Tema 4: Modelos dinámicos continuos. Algunos ejemplos

Contenidos

1. Introducción

Comenzamos aquí con la segunda parte del curso en la que nos centraremos en los modelos dinámicos continuos, principalmente los basados en ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs).

En este tema haremos un repaso de algunos modelos sencillos de EDOs de primer orden, tanto lineales (de coeficientes constantes y variables) como no lineales que podremos resolver analíticamente, con los que podremos estudiar algunas herramientas básicas de modelización así como introducir desde un punto de vista práctico dos de las características cualitativas que serán fundamentales a la hora de validar los modelos: la estabilidad y la positividad (o monotonía) de las soluciones.

2. Modelos lineales de primer orden

2.1 Desintegración radiactiva.

Teorema 1 Ley de desintegración radiactiva: *La rapidez de desintegración de una sustancia radiactiva es proporcional a la cantidad de sustancia restante.*

Los núcleos de los átomos están compuestos por protones y neutrones. Algunos núcleos tienen una combinación de protones y neutrones que no conducen a una configuración estable. Estos núcleos son inestables o radiactivos pues tienden a aproximarse a la configuración estable emitiendo ciertas partículas (por ejemplo, neutrones) y radiación electromagnética (por ejemplo, rayos X). Es decir, la desintegración radiactiva es el proceso por el cual una sustancia radiactiva se desintegra en otra sustancia estable.

Con el modelo matemático se pretende calcular la cantidad restante de una sustancia que se desintegra radiactivamente. Para ello, denotamos por $y(t)$ la cantidad de sustancia restante en el instante t, e y_0 la cantidad inicial de sustancia. El Teorema 1 nos dice que la desintegración de esta sustancia evoluciona siguiendo la ecuación

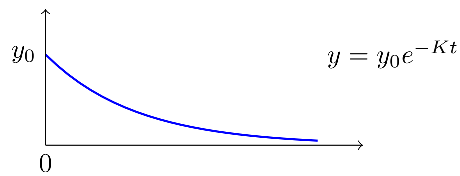
$$y'(t) = -K\, y(t), \qquad K > 0$$

lo que constituye una EDO de primer orden lineal de coeficientes constantes respecto $y(t)$. La constante $K > 0$ (porque la cantidad disminuye) es un parámetro que depende de la sustancia estudiada.

Esta ecuación se puede resolver fácilmente por variables separadas. Dada cualquier cantidad inicial $y(0) = y_0 \geq 0$, se tiene

$$\frac{dy}{y} = -K\,dt \Rightarrow \int_{y_0}^{y} \frac{ds}{s} = -K \int_0^t du \Rightarrow \ln y - \ln y_0 = -Kt \Rightarrow \frac{y}{y_0} = e^{-Kt},$$

por lo que la solución es



Este es un ejemplo muy simple de lo que se llama *decaimiento exponencial*, que suele aparecer en muchas aplicaciones. Independientemente de la cantidad inicial y_0, la solución $y(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$, esto es, la cantidad de sustancia desciende rápidamente al inicio del proceso y a medida que pasa el tiempo la velocidad de descenso es mucho más lenta. Esto es un caso particular de lo que se denomina *EDO asintóticamente estable*.

A la hora de calibrar este modelo, es decir, para determinar la constante K se suele usar la *semivida* de la sustancia, que es el tiempo t_m (calculado experimentalmente para cada sustancia) que tarda cualquier cantidad de ella en reducirse a la mitad. Por tanto, conocida esta semivida t_m se busca el valor de K tal que $y(t_m) = y_0/2$. En detalle,

$$y(t_m) = y_0 e^{-Kt_m} = \frac{y_0}{2} \;\Rightarrow\; \frac{1}{2} = e^{-K\,t_m} \;\Rightarrow\; -\ln 2 = -K\,t_m \;\Rightarrow\; K = \frac{\ln 2}{t_m}.$$

En conclusión, la cantidad de sustancia restante viene dada por

$$y(t) = y_0 e^{-(\ln 2)t/t_m}.$$

Ejemplo En un trozo de madera quemada se encontró que el 85.5 % de C^{14} se había desintegrado. ¿Qué edad tenía la madera? Nota: La semivida del C^{14} es de 5600 años.

Solución:

Sean $y(t)$ la cantidad de C^{14} restante en el instante t e $y(0) = y_0$ la cantidad inicial de C^{14}. De acuerdo con la discusión precedente:

$$K = \frac{\ln 2}{5600} \simeq 1.24\;10^{-4}.$$

Por tanto,

$$y(t) = y_0\; e^{-1.24\;10^{-4}\;t}.$$

Sabemos que se ha desintegrado el 85.5% del C^{14}, por lo que resta el $(100 - 85.5) = 14.5\%$ del C^{14} inicial, es decir, en el instante de medir la cantidad de C^{14} hay $0.145\;y_0$ del mismo. Así pues:

$$0.145\;y_0 = y_0 e^{-1.24\;10^{-4}\;t} \;\Rightarrow\; \ln 0.145 = -1.24\;10^{-4}\;t \;\Rightarrow\; t = -\frac{\ln 0.145}{1.24\;10^{-4}} \simeq 15600 \text{ años}.$$

2.2 Temperatura

Teorema 2 Ley de enfriamiento de Newton: *La rapidez con la que se enfría un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la temperatura ambiente.*

El modelo más básico trata de medir la temperatura que tiene en cada instante un objeto que se enfría considerando que la temperatura ambiente es constante. Para ello, sean $T(t)$ la temperatura del objeto en el instante t y T_a la temperatura ambiente.

Según la ley dada en el Teorema 2 anterior, $T(t)$ verifica la ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden no homogénea:

$$T'(t) = K\ [T(t) - T_a]\ \Rightarrow\ T'(t) - K\,T(t) = -K\,T_a, \tag{1}$$

donde K es una constante que depende del objeto considerado y de las condiciones externas. Si $T(t) > T_a$, el cuerpo se va a enfriar ($T'(t) < 0$) y si $T(t) < T_a$ se va a calentar ($T'(t) > 0$), por lo que necesariamente $K < 0$.

Se resuelve fácilmente multiplicando la ecuación (1) por el factor integrante $\nu(t) = e^{-Kt}$, con lo que es equivalente a

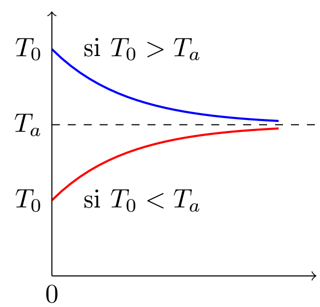
$$\frac{d}{dt}\left(e^{-Kt}\,T(t)\right) = T_a(-K)e^{-Kt} \Rightarrow \int_0^t \frac{d}{ds}\left(e^{-Ks}\,T(s)\right)ds = T_a\int_0^t(-K)e^{-Ks}ds.$$

Integrando resulta

$$e^{-Kt}\,T(t) - e^{-K\,0}\,T(0) = T_a\left(e^{-Kt} - 1\right)$$

Por tanto, si $T_0 = T(0)$ denota la temperatura inicial del objeto, la ecuación lineal de primer orden anterior tiene por solución:

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)\,e^{K\,t}$$



Obsérvese que, independientemente de la temperatura inicial T_0, la solución tiende a la temperatura del ambiente T_a cuando pasa el tiempo. Además, si $T_0 > T_a$ (o, respectivamente, $T_0 < T_a$) se tiene que $T(t) > T_a$ (respectivamente, $T(t) < T_a$), para todo $t > 0$. Por esta razón, también se dice que esta EDO es asintóticamente estable.

La constante K se determina (o se *calibra*) habitualmente a partir de mediciones experimentales de temperatura adicionales.

Ejemplo Un termómetro se saca de una habitación, donde la temperatura es de 27^o C, al exterior, donde la temperatura es de 15^o C. Después de medio minuto, el termómetro marca 23^o C. ¿Cuánto marcará al cabo de 1 minuto? ¿Cuánto tardará en alcanzar los 18^o C?

Solución:

Sea $T(t)$ la temperatura del termómetro en el instante t. Sabemos que la temperatura ambiente $T_a = 15$. Además la temperatura inicial del termómetro es $T(0) = 27$, mientras que al cabo de medio minuto es de $T(0.5) = 23$.

De acuerdo con la discusión precedente sabemos que la temperatura del termómetro en cualquier instante t viene dada por:

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)\,e^{K\,t} = 15 + 12\,e^{K\,t}.$$

Para calibrar la constante K tenemos es cuenta que

$$23 = T(0.5) = 15 + 12\,e^{K\cdot 0.5}\ \Rightarrow\ e^{K/2} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}\ \Rightarrow\ K = 2\ln\frac{2}{3} \simeq -0.811.$$

Luego la temperatura del termómetro en cualquier instante t viene dada por:

$$T(t) = 15 + 12\,e^{-0.811\,t}.$$

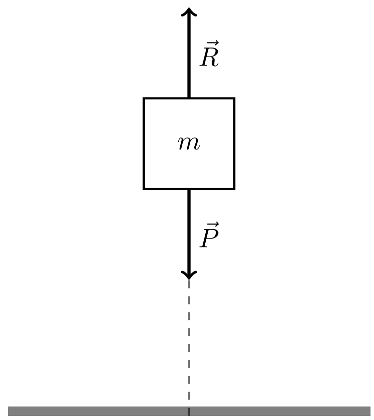
Al cabo de un minuto, el termómetro marcará $T(1) = 15 + 12\cdot e^{-0.811} \simeq 20.3^o$ C.

