejemplo), que partiendo de $x_0 = 0.5$, toma un número alto de valores de $\lambda \in (0, 4)$ y para cada uno de ellos, calcula 500 términos de la sucesión (2) y dibuja, por ejemplo, los valores $(\lambda, x_{451}), \dots, (\lambda, x_{500})$. Así se obtiene el diagrama de la Fig. 3.

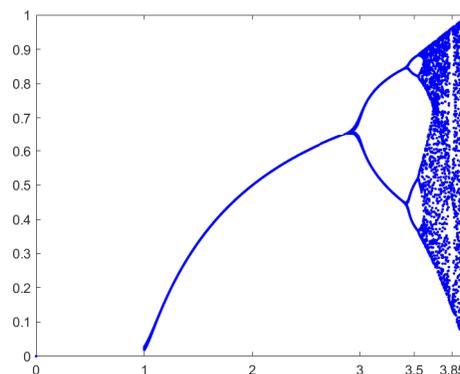


Figura 3: Diagrama de bifurcación para $x_0 = 0.5$

En este diagrama Fig. 3 se puede ver la cascada de bifurcaciones a partir de $\lambda = 3$, apareciendo el comportamiento caótico para $\lambda \geq \lambda_\infty = 3.56994\dots$. Específicamente, obsérvese el 3-ciclo cerca del valor $\lambda = 3.83$.

7. ANEXO: MATERIAL COMPLEMENTARIO

7.1 Teoremas del punto fijo

Hay muchos *Teoremas de punto fijo* en la literatura, aplicados en diferentes ámbitos desde el análisis funcional al numérico. Recogemos aquí un par de versiones que se suelen usar mucho en el campo de

los métodos numéricos y las ecuaciones en diferencias, aplicadas a la EDF (1) escalar, pero que se puede generalizar al caso vectorial, es decir, al sistema de EDFs de primer orden

$$Y_{n+1} = F(Y_n), \quad n \geq 0, \quad Y_0 \text{ dado}, \quad Y_n, F \in \mathbb{R}^k \quad (5)$$

y se puede aplicar el *Teorema del Punto Fijo*:

Teorema 3 (*Teorema del Punto Fijo*)

Si una función $F(Y)$ verifica

$$\|F(Y) - F(\tilde{Y})\| \leq L\|Y - \tilde{Y}\|, \quad 0 \leq L < 1, \quad (6)$$

para todo Y, \tilde{Y} tal que

$$\|Y - Y_0\| \leq \delta, \quad \|\tilde{Y} - Y_0\| \leq \delta$$

para cierta constante $\delta > 0$, y siempre que el vector inicial Y_0 verifique

$$\|Y_0 - F(Y_0)\| \leq (1 - L)\delta,$$

se tiene

1. *Existe un único punto fijo de F en la bola $\|Y - Y_0\| \leq \delta$, es decir, existe un único vector Y^* tal que $Y^* = F(Y^*)$ en dicha bola.*
2. *Todas las iteraciones Y_n dadas por (5) caen en la misma bola $\|Y - Y_0\| \leq \delta$.*
3. *Las iteraciones Y_n dadas por (5) convergen al único punto fijo Y^* de F .*

En consecuencia, si la función $F(Y)$ del sistema de EDFs (5) verifica la condición de contractividad (6) en todo \mathbb{R}^k ($\delta = \infty$), el sistema es estable y todas las soluciones convergen a un único punto de equilibrio estacionario Y^* .

Cuando la función F es lineal de coeficientes constantes, es decir, $F(Y) = AY + B$ para una matriz constante A , la constante de Lipschitz es justamente $L = \|A\|$, por lo que de nuevo aparece la exigencia de que $\|A\| < 1$ para la estabilidad o, alternativamente, la condición $r_\sigma(A) < 1$ que lo garantiza para cualquier norma matricial.

Hay que observar que el Teorema 3 es local, es decir, pueden existir varios puntos fijos de una función F . Además, si la función es contractiva en todo el dominio, existirá un único punto fijo. Sin embargo, cuando ya se sabe y se tiene localizado un punto fijo, en muchos casos es más práctico aplicar el siguiente teorema, que ya parte del conocimiento de que se tiene un único punto fijo en un intervalo concreto.

Teorema 4 (*Convergencia local de la iteración funcional*)

Supóngase que la función $F(Y)$ tiene un punto fijo $Y^ = F(Y^*)$ y que cada componente $F_i(Y)$ de F tiene derivadas parciales primeras continuas que verifican*

$$\left| \frac{\partial F_i(Y)}{\partial Y_i} \right| \leq \frac{L}{k}, \quad \forall 1 \leq i \leq k, \quad L < 1$$

para todo Y tal que $\|Y - Y^\|_\infty \leq \delta$, para cierta $\delta > 0$, es decir, para todo Y dentro de la bola de centro Y^* y radio $\delta > 0$.*

Entonces, para cualquier valor inicial Y_0 que pertenezca a dicha bola de centro Y^ y radio $\delta > 0$, toda la sucesión de iteraciones $\{Y_n\}$ de (5) está dentro de la misma bola y converge al punto fijo Y^* , que es único en dicha bola.*

7.2 Comparación EDF/EDO

Comparemos el PVI de primer orden en ecuaciones diferenciales ordinarias autónomo

$$Y' = F(Y), \quad Y(0) = Y_0, \quad t \geq 0, \quad Y, F \in \mathbb{R}^k \quad (7)$$

con el PVI de primer orden en ecuaciones en diferencias (5).

