Tema 5.- Modelos en ecuaciones diferenciales ordinarias lineales. El oscilador armónico

Contenidos

1. Modelo básico de sistema masa-resorte

Un **resorte o muelle elástico** es una pieza elástica dispuesta en espiral, generalmente de metal, que se usa en ciertos mecanismos por la fuerza que desarrolla al recobrar su posición natural después de haber sido deformada (estirada, comprimida, doblada, etc.).

La estructura más simple de **sistema masa-resorte** consiste en un resorte en posición horizontal unido por el extremo izquierdo a una pared y por el derecho a un objeto de masa m, cuyo tamaño y forma se consideran irrelevantes, y que se puede desplazar horizontalmente sin rozamiento. En una determinada posición el sistema masa-resorte está en reposo, lo que se considera la posición del **punto de equilibrio del sistema masa-resorte**. La formulación más simple del modelo en este caso toma dicho punto como centro del eje de coordenadas $x = 0$. El valor de la variable x va a a ser entonces el desplazamiento desde dicho origen de coordenadas, que coincide con el punto de equilibrio.

Si se estira el resorte una cantidad x ($x > 0$) y lo soltamos, el resorte va a ejercer una fuerza sobre la masa en dirección al punto de equilibrio ($F(x) < 0$). Si el resorte se contrae una cantidad x ($x < 0$) y se suelta, se va a ejercer una fuerza $F(x) > 0$ también en dirección al punto de equilibrio. Esta fuerza se llama **fuerza restauradora**. Además, al aumentar la distancia $|x|$, tanto de estiramiento como de contracción, la fuerza restauradora aumentará en magnitud.

Experimentalmente, siempre que los desplazamientos tomen valores moderados, se demuestra que la fuerza restauradora verifica la **Ley de Hooke**

$$F(x) = -kx, \tag{1}$$

donde la constante de proporcionalidad $k > 0$ se llama **constante del resorte**, que se mide en el S.I. en N/m ó kg/s^2, y es una medida de la rigidez del resorte (a mayor valor de k más rígido es).

Las fuerzas restauradoras aparecen en muchas aplicaciones físicas. Por ejemplo, los cuerpos elásticos cuando sufren pequeñas deformaciones vuelven a su estado original por una fuerza restauradora. Por esto también se la suele llamar *fuerza elástica*. También aparece la fuerza restauradora cuando vibra un diapasón, cuando la corriente eléctrica se mueve dentro de un circuito o un electrón vibra dentro de un campo eléctrico.

En consecuencia, aplicando la segunda ley de Newton, si el desplazamiento varía con el tiempo, $x = x(t)$, el *modelo más simple del movimiento del sistema masa-resorte a lo largo del tiempo es*

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -k\, x(t) \tag{2}$$

Este problema también se podría estudiar como un sistema de EDOs de orden 1 añadiendo la derivada como componente. Si llamamos $y_1 = x(t)$, $y_2 = x'(t)$ y consideramos el vector $y(t) = (y_1, y_2)^T$, despejando y_2 de (2), tenemos el sistema

$$y'(t) = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -(k/m)y_1 \end{pmatrix} = f(y),$$

que es autónomo. Como ya vimos en el tema anterior en el caso escalar, en estos problemas son importantes los puntos de equilibrio, que en este ámbito son aquellos que hacen $f(y) = 0$. En este caso solo hay un punto, $(0,0)^T$, es decir, lo que hemos llamado punto de equilibrio del sistema masa-resorte $x = 0$ con velocidad $x' = 0$ (está parado). Esto es lo que explica que se llame punto de equilibrio del sistema a la posición en el que el sistema masa-resorte está en reposo.

1.1 Resorte en posición vertical

En la práctica es más natural considerar un modelo de masa-resorte en la vertical, es decir, considerar un resorte en vertical unido por arriba a una pared horizontal y con un objeto de masa m atado por el extremo inferior, estudiando el movimiento del sistema en dicha vertical. La diferencia es que en este caso hay que contar con el efecto de la gravedad sobre el sistema, por lo que *no es lo mismo el punto de reposo del resorte (sin ningún cuerpo colgado) que el punto de reposo del sistema masa-resorte*.

Normalmente se pone el centro del sistema de referencia $y = 0$ en el punto en que el resorte está en reposo e y denota el desplazamiento vertical del objeto desde dicho punto de referencia. Entonces se le cuelga el cuerpo de masa m y el sistema masa-resorte se desplaza verticalmente hacia abajo debido al peso del cuerpo hasta que se para en un punto $y_E < 0$, que es el *punto de equilibrio del sistema masa-resorte*. Es en este momento en el que, al igual que en el modelo horizontal, se desplaza el resorte a una posición inicial y_0 y se suelta (o se le imprime una cierta velocidad inicial).

La *ecuación que describe el movimiento vertical del sistema masa-resorte* a partir de ese instante inicial, $t = 0$, es

$$m \frac{d^2y(t)}{dt^2} = -k\, y(t) - m\, g, \quad t > 0 \tag{3}$$

Además, el **punto de equilibrio del sistema masa-resorte** y_E se calcula fácilmente pues es el valor de y en el que la fuerza recuperadora del resorte compensa la fuerza de la gravedad (el peso), esto es, el valor y_E tal que

$$-ky_E - mg = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y_E := -\frac{m}{k}\, g$$

Esto concuerda con lo que se obtiene si vemos esta ecuación (3) como un sistema autónomo de orden 1, del tipo $y' = f(y)$. En este caso, el único punto de equilibrio es el punto $y_1 = y_E$, $y_2 = 0$, es decir, se está en equilibrio cuando el sistema masa-resorte está parado en el punto y_E.

Si en lugar de establecer el sistema de coordenadas en el punto de reposo del resorte se coloca en el punto de equilibrio y_E, y Z denota el desplazamiento vertical del objeto desde el punto de equilibrio, $Z = y - y_E$, se tiene $y = Z + y_E$, $y' = Z'$, $y'' = Z''$, lo que llevamos a (3) y se tiene

$$mZ'' = -k(Z + y_E) - mg \;\Rightarrow\; mZ'' = -kZ + (-ky_E - mg) = -kZ.$$

En otras palabras, el modelo (3) resulta

$$m \frac{d^2Z(t)}{dt^2} = -k\, Z(t) \tag{4}$$

que es la misma ecuación que la obtenida en (2) para el sistema horizontal. Por tanto, desde el punto de vista teórico, es preferible estudiar la ecuación “horizontal" (2) que la “vertical" (4). Como es natural, en los casos prácticos sí que habrá que trabajar con el modelo que corresponda al caso considerado ((2) ó (3)).