Para determinar el tiempo en que alcanzará los 18^o C, hemos de resolver la ecuación $T(t) = 18$, es decir;

$$\begin{aligned} 18 = 15 + 12\cdot e^{-0.811\cdot t} \quad &\Rightarrow \quad 3 = 12\cdot e^{-0.811\cdot t}\ \Rightarrow\ e^{-0.811\cdot t} = \tfrac{3}{12} = \tfrac{1}{4} \\ &\Rightarrow \quad -0.811\cdot t = -\ln 4\ \Rightarrow\ t = \tfrac{\ln 4}{0.811} \simeq 1.71 \text{ minutos.} \end{aligned}$$

2.3 Caída de un cuerpo en un medio resistente

Al caer en caída libre un cuerpo de masa m sobre él actúan dos fuerzas: la de la gravedad (su peso $\vec{P}$) y la resistencia del aire $\vec{R}$, que experimentalmente se observa que aumenta de intensidad cuando lo hace la velocidad del cuerpo.



Si $x(t)$ representa el espacio recorrido en función del tiempo desde la posición inicial $x(0) = 0$, $v(t) = x'(t)$ es la velocidad del objeto y $a(t) = v'(t) = x''(t)$ es su aceleración.

La forma más simple de simular el rozamiento del aire es la lineal, es decir, se supone que es proporcional a su velocidad y *siempre se opone al movimiento.*

Por tanto, por la segunda ley de Newton (ver en el Anexo las tres leyes de Newton que cualquier matemático debe conocer),

$$m\,a(t) = \vec{P} + \vec{R} = m\,g - k\,v(t), \qquad t \geq 0, \qquad k > 0$$

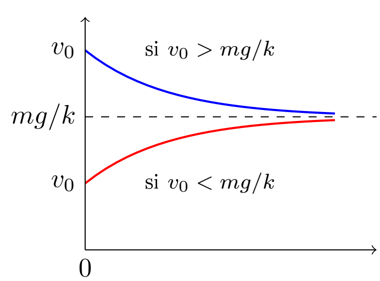
donde $g = 9.8$ m/s es la aceleración de la gravedad. En consecuencia, tenemos el siguiente PVI lineal de orden 1 que modeliza la velocidad $v(t)$

$$v' + \frac{k}{m}\,v = g, \quad v(0) = v_0, \quad t \geq 0. \tag{2}$$

cuya solución se calcula de forma similar al problema de la temperatura anterior y viene dada por:

$$v(t) = \frac{m\,g}{k} + e^{-\frac{k}{m}t}\left(v_0 - \frac{m\,g}{k}\right). \tag{3}$$

El comportamiento cualitativo a lo largo del tiempo de estas soluciones es bastante similar al del problema de la temperatura, $v(t) \to mg/k$ si $t \to \infty$, y la EDO es asintóticamente estable.



En estos problemas de la mecánica clásica es muy importante recordar que estamos trabajando con magnitudes vectoriales, es decir, $x(t), v(t), a(t)$ son vectores (de dimensión 1) o lo que es lo mismo, tienen *dirección y sentido* (en este ejemplo simple, la dirección es siempre la vertical). En el modelo anterior, al tomar como origen del sistema de referencia el lugar desde el que empieza a caer el objeto, se ha elegido $x(t) > 0$ si el objeto está por debajo del origen y $x(t) < 0$ si está por arriba. Por tanto,

$$\begin{array}{l} \text{si } x(t+dt) > x(t), \text{ para cualquier } dt \gtrsim 0, \ v(t) > 0 \text{ (el objeto baja)} \\ \text{si } x(t+dt) < x(t), \text{ para cualquier } dt \gtrsim 0, \ v(t) < 0 \text{ (el objeto sube)} \end{array}$$

Ejemplo Un objeto de masa 100 kg se deja caer libre desde 3000 m de altura. Si la resistencia del aire es proporcional a la velocidad con constante $k = 20$ kg/s, ¿cuál es su velocidad de caída? ¿Qué ocurre a medida que el tiempo aumenta? ¿Cuándo llegará al suelo?

Si fijamos el origen del sistema de coordenadas en el punto donde se deja caer, se tiene el problema de valor inicial

$$v' + 0.2v = 9.8, \quad v(0) = 0, \quad t \geq 0,$$

cuya solución es

$$v(t) = \frac{100 \cdot 9.8}{20} + e^{-0.2t} \left(0 - \frac{100 \cdot 9.8}{20} \right) = 49 - 49e^{-0.2t}, \quad t \geq 0.$$

Por tanto, $v(t) \to 49$ cuando $t \to \infty$, es decir, el objeto se acercará a una velocidad *terminal* de 49 m/s, nunca mayor que eso. Y lo interesante es que da igual la velocidad inicial v_0 que tenga cuando empieza a caer.

Para saber cuándo llegará al suelo tenemos que estudiar la posición $x(t)$, que es la distancia del cuerpo en el instante t desde el punto en que comenzó a caer. Como $x'(t) = v(t)$, $x(0) = x_0 = 0$,

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(u)\, du = \int_0^t 49 - 49e^{-0.2u}\, du = 49t + 245 \left(e^{-0.2t} - 1 \right), \quad t \geq 0.$$

Por tanto, tenemos que calcular cuál es el instante $t = T$ en el que $x(T) = 3000$, esto es

$$49T + 245 \left(e^{-0.2T} - 1 \right) = 3000,$$

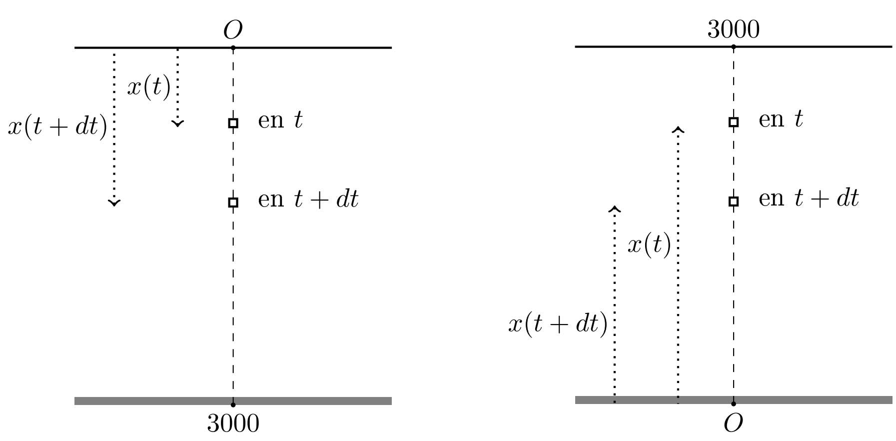
lo que es una ecuación no lineal que tendremos que resolver numéricamente. Usando, por ejemplo, el comando `find_root` de wxMaxima, tenemos que $T \simeq 66.22$ s.

Ejemplo ¿Cómo es el modelo del ejemplo anterior si fijamos el origen del sistema de coordenadas en el suelo?

En este caso $x(t)$ es la distancia del objeto desde el suelo, por lo que $x(0) = 3000$ y $x(t) \geq 0$, para todo $t \geq 0$ y, en consecuencia,

si $x(t + dt) > x(t)$, para cualquier $dt \gtrsim 0$, $v(t) > 0$ *(el objeto sube)*
si $x(t + dt) < x(t)$, para cualquier $dt \gtrsim 0$, $v(t) < 0$ *(el objeto baja)*

En el siguiente gráfico se puede ver la diferencia de planteamiento del modelo si se fija el origen en el punto de salida o en el suelo.



Por lo tanto, $\vec{P} = -mg$ y $\vec{R} = -kv$ pues $\vec{R}$ va hacia arriba cuando v es negativo, por lo que la segunda ley de Newton nos dice

$$m\, v'(t) = \vec{P} + \vec{R} = -m\, g - k\, v(t), \quad t > 0, \qquad v(0) = v_0 = 0, \tag{4}$$

y se obtiene la solución

$$v(t) = -\frac{m\, g}{k} + e^{-\frac{k}{m}t} \left(v_0 + \frac{m\, g}{k} \right). \tag{5}$$

Obsérvese que si $v_0 = 0$ (parte del reposo), esta $v(t)$ es justamente la velocidad dada en (3) pero cambiada de signo. También es cierto para otras velocidades iniciales, pero teniendo bien claro cómo se modeliza. Por ejemplo, supongamos que al objeto se le da un fuerte empujón en la salida lo que lo hace empezar a bajar con una velocidad inicial de 1 m/s. En el modelo (2) tomaríamos $v(0) = 1$ pues va en el sentido positivo del eje de referencia. En cambio, en el modelo (4) tendríamos que tomar como valor inicial $v(0) = -1$, pues va en el sentido negativo del sistema referencial.

Ejemplo Un objeto de masa 100 kg se deja caer libre desde 3000 m de altura. Si la resistencia del aire es proporcional a la velocidad y después de 1 segundo el objeto va a 9 m/s, ¿cuál es su velocidad de caída?