En el primer caso, se considera **valor de equilibrio** Y^* a todos los valores que verifican

$$F(Y^*) = 0.$$

Estos valores cumplen que son *soluciones estacionarias* de la EDO, pues la función constante $Y'(t) = Y^*, \forall t \geq 0$, verifica la EDO $Y' = F(Y)$. Cuando el problema es lineal de coeficientes constantes, $Y' = AY + B$, con A no singular, sólo hay un único punto de equilibrio, $Y^* = -A^{-1}B$.

En el caso de la EDF (5), como ya vimos, las soluciones estacionarias $Y_n = Y^*, Y^* \in \mathbb{R}^m$, son los puntos fijos de F , esto es, $F(Y^*) = Y^*$. Si el problema es lineal de coeficientes constantes, $Y_{n+1} = AY_n + B$, hay un único punto fijo $Y^* = (I - A)^{-1}B$, que existe siempre que $r_\sigma(A) < 1$ (lo que implica que $\xi = 1$ no es autovalor de A y, por tanto, $\det(I - A) \neq 0$).

En el caso EDO, la estabilidad (en el sentido de Liapunov) se define de la forma siguiente

Definición 5 *Un punto de equilibrio Y^* de la EDO (7) es estable si $\forall \epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todas las soluciones $Y(t)$ que verifican $\|Y(0) - Y^*\| < \delta$, se verifica $\|y(t) - Y^*\| < \epsilon$ para todo $t > 0$. Si, además, se tiene*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|Y(t) - Y^*\| = 0,$$

se dice que el punto de equilibrio Y^ es asintóticamente estable.*

Por tanto, el concepto de estabilidad asintótica en EDOs es análogo al concepto de estabilidad con valor de equilibrio estacionario en el caso de sistemas de orden 1.

8. EJERCICIOS PROPUESTOS

- Determinar los puntos fijos y, si tienen, los puntos 2-periódicos, de los siguientes esquemas iterativos, analizando si son atractores o repulsores. Comprobar con ejemplos numéricos que esto es así.

$$(a) x_{n+1} = x_n^2, \quad (b) x_{n+1} = x_n^2 - 1, \quad (c) x_{n+1} = x_n^3, \quad (d) x_{n+1} = \cos x_n$$

- Ídem con la llamada "aplicación tienda"

$$x_{n+1} = \begin{cases} \lambda x_n, & 0 \leq x_n < 0.5 \\ \lambda(1 - x_n), & 0.5 \leq x_n \leq 1 \end{cases}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad \lambda \in (0, 2)$$

- Dado el esquema iterativo

$$x_{n+1} = 2x_n^2 - 3x_n, \quad n \geq 0,$$

hacer el diagrama de telaraña de las órbitas que arrancan en $x_0 = 1$ y $x_0 = -1$. Determinar si tiene o no puntos fijos y puntos 2-periódicos y, en tal caso, si son atractores o repulsores.

- Demostrar que si tenemos un n -ciclo $\{c_0, c_1, \dots, c_{n-1}\}$, $c_j = f(c_{j-1}) = f^j(c_0)$, $j = 1, \dots, n - 1$,

$$(f^n)'(c_0) = f'(c_{n-1}) \cdots f'(c_2)f'(c_1)f'(c_0).$$

- Construye un programa que dibuje el diagrama de telaraña para la ecuación logística discreta con valores

$$(a) \lambda = 1, x_0 = 0.1, \quad (b) \lambda = 2.5, x_0 = 0.3, \quad (c) \lambda = 3, x_0 = 0.5, \quad (d) \lambda = 4, x_0 = 1$$

- Construye un programa que dibuje el diagrama de telaraña para la función $f(x) = \cos x$ arrancando de los valores

$$(a) x_0 = 1, \quad (b) x_0 = 10, \quad (c) x_0 = -100, \quad (d) x_0 = 0$$

- Construye un programa que dibuje el diagrama de telaraña para el esquema de Baker

$$x_{n+1} = \begin{cases} 2x_n, & 0 \leq x_n < 0.5 \\ 2x_n - 1, & 0.5 \leq x_n \leq 1 \end{cases}, \quad n = 0, 1, \dots$$

y comprobar numéricamente que presenta un comportamiento caótico para cualquier $0 \leq x_0 \leq 1$.

- Construye un diagrama de bifurcación de la "aplicación tienda" dada en el problema 2.

9. BIBLIOGRAFÍA

- [1] K. E. Atkinson, *An introduction to numerical analysis*, Ed. John Wiley and Sons, 1978.
- [2] S. J. Farlow, *An introduction to differential equations and their applications*, Dover Publ. Inc., 1994.
- [3] C. González-Concepción, J. A. Barrios García, *Análisis discreto en Economía y Empresa*, Ed. AC, 2000.
- [4] E. Isaacson, H. B. Keller, *Analysis of Numerical Methods*, Ed. John Wiley and Sons, 1966.
- [5] R. M. May, *Simple mathematical models with very complicated dynamics*, Nature, 261, 459-467, 1976.
- [6] C. Zhang, *Period three begins*, Mathematics Magazine, 83, 4, 295-297, 2010.