2. Resolución del modelo

El estudio de las soluciones del sistema diferencial (2) nos llevará a la comprensión de otros problemas más complejos y que aparecen en muchos campos de la física.

Esta ecuación es una ecuación diferencial lineal de segundo orden de coeficientes constantes, con polinomio característico $p(\lambda) = m\lambda^2 + k$ que tiene dos raíces complejas conjugadas $\lambda = \pm\sqrt{k/m}\, i$. Por tanto, sabemos que su solución general es

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t, \qquad \omega^2 := \frac{k}{m} \tag{5}$$

donde c_1 y c_2 son dos constantes reales arbitrarias.

Para manejar esta solución general a menudo es preferible utilizar una de las dos expresiones alternativas siguientes, que se obtienen aplicando identidades trigonométricas

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi_0) \quad \text{ó} \quad x(t) = A\sin(\omega t + \phi_0), \tag{6}$$

siendo A y ϕ_0 constantes arbitrarias.

Desde que se prefijan dos condiciones iniciales al sistema

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = v_0, \tag{7}$$

estas constantes arbitrarias quedan determinadas de forma que se obtiene la única solución particular buscada.

Ejemplo: Estudiar el movimiento del sistema masa-resorte de masa $m = 1$ kg y constante del resorte $k = 4$ N/m[1] que parte de la posición $x(0) = x_0 = 1/2$ con una velocidad inicial $x'(0) = v_0 = \sqrt{3}$.

La ecuación del movimiento de este sistema es

$$x'' = -4x, \quad x(0) = 1/2, \quad x'(0) = \sqrt{3}, \quad t > 0$$

El polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^2 + 4$, que tiene dos raíces $\lambda = \pm 2i$, por lo que la solución de la EDO es

$$x(t) = C_1 \sin 2t + C_2 \cos 2t$$

Exigiendo la condición $x(0) = 1/2$, se tiene $C_2 = 1/2$. Para determinar la otra constante de integración tenemos que derivar $x'(t) = 2C_1 \cos 2t - 2C_2 \sin 2t$, por lo que $x'(0) = 2C_1 = \sqrt{3}$. Por tanto, la solución del PVI es

$$x(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2t + \frac{1}{2} \cos 2t. \tag{8}$$

Sin embargo, para dibujar esta función o estudiar sus propiedades es mejor expresar esta función como una única función trigonométrica,

$$\begin{aligned} x(t) = &\quad A\sin(2t + \phi_0) = A\left(\sin 2t \cos \phi_0 + \cos 2t \sin \phi_0\right) = (A\cos\phi_0)\sin 2t + (A\sin\phi_0)\cos 2t \\ = &\quad \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2t + \frac{1}{2}\cos 2t \quad \Leftrightarrow \quad A\cos\phi_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad A\sin\phi_0 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

La manera más simple de calcular A y ϕ_0 es elevar al cuadrado ambas ecuaciones y sumarlas con lo que

$$A^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1.$$

Podemos elegir $A = 1$ o $A = -1$, aunque se suele preferir el valor positivo $A = 1$. El otro parámetro ϕ_0 ha de verificar

$$\cos\phi_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\phi_0 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \phi_0 = \frac{\pi}{6}$$

Si hubiéramos elegido el valor positivo $A = -1$, ϕ_0 tendría que cumplir

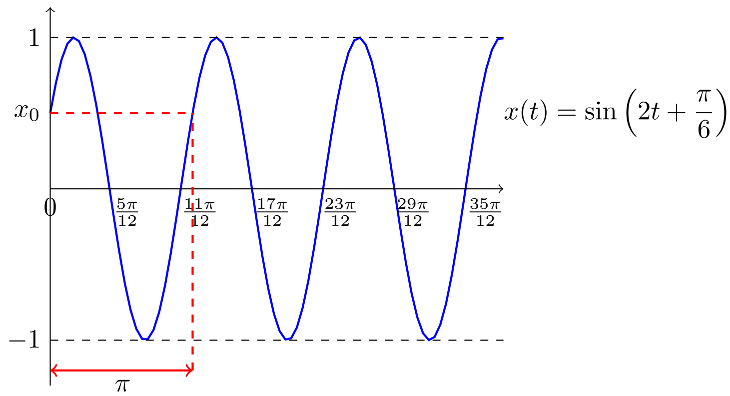
$$\cos\phi_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\phi_0 = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \phi_0 = \frac{7\pi}{6}.$$

[1] Les recuerdo que en el tema anterior les dejé un resumen de medidas físicas

Obsérvese que realmente hay infinitos valores de A y ϕ_0 que se pueden tomar: $\{A = 1, \phi_0 = \pi/6+2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ o $\{A = -1, \phi_0 = 7\pi/6 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Pero da igual cuáles tomemos, porque en todos los casos lo que importa es que la solución del PVI es

$$x(t) = \sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right).$$

Con esta expresión de la solución vemos claramente que la gráfica es la misma que la de la función $\sin 2t$ trasladada hacia la izquierda una longitud $-\pi/12$ ($\sin(2t+\pi/6) = \sin(2(t+\pi/12))$). Por tanto, va a oscilar entre -1 y 1, que en el instante inicial arranca en $x_0 = \sin(\pi/6) = 1/2$ con velocidad $v_0 = 2\cos(\pi/6) = \sqrt{3}$ y que va a repetirse en cada intervalo de longitud $(2\pi)/2 = \pi$, lo que es más difícil de ver con la expresión (8).



Esta solución nos dice que el sistema masa-resorte arranca con velocidad v_0 m/s alejándose del punto de equilibrio en la dirección positiva hasta llegar a una distancia máxima $x = 1$. En ese momento, empieza a acercarse de nuevo al punto de equilibrio que alcanza en $t = 5\pi/12$ segundos y luego sigue alejándose en la otra dirección hasta llegar a otro punto de máximo alejamiento $x = -1$. Y luego vuelve, oscilando eternamente.

También se podría haber exigido directamente que la solución fuera de la forma $x(t) = A\sin(2t + \phi_0)$ y determinar A y ϕ_0 a partir de las condiciones iniciales, sin pasar por la expresión (8), es decir,

$$x(0) = A\sin\phi_0 = \frac{1}{2}, \qquad x'(0) = 2A\cos\phi_0 = \sqrt{3}.$$

De todas formas, hay que tener presente la equivalencia de las dos expresiones de la solución pues dependiendo del problema a veces es mejor usar la expresión (8).

3. Estudio cualitativo y cuantitativo de la solución

Como hemos visto en el ejemplo anterior, la expresión de la solución

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi_0), \qquad \omega^2 := \frac{k}{m} \tag{9}$$

es más útil para entender su comportamiento y tener una idea gráfica del movimiento de la masa a lo largo del tiempo del sistema masa-resorte sin rozamiento, lo que se suele llamar **movimiento armónico simple (M.A.S.)** y al sistema se le llama **oscilador armónico**.