Aquí no conocemos la constante de resistencia del aire k. Determinar cuál es el valor de este parámetro que mejor refleja el proceso que estamos modelizando se hace con la segunda medición experimental $v(1) = 9$ (*calibración del modelo*). Como sabemos que la solución debe ser

$$v(t) = \frac{100 \cdot 9.8}{k} + e^{-kt/100} \left(0 - \frac{100 \cdot 9.8}{k}\right), \quad t \geq 0,$$

exigiendo esta medición adicional tenemos una ecuación no lineal respecto de k:

$$\frac{980}{k} - \frac{980}{k} e^{-k/100} = 9,$$

que resolvemos numéricamente con, por ejemplo, el comando `find_root` de wxMaxima, resultando $k \simeq 17.28$ kg/s.

Ejemplo Si un objeto de masa m se deja caer en caída libre *en el vacío*, la resistencia del aire no interviene y, por tanto, la ecuación del movimiento, tomando como origen de coordenadas el punto desde donde comienza a caer, es

$$mv' = mg, \quad v(0) = 0, \quad t \geq 0$$

cuya solución es

$$v(t) = gt, \qquad t \geq 0.$$

Este es un ejemplo en el que el modelo predice algo que es contrario a nuestra intuición y que tardó en poder probarse experimentalmente: nos dice que el cuerpo cae con una velocidad proporcional al tiempo independientemente de la masa que tenga.

Ejemplo Un paracaidista cuya masa es de 100 Kg. se deja caer desde un helicóptero situado a 3000 m. Suponiendo que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad con constante $k_0 = 20$ Kg./seg. si el paracaídas está cerrado y $k_1 = 100$ Kg./seg. si está abierto y que el paracaídas se abre transcurridos 30 seg., ¿qué relación satisface el tiempo de llegada?

Solución:

El tiempo de llegada τ será la suma del tiempo $t_0 = 30$ seg. que transcurre mientras el paracaídas está cerrado y el tiempo T que transcurre desde que se abre el paracaídas hasta llegar a la superficie. Para calcular T procedemos como sigue:

- Calculamos el espacio s_0 que recorre el paracaidista mientras está cerrado el paracaídas. Para ello usamos el modelo de caídas en un medio resistente con $k_0 = 20$ Kg./seg. y condición incial $v_0 = v(0) = 0$.
- Calculamos la velocidad v_{30} que lleva el paracaidista en el momento justo en que abre el paracaídas.
- Usamos de nuevo el modelo de caídas en un medio resistente con $k_1 = 100$ Kg./seg., donde la condición inicial es la calculada en el apartado anterior, para así calcular el espacio que recorre el paracaidista una vez se abra el paracaidas.

La velocidad $v_0(t)$ durante los primeros 30 seg. viene dada por:

$$v_0(t) = 9.8\,\frac{100}{20}\left(1 - e^{-\frac{20}{100}t}\right) = 49\left(1 - e^{-\frac{1}{5}\,t}\right) \text{ m./seg.},$$

luego el espacio s_0 recorrido durante los primeros 30 seg. es

$$x_0 = \int_0^{30} 49 \left(1 - e^{-\frac{1}{5}\,t}\right) dt \approx \ 1225.61 \text{ metros.}$$

Usamos ahora el modelo con la nueva constante $k_1 = 100$ Kg./seg. suponiendo que volvemos a contar el tiempo T desde cero (nótese que en este caso la condición inicial es $v_1(0) = v_0(30) = v_{30} \cong 48.89$ m./seg.) La velocidad $v_1(T)$ que lleva el paracaidista una vez abierto el paracaídas vendrá entonces dada por :

$$v_1(T) = 9.8\,\frac{100}{100} + e^{-T}\left(48.89 - 9.8\,\frac{100}{100}\right) = 9.8 + 39.09\,e^{-T} \text{ m./seg.}$$

Por tanto, el espacio total recorrido para cualquier instante $\tau = 30 + T$ vendrá dado como $x(\tau) = x_0(30) + x_1(T)$ donde:

$$x_1(T) = \int_0^T v_1(t)\,dt = \int_0^T \left(9.8 + 39.09\,e^{-t}\right)\,dt = \left[9.8\,t - 39.09\,e^{-t}\right]_0^T = 9.8\,T - 39.09\,e^{-T} + 39.09$$

El tiempo $\tau = 30+T$ ha de verificar por tanto $x_0(30)+x_1(T) = 3000$ m, esto es $x_1(T) = 3000-1225.61 = 1774.39$ m. En conclusión

$$9.8\,T - 39.09\,e^{-T} = 1735.3.$$

Usando la rutina `find_root` de wxMaxima, se obtiene $T \approx 177.07$ s y el tiempo total τ es aproximadamente 3 minutos y 27 segundos.

2.4 Mezclas químicas

Supongamos que tenemos un recipiente en el cual hay un volumen inicial de V_0 litros y una cantidad inicial de soluto de A kg., con lo cual la concentración inicial de soluto es de A/V_0 kg./l. En dicho recipiente se introduce una solución con una concentración de a kg./l. y a una velocidad de v_1 l./min ($v_1 > 0$). Al mismo tiempo sale del recipiente parte de la solución a una velocidad de v_2 l./min ($v_2 > 0$). Estamos interesados, como hemos mencionado anteriormente, en conocer la cantidad de soluto presente en el interior del recipiente en cada instante. Para ello $y(t)$ denota la cantidad de soluto en el recipiente en el instante t.

La rapidez con que varía la cantidad de soluto dentro del recipiente viene dada por la variación de la cantidad de soluto respecto al tiempo, esto es, $y'(t)$. Así pues:

$$\begin{aligned} y'(t) &= \text{'rapidez con que varía la cantidad de soluto en el recipiente en el instante } t\text{'} \\ &= \text{'rapidez con que entra menos la rapidez con que sale'} \\ &= R_1(t) - R_2(t), \end{aligned}$$

donde

$$R_1(t) = a\,v_1 \quad (\text{concentración} \times \text{velocidad} \approx \text{Kg./l.} \times \text{l./min} = \text{Kg./min.})$$

y

$$\begin{aligned} R_2(t) &= \text{'concentración en el instante } t \times \text{velocidad de salida'} \\ &= \frac{y(t)}{V_0 + (v_1 - v_2)\,t}\,v_2, \end{aligned}$$

pues el volumen de solución en el instante t viene dado por la suma del volumen inicial V_0 y el volumen añadido en el instante t, $(v_1 - v_2)\,t$ (l./min.$\times$ min. $=$ l.).

En consecuencia, la cantidad de soluto en el instante t verifica la ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden *de coeficientes variables*

$$y'(t) = a\,v_1 - \frac{y(t)}{V_0 + (v_1 - v_2)\,t}\,v_2,$$

es decir,

$$y'(t) + \frac{v_2}{V_0 + (v_1 - v_2)\,t}\,y(t) = a\,v_1,$$

y condición inicial

$$y(0) = y_0 = A \text{ Kg. de soluto.}$$

Por ser una ecuación lineal de primer orden se puede resolver multiplicando por el factor integrante

$$\nu(t) = e^{I(t)}, \qquad I(t) = \int \frac{v_2}{V_0 + (v_1 - v_2)\, t}\, dt.$$

Esta integral es bastante diferente si $v_1 = v_2$ que si no lo es.

$$\begin{aligned} &\text{Si } v_1 = v_2: \quad I(t) = \frac{v_2}{V_0} t && \nu(t) = e^{v_2 t/V_0} \\ &\text{Si } v_1 \neq v_2: \quad I(t) = \frac{v_2}{v_1 - v_2} \ln\left(V_0 + (v_1 - v_2)\, t\right) && \nu(t) = \left(V_0 + (v_1 - v_2)\, t\right)^{v_2/(v_1 - v_2)} \end{aligned} \tag{6}$$

Así que multiplicando la ecuación por el factor integrante obtenemos la ecuación equivalente

$$\frac{d}{dt}\left(\nu(t)\, y(t)\right) = a v_1 \nu(t) \Rightarrow \int_0^t \frac{d}{ds}\left(\nu(s)\, y(s)\right) ds = a v_1 \int_0^t \nu(s)\, ds,$$

que tiene que resolverse teniendo en cuenta (6).

$$\begin{aligned} &\text{Si } v_1 = v_2: \quad \int_0^t \nu(s)\, ds = \frac{V_0}{v_2}\left(e^{v_2 t/V_0} - 1\right) \\ &\text{Si } v_1 \neq v_2: \quad \int_0^t \nu(s)\, ds = \frac{1}{v_1 - v_2} \frac{1}{r+1}\left(\left(V_0 + (v_1 - v_2)\, t\right)^{r+1} - V_0^{r+1}\right) \end{aligned}$$

donde

$$r = \frac{v_2}{v_1 - v_2}, \qquad r + 1 = \frac{v_1}{v_1 - v_2}, \qquad \frac{1}{v_1 - v_2} \frac{1}{r+1} = \frac{1}{v_1}.$$

Simplificando, teniendo en cuenta que $\nu(0) = 1$ si $v_1 = v_2$ y $\nu(0) = V_0^r$ si $v_1 \neq v_2$, y multiplicando por $\nu^{-1}(t)$ para despejar la $y(t)$ se obtiene la solución general

$$\begin{aligned} &\text{Si } v_1 = v_2: \quad y(t) = aV_0 + (y_0 - aV_0) e^{-v_2 t/V_0} \\ &\text{Si } v_1 \neq v_2: \quad y(t) = aV_0 + a(v_1 - v_2)t + (y_0 - aV_0)\left(\frac{V_0}{V_0 + (v_1 - v_2)\, t}\right)^{v_2/(v_1 - v_2)} \end{aligned}$$

A pesar de que este problema es lineal, el estudio cualitativo de sus soluciones es bastante más complicado que el de los problemas lineales de coeficientes constantes, lo que suele ocurrir en general. En este caso tenemos que distinguir si $v_1 = v_2$ del caso en que no.

- Si $v_1 = v_2$:

  $$y(t) = aV_0 + (y_0 - aV_0) e^{-v_2 t/V_0} \longrightarrow aV_0, \quad t \to \infty \quad \text{para cualquier } y_0 \geq 0.$$

  Por tanto, la EDO es asintóticamente estable, lo que significa que independientemente de la cantidad de soluto inicial, dicha cantidad va a estabilizarse en torno a aV_0 cuando pasa el tiempo. Es más, cuanto mayor sea la proporción entre la velocidad de entrada/salida de mezcla y el volumen inicial de disolvente, más rápido se estabiliza.

- Si $v_1 \neq v_2$, el comportamiento de las soluciones dependerá del signo de $v_1 - v_2$ pues determina si el exponente de la potencia que aparece es positiva o negativa:

  - Si $v_1 > v_2$, cuando $t \to \infty$,

    $$a(v_1 - v_2)t \longrightarrow \infty, \quad \left(\frac{V_0}{V_0 + (v_1 - v_2)\, t}\right)^{v_2/(v_1 - v_2)} \longrightarrow 0,$$

    por lo que $y(t) \longrightarrow \infty$ y el problema no es asintóticamente estable. Pero lo que sí podemos saber es cómo aumenta $y(t)$ pues se tiene que

    $$y(t) - y^*(t) \longrightarrow 0, \quad t \to \infty, \qquad y^*(t) := aV_0 + a(v_1 - v_2)t$$

    Es decir, todas las soluciones se acercan a la recta $y^*(t)$ cuando t aumenta, independientemente del $y_0 \geq 0$ tomado, lo que nos dice que si la velocidad de entrada de mezcla es mayor que la de salida, la cantidad de soluto en el interior del recipiente va a aumentar de forma lineal (en la práctica), proporcionalmente a la pendiente $a(v_1 - v_2)$.

- Si $v_1 < v_2$, hay que tener en cuenta un detalle importante, que es que al salir más rápidamente solución que la que entra, nos podemos quedar con un recipiente vacío, esto es, existe $t^* > 0$ tal que
$$V(t^*) = V_0 - (v_2 - v_1)t^* = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t^* = \frac{V_0}{v_2 - v_1} > 0$$
y, además, $V(t) < 0$ para todo $t > t^*$. ¿Qué significa que el volumen es negativo? Evidentemente, no tiene ningún sentido físico y la EDO deja de aplicarse en este caso, por lo que el estudio de la estabilidad cuando $t \to \infty$ aquí no tiene ninguna relevancia.

  Lo que sí tiene importancia en este problema es que las cantidades $V(t)$ e $y(t)$ se tienen que mantener siempre positivas. El estudio de la *positividad* (o *propiedades de monotonía*) de las soluciones de una EDO es otro campo de estudio muy amplio e importante cuando trabajamos con problemas físicos o químicos en los que los valores negativos (o cierto grupo de valores) no pueden aparecer. Además, es un estudio bastante diferente del estudio de la estabilidad. En todos los casos anteriores ($v_1 \geq v_2$) la positividad de $y(t)$ para todo t siempre que tomamos valores iniciales $y_0 \geq 0$ es inmediata. En este caso que falta por estudiar, la positividad es más complicada.

  Lo único que está claro por ahora es que si $v_1 < v_2$, solo tiene sentido estudiar cómo se comportan las soluciones cuando $t \in [0, t^*]$, que se reescriben en este caso como
$$y(t) = aV_0 - a(v_2 - v_1)t + (y_0 - aV_0)\left(\frac{V_0 - (v_2 - v_1)\,t}{V_0}\right)^p,$$
donde
$$p := -\frac{v_2}{v_1 - v_2} = \frac{v_2}{v_2 - v_1} > 1 \quad \text{pues } v_2 > v_2 - v_1 > 0.$$
Si tenemos en cuenta que $V_0 = (v_2 - v_1)t^*$, se tiene
$$\begin{aligned} y(t) &= a(v_2 - v_1)t^* - a(v_2 - v_1)t + (y_0 - aV_0)\left(\frac{(v_2 - v_1)t^* - (v_2 - v_1)\,t}{(v_2 - v_1)t^*}\right)^p \\ &= a(v_2 - v_1)(t^* - t) + (y_0 - aV_0)\left(\frac{t^* - t}{t^*}\right)^p \end{aligned}$$
De esta última expresión se ve claro que si $y_0 \geq aV_0$, $y(t) > 0$ para todo $t \in [0, t^*]$. Ahora bien, si tomamos $0 \leq y_0 < aV_0$, ¿$y(t) > 0$ para todo $t \in [0, t^*]$? En otras palabras, ¿puede existir un $t_1 \in (0, t^*)$ tal que $y(t_1) = 0$? Para que exista otro cero de $y(t)$ cuando $0 \leq y_0 < aV_0$, como $p > 1$, $p - 1 > 0$ se tiene
$$y(t_1) = \frac{(t^* - t_1)}{t^*}\left(a(v_2 - v_1)t^* - (aV_0 - y_0)\left(\frac{t^* - t_1}{t^*}\right)^{p-1}\right) = 0$$
por lo que si $t_1 \neq t^*$, tiene que cumplir
$$\left(\frac{t^* - t_1}{t^*}\right)^{p-1} = \frac{aV_0}{aV_0 - y_0} > 1 \quad \text{pues } aV_0 > aV_0 - y_0 > 0, \quad p - 1 > 0,$$
o, lo que es equivalente,
$$\frac{t^* - t_1}{t^*} > 1 \quad \Longleftrightarrow \quad t^* - t_1 > t^* \quad \Longleftrightarrow \quad t_1 < 0.$$
Por tanto, en $(0, t^*)$ no hay ningún cero de $y(t)$, $y(0) = y_0 \geq 0$, $y(t^*) = 0$, así que $y(t) \geq 0$ en $t \in [0, t^*]$ para cualquier $y_0 \geq 0$ (ó $y(t) > 0$ para cualquier $y_0 > 0$).

  Así que en el caso $v_1 < v_2$, la cantidad de soluto decrecerá rápidamente desde el valor inicial y_0 hasta el cero en el instante $t^* = V_0/(v_2 - v_1) > 0$ (cantidad que no depende de y_0), momento en el cual la mezcla deja de producirse.

Ejemplo Se disuelven inicialmente 50 libras de sal en un recipiente que contiene 300 galones de agua. Se bombea salmuera al recipiente a razón de 3 galones/minuto, siendo la concentración de la solución entrante de 2 libras/galón. La solución mezclada se bombea hacia afuera a razón de 2 galones/minuto. Determinar la cantidad de sal que hay en cada instante en el recipiente.

Solución:
Del enunciado anterior tenemos los siguientes datos:

$$\begin{array}{lll} A = 50 \text{ libras}, & a = 2 \text{ libras/galón.} & \\ V_0 = 300 \text{ galones}, & v_1 = 3 \text{ galones/minuto}, & v_2 = 2 \text{ galones/minuto.} \end{array}$$

Luego, atendiendo a la discusión anterior, la cantidad de sal $y(t)$ en cada instante en el recipiente es solución de la ecuación diferencial lineal:

$$y'(t) + \frac{2}{300 + (3-2)t} y(t) = 2 \cdot 3,$$

esto es,

$$y'(t) + \frac{2}{300 + t} y(t) = 6\,,$$

cuya solución general hemos visto que es

$$y(t) = 600 + 2t + (y_0 - 600)\left(\frac{300}{300 + t}\right)^2.$$

En este problema particular $y_0 = A = 50$, por lo que la cantidad de sal que hay en cada instante en el recipiente es de:

$$y(t) = 600 + 2t - \frac{495\ 10^5}{(300 + t)^2} \text{ libras.}$$

Por tanto, cuando t aumenta, la cantidad de sal aumenta aproximadamente como $y(t) \approx 2t + 600$.

3. MODELOS NO LINEALES DE PRIMER ORDEN

3.1 Modelos de evolución de una población

Las ecuaciones diferenciales que modelizan el crecimiento de una única especie suelen ser relevantes en estudios de laboratorio (crecimiento de colonias bacterianas o víricas, por ejemplo), en los que el entorno donde se desarrolla dicha especie está controlado, el suministro de alimento no es un problema y no compite con individuos de otras especies.