De esta expresión (9) se observa inmediatamente que las *soluciones de la ecuación del movimiento del sistema masa-resorte son funciones oscilantes* a lo largo del tiempo.

El valor A se llama **amplitud** de la oscilación y a $(\omega t + \phi_0)$ se llama **fase** de la oscilación. Por ser una función seno es una función periódica, cuyo **período** $T > 0$ (es decir, el menor valor $T > 0$ tal que $x(t + T) = x(t)$, $\forall t$) es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{10}$$

El número de oscilaciones en una unidad de tiempo es

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

se llama **frecuencia o frecuencia natural** de la oscilación y se mide en ciclos por segundo. EL parámetro ω se suele llamar **frecuencia circular** pues $f = \omega/(2\pi)$, aunque a menudo también se le suele llamar frecuencia, distinguiéndose por el contexto a qué tipo de frecuencia se refiere.

Ejercicio: Resolver e interpretar la solución del mismo sistema masa-resorte del ejercicio anterior con masa $m = 1$ kg y constante del resorte $k = 4$ N/m , para los siguientes casos

$$\text{(a) } x_0 = \frac{1}{2},\ v_0 = -\sqrt{3} \qquad \text{(b) } x_0 = -\frac{1}{2},\ v_0 = \sqrt{3} \qquad \text{(c) } x_0 = -\frac{1}{2},\ v_0 = -\sqrt{3},$$

calculando la amplitud, la fase cuando $t = 0$, el período, y su frecuencia.

Como es el mismo sistema masa-resorte, la solución general en los tres casos es $x(t) = A\sin(2t + \phi_0)$, para ciertos $A, \phi_0 \in \mathbb{R}$, que dependerán de los valores iniciales.

(a) $x(0) = A\sin\phi_0 = 1/2, x'(0) = 2A\cos\phi_0 = -\sqrt{3} \Rightarrow A = 1, \phi_0 = 5\pi/6 \Rightarrow x(t) = \sin(2t + 5\pi/6)$

(b) $x(0) = A\sin\phi_0 = -1/2, x'(0) = 2A\cos\phi_0 = \sqrt{3} \Rightarrow A = 1, \phi_0 = -\pi/6 \Rightarrow x(t) = \sin(2t - \pi/6)$

(c) $x(0) = A\sin\phi_0 = -1/2, x'(0) = 2A\cos\phi_0 = -\sqrt{3} \Rightarrow A = 1, \phi_0 = -5\pi/6 \Rightarrow x(t) = \sin(2t - 5\pi/6)$

En estos tres casos y el del ejercicio anterior el movimiento del péndulo es sinusoidal pero “desfasados” unos casos respecto de los otros. En el caso del ejercicio anterior, la posición inicial es positiva y la derivada es positiva, así que el péndulo comienza alejándose del punto de equilibrio en sentido positivo. En el caso (a) parte del mismo punto pero con velocidad negativa, es decir, que va en sentido negativo, acercándose al punto de equilibrio. En el caso (c) sale desde el punto -1/2, es decir, a medio metro del punto de equilibrio pero en sentido negativo, con una velocidad positiva o, lo que es lo mismo, en el sentido positivo, por lo que se acerca al punto de equilibrio. En el caso (d), se parte del lado negativo y se aleja con velocidad negativa hasta llegar al desplazamiento máximo $x = -1$ m y luego vuelve. En todos los casos, la masa seguirá oscilando indefinidamente.

4. FRICCIÓN

Como hemos visto anteriormente las soluciones del sistema masa-resorte (2) oscilan indefinidamente sin que disminuya su amplitud, lo que no cuadra exactamente con la experiencia con este tipo de dispositivos. En otras palabras, (2) modeliza el caso de un sistema masa-resorte “ideal" sin rozamiento. De todas formas, aunque parezca poco práctico, el movimiento armónico simple aparece en muchas aplicaciones.

Si queremos construir un modelo más realista que simule la disminución progresiva de la amplitud del movimiento que se observa en la práctica habrá que introducir otras fuerzas en la ecuación.

Hay dos tipos de **fuerzas de fricción** F_f que aparecen habitualmente en la práctica: la debida al rozamiento del aire que rodea al sistema masa-resorte (o de cualquier fluido en el que esté sumergido el sistema) y/o la causada por la fricción entre la masa y la superficie sobre la que se desplaza.

Cuando consideramos la fuerza F_f resultante del *rozamiento o fricción entre la masa y el aire que la rodea* (o entre la masa y el fluido), que la frena oponiéndose al movimiento, se observa experimentalmente que la magnitud de dicha fuerza aumenta cuando lo hace la velocidad de la masa. La forma más sencilla de modelizar dicha fuerza es usar la **fuerza de amortiguamiento lineal:**

$$F_f = -c\,\frac{dx}{dt}, \qquad c > 0 \tag{11}$$

llamándose a la constante de proporcionalidad c *coeficiente de fricción*. Experimentalmente se ve que esta relación (11) entre la fuerza y la velocidad aproxima la realidad en muchas situaciones.

Otra opción para aproximar esta fuerza de rozamiento del aire es la **fuerza de amortiguamiento de Newton:**

$$F_f = -\alpha\,\frac{dx}{dt}\left|\frac{dx}{dt}\right|, \qquad \alpha > 0$$

que suele ser la que se aplica en aeronáutica. Con esta fuerza obtenemos un modelo no lineal cuyo estudio general no entra dentro de los objetivos de este curso, aunque se propone su resolución numérica.

La fuerza que actúa debida a la fricción entre el sistema de masa-resorte y la superficie sobre la que se desliza no actúa de la misma forma que la anterior. Experimentalmente se comprueba que una vez que la masa se está moviendo esta fuerza de fricción frena el movimiento pero con una magnitud que es prácticamente constante e independiente de la velocidad. Este fenómeno se modeliza con la **fricción de Coulomb:**

$$F_f = \begin{cases} \gamma, & \text{si } dx/dt < 0 \\ -\gamma, & \text{si } dx/dt > 0 \end{cases} \qquad \gamma > 0 \tag{12}$$

dependiendo la constante $\gamma > 0$ de lo lisa que sea la superficie y del peso de la masa.

En este tema sólo estudiaremos el caso de la fricción lineal (11).