En estos modelos consideramos una población $p(t)$ de una cierta especie en un instante t, que suponemos que es una función derivable respecto del tiempo. Esta suposición es razonable en la práctica en poblaciones grandes, pues en dicho caso si la población se incrementa en un individuo, el cambio es muy pequeño en comparación con la población total. Así, los modelos se basan en que la velocidad de crecimiento de $p(t)$ será

$$\frac{dp}{dt} = \text{nacimientos - muertes + migración}$$

El modelo más simple fue introducido por *Malthus* (1798), en el que se supone que no hay migración y que el número de nacimientos y de muertes es proporcional al número de individuos, es decir,

$$\frac{dp}{dt} = ap - bp, \quad p(0) = p_0, \quad t \geq 0, \quad a, b > 0$$

Este modelo es poco realista ya que si $a > b$ la población crece exponencialmente y si $a < b$ desaparece, aunque en casos de laboratorio controlados se ajusta bastante bien (así como, por ejemplo, si miramos el crecimiento de la población humana desde 1900 hasta la actualidad y lo que se espera a lo largo de este siglo).

Un modelo más ajustado al hecho de que cuando la población crece los individuos de una misma especie compiten entre sí por el alimento o el espacio disponible es el **modelo logístico** propuesto por Verhulst en el siglo XIX:

$$\frac{dp}{dt} = r\left(1 - \frac{p}{K}\right)p, \quad p(0) = p_0, \quad t \geq 0, \quad r, K > 0 \qquad (7)$$

En este modelo se refleja el hecho de que la ratio de nacimientos per cápita ($r(1-p/K)$) depende de p. Si $p < K$, la población va a aumentar pero en el momento en que $p > K$, empezará a decrecer, por lo que la constante K se suele llamar también *capacidad de soporte o nivel de saturación* del entorno.

Además, es una ecuación no lineal *autónoma*, esto es, la *función derivada*

$$f(p) = r\left(1 - \frac{p}{K}\right)p$$

no depende de t. En estos problemas hay puntos especiales que hay que estudiar siempre: *los puntos de equilibrio*, es decir, los puntos p_e tal que $f(p_e) = 0$, pues van a determinar la dinámica de las soluciones de esta ecuación. Profundizaremos en esto para problemas no lineales más complejos en un próximo tema.

En este ejemplo tenemos dos puntos de equilibrio $p = 0$ y $p = K$. En primer lugar, si $p_0 = 0$ la solución es la función constante $p(t) = 0$ y si $p_0 = K$ lo es la constante $p(t) = K$. En otras palabras, los puntos de equilibrio van a ser *soluciones estacionarias* de la ecuación. Además, por el teorema de unicidad de soluciones,

$$0 < p_0 < K \Rightarrow 0 < p(t) < K,\ \forall t \geq 0, \qquad p_0 > K \Rightarrow p(t) > K,\ \forall t \geq 0. \tag{8}$$

Esta ecuación se puede resolver por variables separadas

$$\frac{dp}{(K-p)p} = \frac{r}{K}\,dt,$$

usando la descomposición en fracciones simples

$$\frac{1}{(K-p)p} = \frac{1}{K}\left(\frac{1}{K-p} + \frac{1}{p}\right).$$

Por tanto, tenemos que integrar, considerando una población inicial $p_0 > 0$, $p_0 \neq K$,

$$\int_{p_0}^{p} \frac{ds}{K-s} + \int_{p_0}^{p} \frac{ds}{s} = r\int_0^t du \quad \Longleftrightarrow \quad \ln|K-p_0| - \ln|K-p| + \ln p - \ln p_0 = rt \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{|K-p_0|p}{|K-p|p_0} = e^{rt}$$

Por (8) se pueden eliminar los valores absolutos, por lo que despejando p obtenemos la solución

$$p(t) = \frac{Kp_0}{p_0 + (K-p_0)e^{-rt}}, \qquad t \geq 0. \tag{9}$$

De esto se tiene fácilmente que $p(t) \to K$ cuando $t \to \infty$ para cualquier valor inicial $p_0 > 0$.

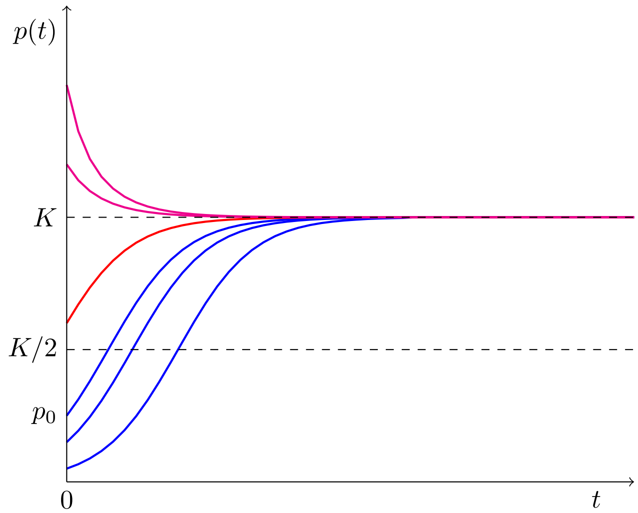
Sin embargo, no tenemos que resolver esta ecuación explícitamente para saber cómo va a ser el comportamiento *cualitativo* de sus soluciones, a partir del estudio de la propia EDO. Si escribimos la función derivada como

$$f(p) = \frac{r}{K}r(K-p),$$

claramente $f(p) > 0$ si $p \in (0, K)$, por lo que $p(t)$ es creciente mientras que $f(p) < 0$ si $p > K$, con lo que $p(t)$ decrece. Además, derivando $f(p)$ conocemos la curvatura de p, esto es,

$$p''(t) = f'(p)p' = \frac{r^2}{K^2}(K-2p)p(K-p)$$

por lo que tenemos tres puntos de cambio de curvatura: $p = 0, K/2, K$. Si $p \in (0, K/2)$ ó $p > K$, la solución es cóncava hacia arriba mientras que cuando $p \in (K/2, K)$ es cóncava hacia abajo. Así que tomando distintos valores iniciales p_0, se puede tener una idea gráfica del comportamiento de las soluciones:



La representación gráfica de dichas soluciones (o curvas integrales) tienen una forma característica en forma de "s", que se suele llamar *curva logística*. En esta gráfica podemos observar que por muy pequeña que sea la población inicial $p_0 \gtrsim 0$, la solución va a alejarse del valor de equilibrio $p = 0$ (punto de equilibrio *inestable* o *repulsor*) y se va a acercar al otro valor crítico $p = K$ (punto de equilibrio *asintóticamente estable* o *atractor*).

En términos poblacionales, este estudio nos dice que incluso en el caso en el que el número de individuos al inicio es muy pequeño, la población va a crecer rápidamente durante un cierto período de tiempo y a partir de cierto momento va a acercarse a la capacidad de soporte $p = K$. Sin embargo, si la población inicial es mayor que esta K, la población va a disminuir rápidamente hacia este valor óptimo.

Hay que observar que si hacemos el cambio $z(t) = p(t)/K$ en (7), obtenemos la ecuación logística normalizada

$$z' = rz(1 - z)$$

que es la versión continua de la ecuación logística discreta que vimos en el tema anterior donde, en lugar de modelizar el número de individuos de una población, se trabaja con la población "fraccionaria" de una especie, entendiéndose que $z = 1$ ($p = K$) es la máxima población que el ecosistema puede soportar.

3.2 Reacciones químicas

Dos sustancias A y B reaccionan formando una sustancia C, con una cierta proporción, es decir, en cada instante, por cada gr. de sustancia B reaccionan r gramos de sustancia A (o por cada gr. de B que se consume en la reacción se consumen r gramos de A). Se tienen, además, los siguientes teoremas.

Teorema 3 Ley de conservación de las masas de Lavoisier: *En una reacción química la suma de la masa de los reactivos es igual a la suma de la masa de los productos ("La materia no se crea ni se destruye, sólo se transforma").*

Teorema 4 Ley de acción de masas: *La rapidez (tasa instantánea) de formación de un producto por unidad de volumen en la reacción es proporcional al producto de las cantidades (concentraciones) de las sustancias A y B presentes (las que no han reaccionado).*

Interesa conocer la cantidad de sustancia C formada en el instante t. Denotando por:

$y(t) =$ 'cantidad de C en el instante t',
$\alpha =$ 'cantidad inicial de A', $A(t) =$ 'cantidad de A en el instante t',
$\beta =$ 'cantidad inicial de B', $B(t) =$ 'cantidad de B en el instante t',

se tiene, en virtud de lo anterior, que se verifica para todo $t \geq 0$ (teniendo en cuenta que $\alpha - A(t) =$ gr. de A que se consumen en el instante t, $\beta - B(t) =$ gr. de B que se consumen en t)

$$\text{Proporción de reactivos:} \quad \alpha - A(t) = r(\beta - B(t))$$

$$\text{Teorema 3:} \quad y(t) + A(t) + B(t) = \alpha + \beta$$

$$\text{Teorema 4:} \quad y'(t) = K\ A(t)B(t)$$

con condición inicial $y(0) = 0$, pues en el instante $t = 0$ se entiende que no existe aún sustancia C[1], donde $K > 0$ es la constante de proporcionalidad que se suele llamar *constante de reacción*. Expresando las cantidades $A(t)$ y $B(t)$ en función de $y(t)$ se obtiene el problema de valor inicial de primer orden no lineal

$$y'(t) = K\left(\alpha - \frac{r}{1+r}y\right)\left(\beta - \frac{1}{1+r}y\right), \quad y(0) = 0, \qquad t \geq 0.$$

Aunque es no lineal, esta EDO es sencilla de calcular pues es de variables separadas. Para simplificar el manejo de los parámetros, si denotamos $\hat{K} = K/(1+r)^2$, $\hat{r} = 1+r$, la EDO se puede reescribir como

$$\frac{dy}{dt} = f(y) := \hat{K}(\hat{r}\alpha - ry)(\hat{r}\beta - y)$$

por lo que el problema es autónomo, al igual que el visto en la sección anterior. En este problema puede haber hasta dos puntos de equilibrio

$$y_1 = (1+r)\frac{\alpha}{r} > 0, \qquad y_2 = (1+r)\beta > 0,$$

o sólo uno cuando $y_1 = y_2$, esto es, si $\alpha = r\beta$, en cuyo caso, además, $y_1 = y_2 = \alpha + \beta$.

Por tanto, si el valor inicial fuera $y(0) = y_1$ (respectivamente, $y(0) = y_2$), la única solución sería $y(t) = y_1$ (respectivamente, $y(t) = y_2$), pero esto no ocurre en la reacción química que estamos considerando en la que $y_0 = 0$.

Sin embargo, como ya vimos, la presencia de estos puntos de equilibrio afecta a la dinámica de las soluciones de la EDO.

En primer lugar, afecta al método para resolver la EDO, que en este caso consiste en separar las variables en la forma

$$\frac{dy}{(\hat{r}\alpha - ry)(\hat{r}\beta - y)} = \hat{K}\,dt$$

e integrar en ambos miembros para lo que tenemos que descomponer en fracciones simples la fracción del lado izquierdo, siempre que esté bien definida, es decir, *si* $y \neq y_1$ *e* $y \neq y_2$. Por unicidad de soluciones, esto se garantiza siempre que $y_0 \neq y_1$ e $y_0 \neq y_2$, lo que ocurre en nuestro problema.

Además, el detalle interesante en este caso es que para hacer esta descomposición sabemos que el denominador puede tener dos raíces diferentes $y = y_1$ ó $y = y_2$ si $\alpha \neq r\beta$ o una única múltiple si $\alpha = r\beta$, por lo que hay que tendremos que diferenciar estos dos casos.

- Si $\alpha = r\beta$, $y_0 = 0$, como el polinomio del denominador resulta $r\left((1+r)\beta - y\right)^2$, salen dos integrales indefinidas inmediatas,

$$\int_0^y \frac{ds}{((1+r)\beta - s)^2}\,ds = \hat{K}r\int_0^t du$$

$$\frac{1}{(1+r)\beta - y} - \frac{1}{(1+r)\beta} = \hat{K}r\,t \iff y = (1+r)\beta - \frac{(1+r)\beta}{\hat{K}r\left((1+r)\beta\right)\,t + 1}$$

  Después de ciertas simplificaciones se la solución buscada se expresa como

$$y(t) = (1+r)\beta\,\frac{K\beta rt}{K\beta rt + (1+r)}.$$

- Si $\alpha \neq r\beta$, $y_0 = 0$, un cálculo tedioso nos da

$$\frac{1}{(\hat{r}\alpha - rs)(\hat{r}\beta - s)} = \frac{1}{\hat{r}(\alpha - r\beta)}\left(-\frac{r}{(\hat{r}\alpha - rs)} + \frac{1}{(\hat{r}\beta - s)}\right),$$

  por lo que las integrales indefinidas resultantes son

$$\int_0^y \frac{(-r)}{(\hat{r}\alpha - rs)}\,ds - \int_0^y \frac{(-1)}{(\hat{r}\beta - s)}\,ds = \hat{K}\hat{r}(\alpha - r\beta)\int_0^t du,$$

[1] Si existiese una cantidad inicial de C, $y_0 > 0$, no intervendría en la reacción química, solo se añade al final a la generada por la reacción con $y(0) = 0$

$$\ln(\hat{r}\alpha - ry) - \ln(\hat{r}\alpha) - \ln(\hat{r}\beta - y) + \ln(\hat{r}\beta) = \hat{K}\hat{r}(\alpha - r\beta)t$$

Si denotamos

$$\lambda := \hat{K}\hat{r}(\alpha - r\beta) = \frac{(\alpha - r\beta)}{(1+r)}K \neq 0,$$

agrupando logaritmos se tiene

$$\ln\left(\frac{(\hat{r}\alpha - ry)(\hat{r}\beta)}{(\hat{r}\beta - y)(\hat{r}\alpha)}\right) = \lambda\, t \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{(\hat{r}\alpha - ry)\beta}{(\hat{r}\beta - y)\alpha} = e^{\lambda t}.$$

Despejando la función $y(t)$ se tiene que la solución del PVI es

$$y(t) = (1+r)\alpha\beta\, \frac{1 - e^{\lambda t}}{r\beta - \alpha e^{\lambda t}}, \qquad t \geq 0, \qquad \lambda = \frac{(\alpha - r\beta)}{(1+r)}K \neq 0$$

Hay que observar que es necesario que el denominador $r\beta - \alpha e^{\lambda t}$ sea distinto de 0 para todo $t \geq 0$, pero esto es cierto ya que es 0 sii

$$\lambda t = \ln\left(\frac{r\beta}{\alpha}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad t = \frac{1+r}{K}\,\frac{1}{\alpha - r\beta}\ln\left(\frac{r\beta}{\alpha}\right).$$

Por tanto, si $0 < \alpha < r\beta$, se tiene $(\alpha - r\beta) < 0$ y $r\beta/\alpha > 1$ por lo que necesariamente $t < 0$. Si $\alpha > r\beta > 0$, $(\alpha - r\beta) > 0$ y $r\beta/\alpha < 1$, así que solo puede ser nulo si $t < 0$.

Estudiando el comportamiento cualitativo de la solución podemos predecir que pueden darse varias situaciones.

- Si $\alpha = r\beta$, $y_0 = 0$, cuando $t \to \infty$, se tiene

$$y(t) = (1+r)\beta\, \frac{K\beta r t}{K\beta r t + (1+r)} \longrightarrow (1+r)\beta = \alpha + \beta = y_1 = y_2,$$

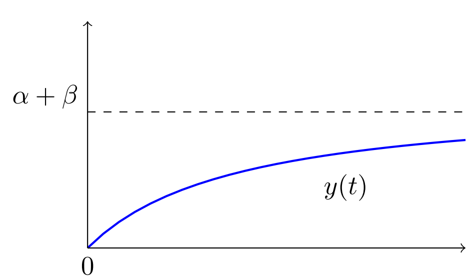
es decir, ***la solución tiende al único punto de equilibrio,*** $\alpha + \beta$, que tiene la ecuación en este caso. Pero además, es interesante estudiar cómo aumenta la función $y(t)$ desde 0 hasta $\alpha + \beta$. La misma EDO nos dice que la solución es estrictamente creciente, pues se tiene

$$y'(t) = Kr\left(\beta - \frac{1}{1+r}y\right)^2 > 0$$

pues $y_0 = 0 \neq \alpha + \beta$. Además, derivando la EDO podemos conocer su curvatura pues

$$y''(t) = 2Kr\left(\beta - \frac{1}{1+r}y\right)\left(-\frac{1}{1+r}\right)y' < 0$$

y tendrá una gráfica de la forma



por lo que a medida que pase el tiempo se consumirán las sustancias A y B y prácticamente sólo quedará producto C.

- Si $\alpha \neq r\beta$, $y_0 = 0$, como el signo de λ viene dado por el signo de $\alpha - r\beta$, el comportamiento de las soluciones dependerá de las concentraciones iniciales y de la ratio de reacción:

- Si $\alpha < r\beta$, $\lambda < 0$ y, por tanto, cuando $t \to \infty$, se tiene

$$y(t) = (1+r)\alpha\beta\,\frac{1-e^{\lambda t}}{r\beta - \alpha e^{\lambda t}} \longrightarrow (1+r)\frac{\alpha}{r} = y_1 < y_2 < \alpha+\beta,$$

es decir, la solución tiende al menor de los dos puntos de equilibrio y_1. Para ver cómo se acerca esta solución a y_1, sabemos de la propia EDO (sin necesidad de calcular la solución) que

$$y'(t) = f(y) = K\,\left(\alpha - \frac{r}{1+r}y\right)\left(\beta - \frac{1}{1+r}y\right) > 0$$

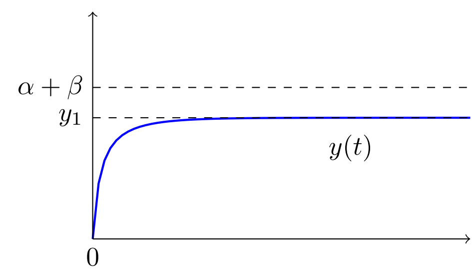
pues $f(y)$ solo se anula en los dos puntos críticos $0 < y_1 < y_2$ y, por unicidad de soluciones, $y(t) \neq y_1, y_2$ $\forall t > 0$, $y(0) = 0$. Además, derivando $f(y)$ tenemos la curvatura de la solución,

$$y''(t) = \frac{d}{dt}f(y) = f'(y)y' < 0,$$

pues

$$f'(y) = -\frac{K}{1+r}\left(r\left(\beta - \frac{1}{1+r}y\right) + \left(\alpha - \frac{r}{1+r}y\right)\right) < 0$$

Por tanto, sin necesidad de calcular la solución explícitamente, solo a partir de la EDO podríamos deducir que la solución va a tener una gráfica de este tipo:



En lo que respecta a la reacción química considerada, en este caso se consumirá toda la sustancia A quedando una cantidad de producto C menor que $\alpha+\beta$, que, recordemos, es lo más que podría obtenerse por el Teorema 3.