4.1 Modelo de sistema masa-resorte con fricción lineal

Desde el punto de vista teórico estudiaremos sólo el caso de fricción lineal (11), es decir, el *modelo que describe el movimiento de un sistema masa-resorte con amortiguamiento lineal:*

$$m\,\frac{d^2x(t)}{dt^2} + c\,\frac{dx(t)}{dt} + k\,x(t) = 0, \qquad c > 0,\ k > 0 \tag{13}$$

Como sabemos, por ser esta una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes homogénea de segundo orden, sus soluciones dependerán de las raíces de su *polinomio característico*

$$p(\lambda) = m\lambda^2 + c\lambda + k = 0, \tag{14}$$

es decir, de los valores

$$\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \tag{15}$$

En consecuencia, se obtendrán distintos tipos de soluciones según el discriminante $c^2 - 4mk$ sea negativo (**modelo subamortiguado**) o positivo (**modelo sobreamortiguado**).

El caso $c^2 = 4mk$ (**modelo críticamente amortiguado**) desde el punto de vista físico no tiene sentido práctico ya que todas las constantes que aparecen en la igualdad son aproximaciones, pero precisamente por la misma razón es interesante estudiarlo porque indica que cualquier pequeña variación de la fricción puede producir un fenómeno subamortiguado o sobreamortiguado.

4.2 Modelo subamortiguado

En el caso $c^2 - 4mk < 0$ las dos raíces (15) son complejas conjugadas

$$\lambda = -\frac{c}{2m} \pm \frac{\sqrt{-(c^2 - 4mk)}}{2m}i = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{4mk - c^2}{4m^2}}i,$$

o de forma más compacta,

$$\lambda = -\frac{c}{2m} \pm i\omega, \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}$$

por lo que la solución general de (13) se puede expresar

$$x(t) = e^{-ct/(2m)}(C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t), \qquad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}$$

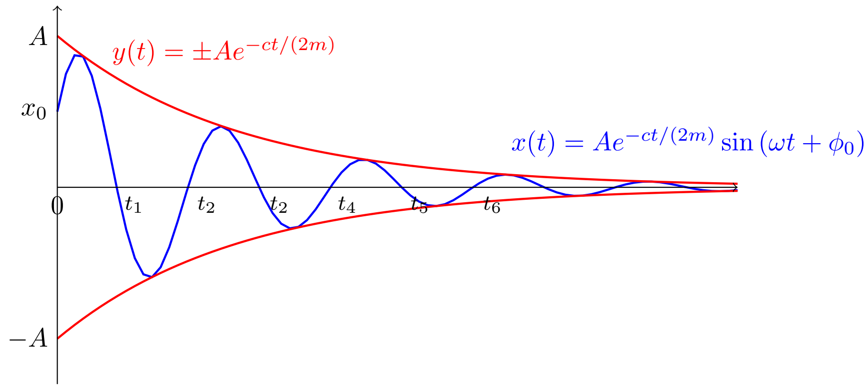
o

$$x(t) = Ae^{-ct/(2m)} \sin(\omega t + \phi_0), \qquad A,\, \phi_0 \in \mathbb{R}$$

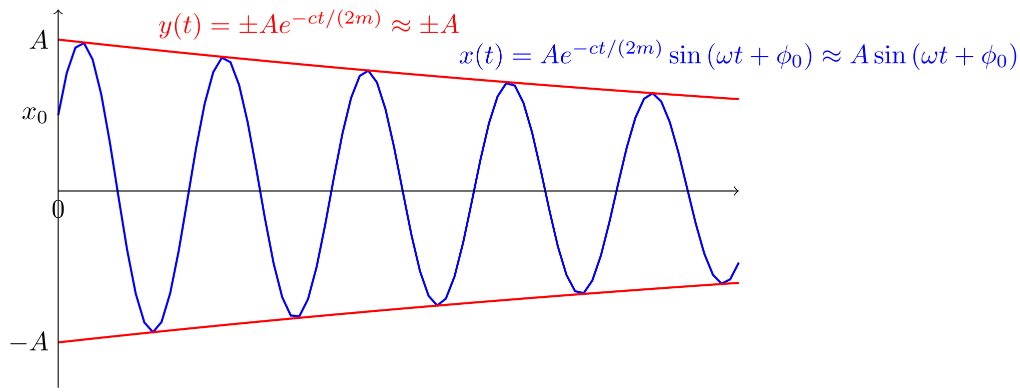
Ahora la *amplitud de la oscilación* es $Ae^{-ct/(2m)}$, por lo que decae exponencialmente, aunque la masa nunca se para. Además, desde que hay fricción $c > 0$ este término asegura que siempre habrá decaimiento de la amplitud. Aunque la solución no es periódica, se puede decir que ω es una *frecuencia circular aproximada* y que

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k/m - c^2/(4m^2)}}$$

es su *periodo aproximado*. Además, la frecuencia $f = 1/T$ ahora disminuirá cuando aumenta c y se acerca a la frecuencia natural cuando $c \to 0$.



Si $c^2 \ll 4mk$, la solución refleja un movimiento casi armónico en la que la amplitud permanece prácticamente constante. En este caso se puede pensar en despreciarla siempre que el cociente $c^2/(4mk)$ sea suficientemente pequeño. En términos prácticos, se puede demostrar que si $c^2/(4mk) \lesssim 0.00006$ se garantiza que después de un período la masa vuelve a su posición original al menos en un 95%, por lo que la fricción se considera despreciable.



4.3 Modelo sobreamortiguado

En el caso $c^2 - 4mk > 0$ las dos raíces (15) son reales y distintas por lo que la solución general es una combinación lineal de exponenciales reales

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \qquad \lambda_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}, \qquad \lambda_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

Es evidente que $\lambda_2 < 0$. Se demuestra que también $\lambda_1 < 0$ pues se tiene $m\lambda_1\lambda_2 = k$ de la factorización del polinomio característico (14). Por tanto, $x(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$, con lo que va a haber un decaimiento exponencial más o menos rápido según sean estos autovalores $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. Para estudiarlo más detalladamente, dados los valores iniciales $x(0) = x_0$ y $x'(0) = v_0$, las constantes de la solución general están determinadas como

$$C_1 = \frac{v_0 - \lambda_2 x_0}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad C_2 = \frac{\lambda_1 x_0 - v_0}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

por lo que tendremos que distinguir los siguientes casos

- Si $v_0 = \lambda_2 x_0$ ($C_1 = 0$), se tiene $x(t) = x_0 e^{\lambda_2 t}$, es decir, un decaimiento exponencial hacia el punto de equilibrio sin oscilaciones y sin llegar nunca a alcanzarlo, en teoría.

- Si $v_0 \neq \lambda_2 x_0$ ($C_1 \neq 0$), la solución puede anularse si existe $t^* > 0$ tal que

$$C_1 e^{\lambda_1 t^*} = -C_2 e^{\lambda_2 t^*} \Leftrightarrow e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t^*} = -\frac{C_2}{C_1} = \frac{\lambda_1 x_0 - v_0}{\lambda_2 x_0 - v_0}.$$

Como $\lambda_1 - \lambda_2 > 0$, $t^* > 0$ solamente si

$$\frac{\lambda_1 x_0 - v_0}{\lambda_2 x_0 - v_0} > 1 \tag{16}$$

Por tanto, hay que distinguir otras dos posibilidades

- Si $v_0 < \lambda_2 x_0$: (16) si y solo si

$$\lambda_1 x_0 - v_0 > \lambda_2 x_0 - v_0 \Leftrightarrow \lambda_1 x_0 > \lambda_2 x_0 \Leftrightarrow x_0 > 0$$

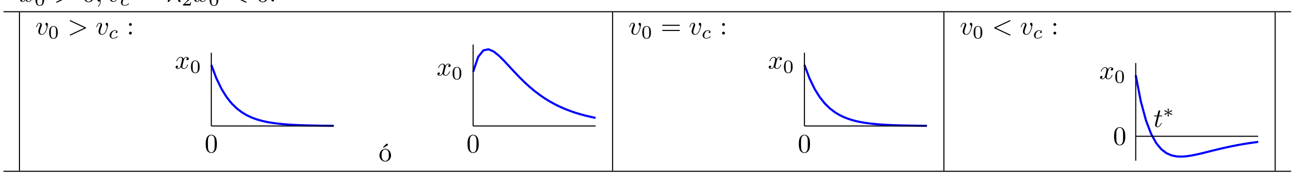
  pues $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$.

- Si $v_0 > \lambda_2 x_0$: (16) si y solo si

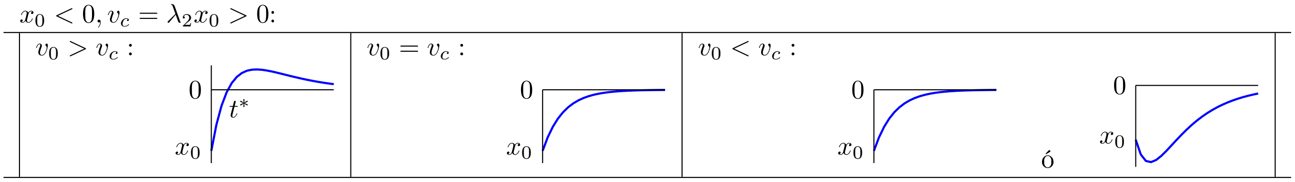
$$\lambda_1 x_0 - v_0 < \lambda_2 x_0 - v_0 \Leftrightarrow \lambda_1 x_0 < \lambda_2 x_0 \Leftrightarrow x_0 < 0.$$

En consecuencia, dada una posición inicial x_0, existe una **velocidad crítica** $v_c := \lambda_2 x_0$, tal que dependiendo de si la velocidad inicial v_0 es mayor, igual o menor que dicha velocidad crítica, el comportamiento de la solución es diferente:

$x_0 > 0, v_c = \lambda_2 x_0 < 0$:



$x_0 < 0, v_c = \lambda_2 x_0 > 0$:



Desde el punto de vista práctico, se ve que dada una posición inicial x_0, si se le imprime una velocidad inicial v_0 con módulo mayor que el de la velocidad crítica v_c y con sentido hacia el punto de equilibrio, la masa conseguirá pasar una vez por el punto de equilibrio antes de pararse en él. Si la velocidad inicial tiene módulo menor que el de la v_c o va en sentido opuesto al punto de equilibrio, la masa no pasará por el punto de equilibrio antes de pararse. Esto tiene su importancia cuando se diseñan, por ejemplo, amortiguadores de vehículos o maquinaria.

4.4 Modelo críticamente amortiguado

Como ya se dijo, el caso $c^2 = 4mk$ no es significativo físicamente pero sí tiene interés matemático, pues es justamente el caso en el que con una pequeña variación en los datos podemos tener un caso subamortiguado o uno sobreamortiguado. En este caso el polinomio característico (14) tiene una única raíz real doble y por tanto su solución general es

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{\lambda t}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \qquad \lambda = -\frac{c}{2m} < 0$$

Aunque ahora aparece cierto crecimiento de la solución debido al factor t, la parte de la exponencial negativa decae mucho más rápido y por tanto, cuando $t \to \infty$, la masa siempre tiende al punto de equilibrio. Analizando esta solución también se puede ver que el comportamiento del sistema es bastante parecido al caso sobreamortiguado. En particular, la masa puede pasar por el punto de equilibrio a lo sumo una vez y dicho caso se da sólo si la velocidad inicial es menor (si $x_0 > 0$) o mayor (si $x_0 < 0$) que la velocidad crítica $v_c = \lambda x_0$.

5. Sistema masa-resorte forzado

Como hemos visto anteriormente, los sistemas masa-resorte amortiguados tienden a pararse después de un cierto intervalo de tiempo. Para mantener un sistema masa-resorte amortiguado en movimiento habrá que aportarle energía mecánica extra aplicando una fuerza externa $F(t)$. En dicho caso se dice que es un sistema **forzado**. Aplicando la segunda ley de Newton es claro que este fenómeno se modeliza mediante la ecuación lineal de coeficientes constantes no homogénea

$$m\,\frac{d^2x(t)}{dt^2}+c\,\frac{dx(t)}{dt}+k\,x(t)=F(t), \qquad c>0,\ k>0, \qquad t\geq 0 \tag{17}$$

Un tipo de fuerzas externas relevante en este ámbito es de las *fuerzas externas $F(t)$ periódicas*, es decir,

$$F(t)=B\cos\omega_0 t, \qquad B,\,\omega_0 \text{ conocidos.} \tag{18}$$

5.1 Sistema forzado sin amortiguamiento

En el caso en que *no hay amortiguamiento* $c=0$ (oscilador armónico o sistema masa-resorte sin fricción), tenemos la EDO

$$mx''+kx=B\cos\omega_0 t, \qquad t>0. \tag{19}$$

que es lineal de coeficientes constantes no homogénea. Para calcular su solución tenemos que resolver la homogénea que, como ya vimos, tiene solución general.

$$x(t)=A\sin(\omega_n t+\phi_0), \qquad \omega_n^2=\frac{k}{m}=\text{ frecuencia natural del sistema}$$

Sin embargo, la solución general de la ecuación completa (19) dependerá de si la frecuencia ω_0 de la fuerza externa y la natural del sistema ω_n son iguales o no[2], como veremos a continuación.