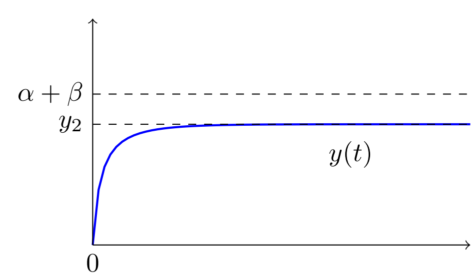
- Si $\alpha > r\beta$, $\lambda > 0$ así que cuando $t \to \infty$,

$$y(t) = (1+r)\alpha\beta\,\frac{1-e^{\lambda t}}{r\beta - \alpha e^{\lambda t}} = (1+r)\alpha\beta\,\frac{e^{-\lambda t}-1}{r\beta e^{-\lambda t} - \alpha} \longrightarrow (1+r)\beta = y_2 < y_1 < \alpha+\beta,$$

por lo que la solución tiende de nuevo al menor de los dos puntos de equilibrio, que ahora es y_2. También en este caso podemos usar la EDO directamente, sin calcular la solución de forma explícita, para saber cómo se acerca esta solución a y_2, pues de nuevo

$$y'(t) = f(y) = K\,\left(\alpha - \frac{r}{1+r}y\right)\left(\beta - \frac{1}{1+r}y\right) > 0$$

ya que las únicas raíces de $f(y)$ ahora verifican $0 < y_2 < y_1$ y, por unicidad de soluciones, $y(t) \neq y_1, y_2$ $\forall t > 0$, $y(0) = 0$. La derivada segunda es, como en el caso anterior, $y''(t) = f'(y)y' < 0$, ya que $f'(y) < 0$ y se obtiene una gráfica del mismo tipo que la anterior pero con y_2 en lugar de y_1



por lo que en este caso se consumirá toda la sustancia B obteniéndose también una cantidad de producto C menor que $\alpha + \beta$.

Ejemplo: Dos sustancias químicas A y B se combinan para formar una sustancia C. Inicialmente hay 40 gr. de A y 50 gr. de B, y por cada gramo de B se usan 2 gr. de A. Se observa que se forman 10 gr. de C en 5 minutos. ¿Cuánto se formará en 20 minutos?¿Cuánto quedará de A y B sin reaccionar después de un tiempo largo?

Solución: como $\alpha = 40, \beta = 50, r = 2$, tenemos que resolver el PVI

$$y'(t) = K \left(40 - \frac{2}{3}y\right)\left(50 - \frac{1}{3}y\right), \quad y(0) = 0, \qquad t \geq 0,$$

cuya solución, por ser $\alpha \neq r\beta$, es

$$y(t) = 3 \cdot 40 \cdot 50 \, \frac{1 - e^{\lambda t}}{100 - 40e^{\lambda t}}, \quad t \geq 0, \qquad \lambda = \frac{(40 - 2 \cdot 50)}{3} K = -20K \neq 0$$

Para calibrar el valor de K tenemos la medida adicional $y(5) = 10$, por lo que

$$6000 \, \frac{1 - e^{-100K}}{100 - 40e^{-100K}} = 10 \quad \Longleftrightarrow \quad 600\left(1 - e^{-100K}\right) = 100 - 40e^{-100K}$$

$$\Longleftrightarrow \quad K = -\frac{\ln(25/28)}{100} \simeq 0.00113, \quad \lambda \simeq -0.0227 < 0.$$

Cuando pasen 20 minutos, tendremos una cantidad de C

$$y(20) = 6000 \, \frac{1 - e^{20\lambda}}{100 - 40e^{20\lambda}} \simeq 29.32 \text{ gr.}$$

Como $\lambda < 0$, cuando $t \to \infty$ se tiene que la cantidad de C resultante verifica $y(t) \to 6000/100 = 60$ gr. En cambio, las cantidades que quedan sin reaccionar de sustancia A y de B después de un tiempo largo ($t \to \infty$) serán

$$A(t) = 40 - \frac{2}{3}y(t) \to 40 - \frac{2}{3}60 = 0, \qquad B(t) = 50 - \frac{1}{3}y(t) \to 50 - \frac{1}{3}60 = 30.$$

4. Anexo: Las leyes de Newton

Las tres leyes de Newton constituyen la base de la mecánica clásica.

4.1 Las tres leyes del movimiento de Newton

1. **Primera ley o de la inercia:** *Todo cuerpo persevera en su estado de reposo o movimiento uniforme y rectilíneo a no ser que sea obligado a cambiar su estado por fuerzas impresas sobre él.*

2. **Segunda ley:** *El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa y ocurre según la línea recta a lo largo de la cual aquella fuerza se imprime.*

3. **Tercera ley o de acción-reacción:** *Con toda acción ocurre siempre una reacción igual y contraria: quiere decir que las acciones mutuas de dos cuerpos siempre son iguales y dirigidas en sentido opuesto.*

Tendremos que tener en cuenta las versiones multidimensionales de estas leyes, es decir, con ellas estudiaremos el movimiento de objetos a lo largo de una recta, en el plano o en el espacio. En particular, la segunda ley se escribe como

$$m \, \vec{a}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t))$$

donde $\vec{r}(t)$ es el vector de posición del objeto considerado,

$$\vec{r}(t) = x(t) \in I\!R \quad \text{o} \quad \vec{r}(t) = (x(t), y(t)) \in I\!R^2 \quad \text{o} \quad \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in I\!R^3,$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}, \quad \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

4.2 La ley de la gravitación universal

Ley de la gravitación universal de Newton: *Existe una fuerza de atracción entre cada par de partículas que es proporcional al producto de las masas de dichas partículas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.*

Es decir, si tenemos dos masas puntuales m_1 y m_2 es el espacio y $\vec{r}_{12}$ es el vector que las une de longitud $r_{12} = \| \vec{r}_{12} \|$, la **fuerza gravitacional** que ejerce la partícula 1 sobre la partícula 2 es

$$\vec{F}_{12} = -G \, \frac{m_1 \, m_2}{r_{12}^2} \, \vec{u}_{12}$$

donde $\vec{u}_{12} = \vec{r}_{12}/r_{12}$ es el vector unitario en la dirección de la partícula 1 a la 2, y la constante de proporcionalidad G es la **constante de la gravitación universal** que en el sistema internacional vale

$$G = 6.67 \, 10^{-11} \, \mathrm{N} \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2}$$

Como aplicación directa de esta ley se obtiene la aceleración provocada por la gravedad sobre objetos que están cerca de la superficie terrestre. Si se considera un cuerpo de masa m cerca de la superficie de la Tierra, la atracción que ejerce el centro de la Tierra sobre él será una fuerza en sentido vertical respecto de la superficie cuyo módulo será

$$F_g = G \, \frac{M_T \, m}{r^2}$$

siendo M_T la masa total de la Tierra y r la distancia entre el objeto y el centro terrestre. Si el cuerpo está cerca de la superficie, es realista considerar que $r \approx R_T =$ radio de la Tierra. Si llamamos g a la aceleración sufrida por el objeto debido a esta fuerza gravitatoria, por la segunda ley de Newton se tiene entonces

$$F_g = G \, \frac{M_T \, m}{R_T^2} = m \, g \quad \Longrightarrow \quad g = G \, \frac{M_T}{R_T^2}$$

Como $M_T = 5.9736 \, 10^{24}$ kg y el radio medio de la Tierra es aproximadamente $R_T = 6371$ km, se obtiene

$$g = 9.81 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = 9.81 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Como nuestro planeta en realidad no es esférico este valor variará según la zona en que estemos localizados, pero en la práctica general se toma este valor medio teniendo en cuenta que puede tener aproximadamente un 1% de error.

5. Anexo: Conversión de medidas

Unidades de longitud

Sist. Técnico Inglés (US)[2]	Sist. Internacional
1 pulgada (inch (1"))	0.0254 m $\approx$ 2.5 cm
1 pie (foot (ft))= 12"	0.3048 m $\approx$ 30.5 cm
1 yarda = 3 ft	0.9144 m $\approx$ 91.4 cm
1 milla = 5280 ft	1609.34 m $\approx$ 1.6 km

Unidades de masa

Sist. Técnico Inglés (US)	Sist. Internacional
1 onza (ounce (oz))	28.35 gr $\approx$ 0.028 kg
1 libra (pound (lb)) = 16 oz	453.59 gr $\approx$ 0.454 kg
1 tonelada (ton, short-ton) = 2000 lb	908000 gr $\approx$ 908 kg

Unidades de fuerza

[2]US Customary Measurement Systems

SI:	1 Dina (1 dyn) = 1 gr · cm/sg^2
	1 Newton (1 N) = 1 kg · m/sg^2 = 10^5 dyn
	1 Kilopondio o kilo-fuerza (1 kp) = peso de una masa de 1 kg en la superficie terrestre
	= 9.8 N = 9.8 kg · m/sg^2
	(g= aceleración de la gravedad = 9.8 m/sg^2)
US:	1 libra-fuerza (1 lb$_f$) = peso de una masa de 1 lb en la superficie terrestre
	= 4.45 N = 32.17 lb · ft/sg^2 = 4.45 kg · m/sg^2
	1 tonelada-fuerza (1 ton-force, short ton-force) = 2000 lb$_f$
	(g= aceleración de la gravedad = 32.17 ft/sg^2)

Importante: hay que tener en cuenta que *en el lenguaje habitual se confunde la masa y el peso* de un objeto. Cuando se dice que un objeto "pesa" x kg en SI o W lb en el sistema US, lo que se quiere decir es que la báscula estima que tiene una masa de x kg en SI o de W lb en US. En las básculas la masa es una medida indirecta, es decir, realmente miden el peso de un objeto pero se calibran con objetos de masa conocida, por lo que muestran la masa estimada que corresponde.

Además, *en el SI y en el sistema US se manipulan de forma distinta el peso y la masa.*

En el SI la medida fundamental es la masa (en kg) y la unidad de peso W es el Newton (o la Dina) que se define a partir de la masa. Por tanto, un objeto de masa 1 kg tiene un peso de

$$W = 1 \cdot g \approx 1 \cdot 9.8\,\mathrm{m/sg^2} = 9.8\,\mathrm{N}$$

En el sistema US, 1 libra fuerza es el peso de 1 lb de masa en la superficie terrestre, y se dice que un objeto *tiene un peso de W lb*, aunque realmente se tendría que decir que tiene un peso de W lb$_f$. En el fondo da lo mismo pues cuando se dice que un objeto tiene un peso de 1 lb significa que

$$\text{masa} = 1\,\mathrm{lb}, \qquad \text{peso} = 1\,\mathrm{lb} \cdot g = 1\,\mathrm{lb} \cdot 32.17\,\mathrm{ft/sg^2} = 1\,\mathrm{lb}_f$$

Si conocido el peso W en libras de un objeto se quiere pasar al SI, basta hacer la conversión

$$\text{masa} = W\,\mathrm{lb} = W \cdot 0.454\,\mathrm{kg}, \qquad \text{peso} = W\,\mathrm{lb}_f = W \cdot 4.45\,\mathrm{N}$$

6. Ejercicios propuestos

1. En un cultivo de bacterias la velocidad de aumento es proporcional al número presente: a) si se ha hallado que el número se duplica en 4 horas. >Qué número se debe esperar al cabo de 12 horas? b) Si hay 10^4 al cabo de 3 horas y 4.10^4 al cabo de 5 horas, >cuántas había en un principio?

2. La semivida del cobalto radiactivo es de 5.27 años. Supóngase que un accidente nuclear ha provocado que el nivel de este cobalto ascienda en una región hasta 100 veces el nivel aceptable para la vida humana. >Cuánto tiempo pasará hasta que la región vuelva a ser habitable?

3. Según la ley de Newton del enfriamiento, la velocidad a que se enfría una sustancia al aire libre es proporcional a la diferencia entre la temperatura de la sustancia y la del aire. Si la temperatura del aire es de 30^{o}C y la sustancia se enfría de 100^{o}C a 70^{o}C en 15 minutos, >cuándo será 40^{o}C la temperatura de la sustancia?

4. Un tanque de 100Dl. está lleno con salmuera que contiene 60kg. de sal disuelta. Entra agua en el tanque a una velocidad de 2Dl/min. y la mezcla, conservada uniforme mediante agitación, sale a la misma velocidad. >Cuánta sal queda en el tanque después de una hora?

5. Una masa m es lanzada hacia arriba con una velocidad inicial v_0. Asumiendo que la gravedad es constante. ¿Cuánto sube la masa antes de empezar a caer? >Depende esta altura, razonablemente, de m, v_0 y g?

6. Una masa se lanza rodando desde una mesa con una velocidad horizontal v_0. >Dónde cae la masa? ¿Qué trayectoria sigue?

7. Una masa se lanza a velocidad inicial v_0 con un ángulo θ respecto a la horizontal. ¿Dónde cae la masa? ¿Qué trayectoria sigue? ¿Para qué ángulo alcanza la mayor distancia?

8. A un objeto de 8 kg de masa se le aplica una velocidad inicial hacia arriba de 20 m/seg. a 100 m del suelo. Si la fuerza en newtons debida a la resistencia del aire es $-16v$ con v la velocidad del objeto, hallar la ecuación del movimiento. >Qué altura cogerá el objeto? >Qué tiempo transcurre desde que se empuja hacia arriba hasta que llega al suelo?

9. Paul Tavilla (conocido en los años 80 como *the grape catcher*) realizó el desafío de ponerse al pie de la John Hancock Tower, un rascacielos de 60 pisos en Boston, con la boca abierta mirando hacia arriba, para intentar atrapar uvas que le lanzaban desde la parte alta del edificio, desde unos 180 metros de altura. Después de 70 intentos consiguió atrapar una. El Sr. Tavilla insistía que no era nada fácil, pues si uno no sabía bien lo que hacía podía perder un ojo. Si el peso de cada uva era aproximadamente de 9 gr y la resistencia del aire es proporcional a la velocidad de la uva con un coeficiente de fricción de $2 \cdot 10^{-5}$ Kg/s, ¿cuál fue aproximadamente la velocidad de la uva cuando la atrapó el Sr Tavilla? ¿Es cierto lo que afirmaba sobre la peligrosidad del reto?

   Observación : puede ser útil aplicar $1 - e^{-x} \approx x - x^2/2$ cuando $x \approx 0$.

10. Si la población de un país se duplica en 50 años, >En cuántos será el triple, suponiendo que la velocidad de aumento sea proporcional al número de habitantes?

11. Supóngase que una población duplica su tamaño original en 100 años y la triplica en 200. Demostrar que para dicha población no es aplicable el modelo malthusiano de crecimiento poblacional.

12. Una población crece de acuerdo con la ley logística y tiene un límite de $5 \cdot 10^8$ individuos. Cuando la población es baja se duplica cada 40 minutos. ¿Cuántos individuos tendrá la población después de 2 horas si inicialmente tenemos (a) 10^8 ó (b) 10^9 individuos?

13. Supóngase que cierta población obedece a la ecuación logística $p' = rp(1 - (p/K))$.

    (a) Si $p_0 = K/3$, encontrar el instante τ en el que la población inicial se duplica. Encontrar el valor de τ correspondiente al caso $r = 0.025$ individuos por año.

    (b) Si $p_0/K = \alpha$ para cierto $0 < \alpha < 1$, encontrar el instante T en el que $y(T)/K = \beta$ para un valor dado $0 < \beta < 1$. Comprobar que $T \to \infty$ cuando $\alpha \to 0$ o cuando $\beta \to 1$. Calcular el valor de T para $r = 0.025$ individuos por año, $\alpha = 0.1$ y $\beta = 0.9$.

14. *Modelo epidemiológico:* Supóngase que tenemos una población dada dividida en dos partes. Una parte engloba a los individuos que tienen una cierta enfermedad y pueden infectar a otros y la otra es la de los individuos que son susceptibles a infectarse. Se llama x a la proporción de individuos susceptibles e y a la de los ya infectados, por lo que $x + y = 1$. Supóngase que la enfermedad se expande por contacto entre los individuos infectados y los susceptibles, por lo que la ratio de expansión dy/dt es proporcional al número de contactos posibles. Además, supóngase que los miembros de ambos grupos se pueden mover libremente en la misma zona, por lo que el número de contactos será proporcional al producto xy. Como $x = 1 - y$, se obtiene el siguiente *modelo de expansión de una epidemia*

    $$y' = \alpha y(1 - y), \qquad y(0) = y_0$$

    para un cierto $\alpha > 0$ y una proporción inicial y_0 de individuos infectados.

    (a) Encontrar los puntos de equilibrio del sistema. ¿Qué representan dichos puntos de equilibrio en términos epidemiológicos?

    (b) Usando la función $f(y) = \alpha y(1 - y)$, deducir cómo pueden ser las curvas integrales de esta EDO.

    (c) Calcular la solución general del problema de valor inicial.

    (d) ¿Qué ocurre con las soluciones cuando $t \to \infty$? ¿Qué podemos concluir sobre cómo se va a propagar la enfermedad?

    (e) Con Matlab/Octave o wxMaxima, dibujar las soluciones obtenidas para $y_0 = 0.01, 0.1, 0.2, 0.5, 0.8$ y contrastarlas con lo deducido en el ítem 14b.

    (f) A partir de las gráficas anteriores, deducir si los puntos de equilibrio son atractores o repulsores.

15. Cierto producto químico se disuelve en el agua a una velocidad proporcional al producto de la cantidad aún no disuelta y la diferencia entre la concentración en una solución saturada y la concentración en la solución real. Se sabe que en 100 gramos de una solución saturada están disueltos 50 g. de sustancia. Si se agitan 30 g. del producto químico con 100g. de agua, en dos horas se disuelven 10g. >cuántos se disolverán en 5 horas?

7. Bibliografía

[1] W. E. Boyce, R. C. DiPrima, *Elementary differential equations and boundary value problems*, Ed. John Wiley and Sons, 2001.

[2] S. J. Farlow, *An introduction to differential equations and their applications*, Dover Publ. Inc., 1994.

[3] M. R. Spiegel, *Ecuaciones diferenciales aplicadas*, Prentice-Hall Hispanoamericana, 1983.