Para encontrar una solución particular de la completa, buscamos soluciones de la forma

$$x(t)=A_1\sin(\omega_0 t)+A_2\cos(\omega_0 t). \tag{20}$$

Derivando fácilmente, $x''(t)=-\omega_0^2\left(A_1\sin(\omega_0 t)+A_2\cos(\omega_0 t)\right)=-\omega_0^2 x(t)$, lo que llevándolo a la ecuación

$$(-m\omega_0^2+k)A_1\sin(\omega_0 t)+(-m\omega_0^2+k)A_2\cos(\omega_0 t)=B\cos(\omega_0 t)\Leftrightarrow(-m\omega_0^2+k)A_1=0,\ (-m\omega_0^2+k)A_2=B$$

- Si $(-m\omega_0^2+k)\neq 0\Leftrightarrow\omega_0\neq\omega_n$: se obtiene $A_1=0$, $A_2=B/(-m\omega_0^2+k)$, por lo que la solución general de (19) es
$$x(t)=A\sin(\omega_n t+\phi_0)+\frac{B}{k-m\omega_0^2}\cos\omega_0 t$$
por lo que en este caso la masa seguirá un movimiento oscilatorio acotado aunque no necesariamente periódico[3].

- Si $(-m\omega_0^2+k)=0\Leftrightarrow\omega_0=\omega_n$ o, lo que es lo mismo, *el sistema masa-resorte y la fuerza externa vibran con la misma frecuencia*, en cuyo caso se suele decir que **el sistema y la fuerza externa están en resonancia mecánica**, ninguna función del tipo (20) puede ser solución de la EDO completa, y hay que probar con soluciones del tipo
$$x(t)=t\left(A_1\sin(\omega_0 t)+A_2\cos(\omega_0 t)\right).$$
Derivando esta expresión dos veces tenemos
$$x''(t)=\left(-2\omega_0A_2-\omega_0^2A_1t\right)\sin(\omega_0 t)+\left(2\omega_0A_1-\omega_0^2A_2t\right)\cos(\omega_0 t)$$
y sustituyendo en la EDO, se tiene
$$\left(-2m\omega_0A_2-m\omega_0^2A_1t+kA_1t\right)\sin(\omega_0 t)+\left(2m\omega_0A_1-m\omega_0^2A_2t+kA_2t\right)\cos(\omega_0 t)=B\cos(\omega_0 t).$$

[2] Si queremos ser muy precisos deberíamos de decir, si $\omega_0^2=\omega_n^2$ o no, pero en la práctica esto es irrelevante
[3] Ver en el Anexo la superposición de M.A.S.

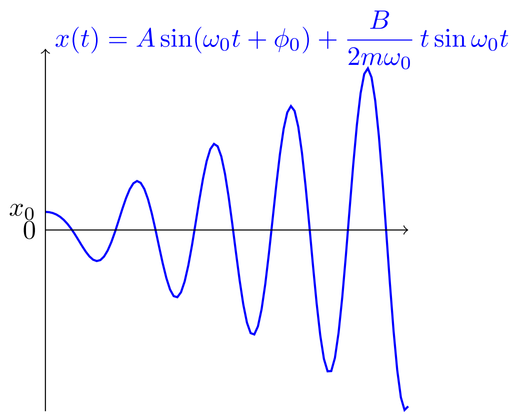
Como $-m\omega_0^2 + k = 0$ los coeficientes de t desaparecen y se tiene que dar

$$-2m\omega_0 A_2 = 0,\ 2m\omega_0 A_1 = B \Leftrightarrow A_2 = 0,\ A_1 = \frac{B}{2m\omega_0}$$

por lo que la solución general es

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \phi_0) + \frac{B}{2m\omega_0}\, t \sin \omega_0 t$$

En consecuencia, debido al último término de esta expresión, a medida que $t \to \infty$, se tiene que $|x(t)| \to \infty$ oscilando desde valores negativos a positivos indefinidamente. Es otras palabras, el sistema comienza a oscilar con amplitudes de magnitudes tremendas que provocan que el sistema colapse.



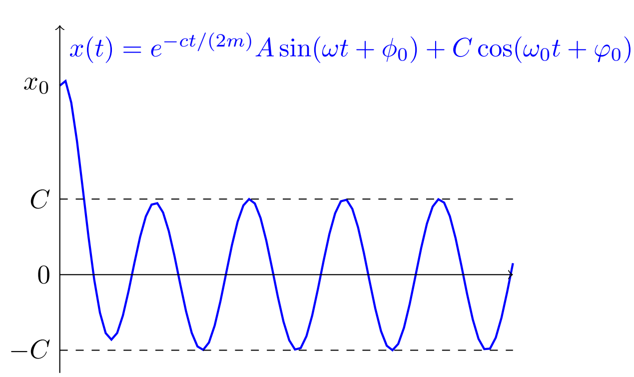
5.2 Sistema forzado con amortiguamiento

En el caso de un *sistema masa-resorte subamortiguado* $c^2 < 4mk$, la solución general del sistema (17)-(18) resulta

$$x(t) = e^{-ct/(2m)} A\sin(\omega t + \phi_0) + C\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\omega = \frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m}, \qquad C = \frac{B}{\sqrt{m^2(\omega_n^2 - \omega_0^2)^2 + c^2\omega_0^2}}, \qquad \tan\varphi_0 = \frac{c\,\omega_0}{m(\omega_n^2 - \omega_0^2)}$$

siendo $\omega_n^2 = k/m$ la frecuencia natural del oscilador armónico[4]. Por tanto, las soluciones serán la suma de una parte de decaimiento rápido hacia el cero ($e^{-ct/(2m)} A\sin(\omega t + \phi_0)$) lo que se llama *fase transitoria* (o "transiente"), y de otra parte de movimiento armónico $x_s(t) := C\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ que se llama *término de estado estacionario*. Este término estacionario es relevante ya que cuando $t \to \infty$, $x(t) \to x_s(t)$ y oscila con la misma frecuencia que la fuerza externa (18), independientemente de los valores iniciales. Es decir, se puede forzar a que un sistema masa-resorte en un cierto fluido de baja fricción se mueva con una determinada frecuencia aplicando una fuerza externa con dicha frecuencia.



[4]Se deja como ejercicio demostrar esto buscando una solución particular de forma $x(t) = C\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

Además, cuando hay resonancia mecánica, $\omega_0 = \omega_n$, aunque el movimiento de la fuerza externa y el de la masa van desfasados ($\varphi_0 = -\pi/2$), ambos van en la misma dirección y con la máxima velocidad posible.

En el caso de sistemas sobreamortiguados ($c^2 > 4mk$) y críticamente amortiguados ($c^2 = 4mk$) con fuerza externa (18), la fase transitoria de las soluciones decae sin oscilaciones hacia la misma solución de estado estacionario $x_s(t)$.

6. Anexo: superposición de M.A.S.

- Suma de M.A.S. con igual amplitud y frecuencia:

$$x(t) = A\sin\omega t + A\sin(\omega t + \phi_0) = 2A\cos\left(\frac{\phi_0}{2}\right)\sin\left(\omega t + \frac{\phi_0}{2}\right), \quad \phi_0 \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

  es decir, $x(t)$ es un M.A.S. con amplitud $2A\cos(\phi_0/2) \leq 2A$ y la misma frecuencia pero con desfase $\phi_0/2$.

  Si $\phi_0 = 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, $\sin(\omega t + 2n\pi) = \sin(\omega t) \Rightarrow x(t) = 2A\sin\omega t$ (se dice que *están en fase*).

  Si $\phi_0 = (2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, $\sin(\omega t + (2n+1)\pi) = -\sin(\omega t) \Rightarrow x(t) = 0$ (se dice que *están fuera de fase*).

- Suma de M.A.S. con distintas amplitudes y misma frecuencia:

$$x(t) = A\sin\omega t + B\sin(\omega t + \phi_0) = C\sin(\omega t + \varphi_0), \quad \phi_0 \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\phi_0, \qquad \tan\varphi_0 = \frac{B\sin\phi_0}{A + B\cos\phi_0},$$

  es decir, $x(t)$ es un M.A.S. con amplitud $C \leq A + B$ y la misma frecuencia pero con cierto desfase.

  Si $\phi_0 = 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, $\sin(\omega t + 2n\pi) = \sin(\omega t) \Rightarrow x(t) = (A+B)\sin\omega t$.

  Si $\phi_0 = (2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, $\sin(\omega t + (2n+1)\pi) = -\sin(\omega t) \Rightarrow x(t) = (A-B)\sin\omega t$.

- Suma de M.A.S. con igual amplitud y diferentes frecuencias:

$$x(t) = A\sin\omega_1 t + A\sin(\omega_2 t) = 2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right), \quad \omega_1 \neq \omega_2$$

  por lo que $x(t)$ no es un M.A.S., ni siquiera tiene que ser periódico (como veremos en la siguiente Proposición para el caso más general) aunque oscila cuando $t \to \infty$.

- Suma de M.A.S. con distintas amplitudes y diferentes frecuencias:

$$x(t) = A\sin\omega_1 t + B\sin\omega_2 t$$

Proposición: $x(t) = A\sin\omega_1 t + B\sin\omega_2 t$, $\omega_1 \neq 0, \omega_2 \neq 0$, *es periódica si y sólo si* $\omega_2/\omega_1 \in \mathbb{Q}$. *Además, si*

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{n_2}{n_1} \in \mathbb{Q} \text{ es la correspondiente fracción irreducible con } n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$$

entonces el periodo de $x(t)$ *es* $T = 2\pi/r$ *donde* $r = \dfrac{\omega_1}{n_1} = \dfrac{\omega_2}{n_2}$.

Demostración: $x(t)$ es periódica de período $T > 0$ sii $x(t+T) = x(t), \forall t$, es decir, sii

$$x(t+T) = A\sin(\omega_1 t + \omega_1 T) + B\sin(\omega_2 t + \omega_2 T) = A\sin\omega_1 t + B\sin\omega_2 t, \quad \forall t.$$

Desarrollando el seno y el coseno de la suma en el lado izquierdo ($\omega_1 \neq \omega_2$),

$$A\cos(\omega_1 T)\sin(\omega_1 t) + A\sin(\omega_1 T)\cos(\omega_1 t) + B\cos(\omega_2 T)\sin(\omega_2 t) + B\sin(\omega_2 T)\cos(\omega_2 t) = \\ = A\sin\omega_1 t + B\sin\omega_2 t, \quad \forall t.$$

si y solo si

$$A\cos(\omega_1 T) = A,\ A\sin(\omega_1 T) = 0, \quad B\cos(\omega_2 T) = B,\ B\sin(\omega_2 T) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(\omega_1 T) = 1,\ \sin(\omega_1 T) = 0, \quad \cos(\omega_2 T) = 1,\ \sin(\omega_2 T) = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega_1 T = 2k_1\pi, \quad \omega_2 T = 2k_2\pi, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{Z} - \{0\} \Leftrightarrow \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\omega_2 T}{\omega_1 T} = \frac{k_2}{k_1} \in \mathbb{Q}$$

Además, $k_2/k_1 = n_2/n_1$ con mcd(n_1, n_2)=1, por tanto

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow \text{ existe } r \in \mathbb{R} : \frac{\omega_1}{n_1} = \frac{\omega_2}{n_2} = r,$$

por lo que el período es

$$T = 2\frac{n_1}{\omega_1}\pi = 2\frac{n_2}{\omega_2}\pi = \frac{2\pi}{r}.$$

Si no hubiéramos tomado la fracción irreducible de k_2/k_1 se obtendría como período un múltiplo entero de esta T, lo que no es apropiado pues se toma siempre el período como el menor $T > 0$ posible. □

Ejemplos:

1. $x(t) = 2\sin 4t + 5\sin 6t$ es periódica porque $\omega_2/\omega_1 = 6/4 = 3/2 \in \mathbb{Q}$, $n_2 = 3$, $n_1 = 2$ y por tanto, como $r = 6/3 = 4/2 = 2$ su periodo es $T = \pi$.
2. $x(t) = \sin 3\sqrt{2}t + 4\sin 9\sqrt{2}t$ es periódica porque $\omega_2/\omega_1 = 9\sqrt{2}/(3\sqrt{2}) = 3/1 \in \mathbb{Q}$, $n_2 = 3$, $n_1 = 1$ y como $r = (9\sqrt{2})/3 = (3\sqrt{2})/1 = 3\sqrt{2}$, el periodo es $T = 2\pi/(3\sqrt{2})$.
3. $x(t) = \sin 3t + 3\sin\sqrt{2}t$ no es periódica porque $\omega_2/\omega_1 = \sqrt{2}/3 \notin \mathbb{Q}$.

7. Ejercicios propuestos

1. Representa esquemáticamente $x(t) = 2\sin\left(3t - \frac{\pi}{2}\right)$.
2. Si $x(t) = -\cos t + 3\sin t$, ¿Cuáles son la amplitud y la fase de la oscilación? Hacer un bosquejo de la función.
3. Consideremos una partícula moviéndose alrededor de un círculo, con su posición designada por el ángulo θ. Si se supone que su velocidad angular $d\theta/dt$ es constante y la denotamos $\omega = d\theta/dt$, demostrar que tanto la componente x de la posición de la partícula como la componente y siguen movimientos armónicos simples, donde la constante ω se mide en radianes por unidad de tiempo.
4. Considérese un sistema masa-resorte inicialmente en reposo en la posición x_0. Demostrar que los desplazaminetos máximos y mínimos se producen a mitad de camino entre los tiempos en los que la masa pasa por su posición de equilibrio.
5. Se encontró experimentalmente que cuando se ancla una bola metálica de masa 40 gr a un resorte vertical en reposo, este se estira 13 cm.
   (a) ¿Cuál es la constante del resorte?
   (b) Si se tira de la bola hacia abajo hasta 5 cm por debajo de la posición de equilibrio y se suelta, establezca una ecuación diferencial y unas condiciones iniciales asociadas que describan el movimiento.
   (c) Encuentre la posición de la bola como una función del tiempo
   (d) Determine la posición, velocidad y aceleración de la bola medio segundo segundo después de haberse soltado.
6. Una partícula parte del reposo a una distancia de 10 cm de un punto fijo O. Se mueve a lo largo de una recta horizontal hacia O bajo la influencia de una fuerza de atracción en O. Esta fuerza en cualquier tiempo varía con la distancia de la partícula a O. Si la aceleración de la partícula es 9 cm/s^2 dirigida hacia O cuando la partícula está a 1 cm de O, describa el movimiento.

7. Un objeto (de masa desconocida) se coloca en un resorte (de constante desconocida) vertical, comprimiéndolo 2.5 cm ¿Cuál es la frecuencia natural de oscilación de este sistema masa-resorte?

8. Determinar el movimiento de un sistema masa-resorte subamortiguado, el cual parte de su posición de equilibrio a una velocidad v_0. ¿Cuál es la amplitud de la oscilación?

9. Demostrar que en los sistemas masa-resorte subamortiguados la razón entre dos desplazamientos localmente máximos es constante.

10. Se encontró experimentalmente que cuando se ancla una bola metálica de masa 12 gr a un resorte vertical en reposo, este se estira 4 cm.

    (a) Si consideramos que sobre el mismo sistema masa-resorte vertical actúa una fuerza de rozamiento lineal con coeficiente de fricción $c = 0.6$, establezca la ecuación diferencial que describe el movimiento de dicho sistema a lo largo del tiempo. ¿Es un sistema sub o sobreamortiguado?

    (b) Si la bola se estira hasta llegar a los 5 cm y se impulsa hacia arriba con una velocidad de 8 cm/s, hallar la función que describe la posición de la bola en cualquier instante de tiempo. Esbozar una gráfica de dicha función. ¿La bola vuelve a pasar por el punto de equilibrio del sistema en algún momento?

11. Si $c < 0$ la fuerza se denomina de fricción negativa.

    (a) En este caso, demostrar que $x \to \infty$ cuando $t \to \infty$.

    (b) Mostrar gráficamente la solución si además $c^2 < 4mk$.

12. Asumiendo que la fricción es extremadamente grande ($c^2 >> 4mk$).

    (a) Si la masa está inicialmente en $x = 0$ con velocidad positiva, representa, aproximadamente, la gráfica de la solución que es esperable bajo razonamiento físico.

    (b) Estima las raíces de la ecuación característica.

    (c) Basándote en el apartado anterior dibuja la solución aproximada. ¿Cuál es aproximadamente la amplitud máxima?

13. (a) Usando el wxMaxima determinar el movimiento de un sistema masa-resorte sobreamortiguado con $m = 1,\ k = 1,\ c = 3$, que satisfacen las condiciones iniciales $x(0) = 1$ y $x'(0) = v_0$ para varias velocidades iniciales v_0 negativas.

    (b) Estimar la velocidad crítica.

    (c) Comparar los resultados que se obtienen con valores de v_0 cercanos a la velocidad crítica.

14. Considérese un sistema masa-resorte sin fricción, de masa $m = 20$ gr y constante del resorte $k = 0.8$ kg/s^2, que inicialmente está inicialmente en reposo en su punto de equilibrio. Supóngase que en el instante inicial sobre dicho sistema comienza a actuar la fuerza externa $F(t) = \cos(2t)$.

    (a) Establezca la ecuación diferencial que describe el movimiento de dicho sistema a lo largo del tiempo con sus correspondientes valores iniciales.

    (b) Resolver el problema de valor inicial del apartado anterior.

    (c) Dibujar la solución obtenida a lo largo del tiempo. ¿La fuerza externa y el sistema masa-resorte están en resonancia?

15. Consideremos un sistema masa-resorte con fricción lineal y forzado, donde la fuerza externa es periódica $F(t) = B\cos\omega_0 t$ siendo B y ω_0 conocidos. Si $c^2 << 4mk$, demostrar que para tiempos grandes la oscilación obedece, aproximadamente, las siguientes afirmaciones.

    (a) Si la frecuencia de la fuerza es menor que la frecuencia natural ($\omega_0 < \sqrt{k/m}$), entonces la masa oscila "*en fase*" con la función fuerza (es decir, cuando la función fuerza tiene un máximo el estiramiento del resorte también tiene un máximo y viceversa).

    (b) Si la frecuencia de la fuerza es mayor que la frecuencia natural ($\omega_0 > \sqrt{k/m}$), entonces la masa oscila "*180 grados desfasada*" respecto a la función fuerza (es decir, cuando la función fuerza es máxima el resorte tiene su máxima compresión y viceversa).

16. Se encontró experimentalmente que cuando se ancla una bola metálica de masa 10 gr a un resorte vertical en reposo, este se estira 98 mm en el vacío. (Nota: tomar la aceleración de la gravedad como $g = 9.8$ m/s^2)

    (a) Se tira la bola hacia abajo hasta 0.5 mm por debajo de la posición de equilibrio y se suelta. Establezca el modelo diferencial que describe la posición de la bola en función del tiempo y resuélvalo. ¿Seguirá la bola un movimiento armónico simple? Esboce la solución.

    (b) Suponga que en lugar de lo anterior, cuando el sistema está en reposo se le aplica una fuerza externa al sistema $F(t) = 2\sin(10t)$. Establezca el modelo diferencial que describe la posición de la bola en función del tiempo y resuélvalo. ¿Seguirá la bola un movimiento armónico simple? ¿Hay resonancia? Esboce la solución.

8. Bibliografía

[1] W. E. Boyce, R. C. DiPrima, *Elementary differential equations and boundary value problems*, Ed. John Wiley and Sons, 2001.

[2] S. J. Farlow, *An introduction to differential equations and their applications*, Dover Publ. Inc., 1994.

[3] R. Haberman, *Mathematical models: mechanical vibrations, population dynamics and traffic flow*, SIAM, 1998.

[4] M. R. Spiegel, *Ecuaciones diferenciales aplicadas*, Prentice-Hall Hispanoamericana, 1983.