

# TEMA 6.- SISTEMAS AUTÓNOMOS: CICLOS LÍMITE Y ATRACTORES EXTRAÑOS

## CONTENIDOS

1 SISTEMAS AUTÓNOMOS . . . . .	1
2 ESTUDIO CUALITATIVO DE LOS SISTEMAS AUTÓNOMOS . . . . .	1
2.1 Estabilidad de los puntos críticos . . . . .	2
3 MODELOS DE DINÁMICA DE POBLACIONES . . . . .	2
3.1 Evolución de dos especies competidoras . . . . .	2
3.2 Modelo de presa-depredador (Lotka-Volterra) . . . . .	7
3.3 Presa-depredador con crecimiento logístico . . . . .	8
4 CICLOS LÍMITE . . . . .	9
4.1 La ecuación de Van der Pol . . . . .	11
5 ATRACTORES EXTRAÑOS Y CAOS . . . . .	12
6 ANEXO: ESTABILIDAD DE PROBLEMAS AUTÓNOMOS ESCALARES . . . . .	14
7 ANEXO: ESTABILIDAD DE SISTEMAS DE DIMENSIÓN 2 . . . . .	16
7.1 Expresión matricial de la solución general de los sistemas lineales . . . . .	16
7.2 Expresión vectorial para sistemas lineales de dimensión 2 . . . . .	17
7.3 Diagrama de fases . . . . .	18
7.4 Estabilidad de problemas lineales de dimensión 2 . . . . .	20
7.5 Estabilidad de problemas no lineales de dimensión 2 . . . . .	21
7.6 Estabilidad de problemas lineales de dimensión $n$ . . . . .	22
8 EJERCICIOS PROPUESTOS . . . . .	23
9 BIBLIOGRAFÍA . . . . .	24

## 1. SISTEMAS AUTÓNOMOS

Consideremos el sistema diferencial autónomo de primer orden

$$\frac{d}{dt}X = F(X), \quad X, F \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Resolver directamente este problema (1) en general es prácticamente imposible por lo que, como es habitual, se comienza estudiando los problemas lineales de coeficientes constantes, de los que podemos obtener expresiones explícitas de las soluciones. En el caso de los problemas no lineales, la mejor forma de abordarlos en la práctica es, en primer lugar, estudiar el comportamiento de las posibles soluciones a partir de la propia ecuación (*estudio cualitativo*) y, con esta información, diseñar el método numérico apropiado para conseguir aproximaciones a dichas soluciones (*estudio cuantitativo*).

## 2. ESTUDIO CUALITATIVO DE LOS SISTEMAS AUTÓNOMOS

Una de las características más importantes de estos problemas autónomos, a diferencia de los no autónomos, es que en estos problemas los puntos críticos o de equilibrio van a jugar un papel fundamental a la hora de analizar sus soluciones.

Si existe, un punto  $X_e \in \mathbb{R}^n$  se llama **punto de equilibrio o punto crítico** del sistema, si  $F(X_e) = 0$ . La primera consecuencia importante de que tengamos un punto crítico  $X_e$  es que la función constante  $X = X_e$  es una *solución estacionaria del sistema*. La segunda es que los puntos críticos van a determinar el comportamiento asintótico (es decir, cuando  $t \rightarrow \infty$ ) de las otras soluciones del sistema.

**Teorema 1** Sea  $X = X(t)$  una solución del sistema (1).

1. Si  $X(t) \rightarrow X_0$  cuando  $t \rightarrow t_0 \in \mathbb{R}$  y  $X(t) \neq X_0$ , entonces  $F(X_0) \neq 0$ . En consecuencia, si una solución tiende a un punto crítico lo hará en tiempo infinito.
2. Si  $X(t) \rightarrow X_0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , entonces  $F(X_0) = 0$ . Por tanto, si una solución tiene límite cuando  $t \rightarrow \infty$ , necesariamente dicho límite es un punto crítico.

En el caso particular de los problemas lineales de coeficientes constantes,  $F(X) = AX$ , donde  $A$  es una matriz de dimensión  $n$ , el origen  $X = 0$  siempre es un punto crítico. Además, si  $\det A \neq 0$ , entonces el origen es el único punto crítico del sistema. Cuando el problema es no lineal puede tener o no puntos críticos.

## 2.1 Estabilidad de los puntos críticos

Se dice que  $X_e$  es un punto crítico **estable** si dado  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que cualquier solución  $X(t)$  del sistema (1) que para  $t = 0$  verifica

$$\|X(0) - X_e\| < \delta$$

existe para todo  $t > 0$  y verifica

$$\|X(t) - X_e\| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0$$

Se dice que  $X_e$  es un punto crítico **asintóticamente estable** si es estable y existe  $\delta_0 > 0$  con  $0 < \delta_0 < \delta$ , tal que cualquier solución  $X(t)$  del sistema (1) que verifica

$$\|X(0) - X_e\| < \delta$$

se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = X_e$$

Se dice que  $X_e$  es un punto crítico **inestable** si no es estable.

En otras palabras,  $X_e$  es estable si cualquier solución  $X$  que arranca suficientemente cerca del punto crítico, se mantendrá cerca de dicho punto para todo  $t$ . Será asintóticamente estable si, además, estas soluciones tienden a dicho punto de equilibrio. El punto  $X_e$  será inestable en cualquier otro caso.

El estudio de la estabilidad de los puntos críticos de los sistemas autónomos de dimensión  $n$  general es muy complejo. En el caso particular de los sistemas autónomos de dimensión 1 y 2 sí que podemos aprovechar las ecuaciones para saber cómo van a ser sus soluciones, aproximadamente. Esto se estudia en la asignatura Ecuaciones Diferenciales II del tercer curso del Grado. Para aquel estudiante que no haya cursado dicha asignatura, he incluido en el Apéndice un resumen de los resultados principales necesarios para seguir este tema. En el curso OCW también se incluyen unos vídeos de corta duración en los que se explica cómo se trazan los diagramas de fase de los sistemas lineales de dimensión 2.

## 3. MODELOS DE DINÁMICA DE POBLACIONES

Los modelos de dinámica de poblaciones son aplicados con frecuencia en muchos campos de la biología matemática y son un gran foco de problemas interesantes desde el punto de vista matemático. Como ya he dicho, las herramientas que hay que usar para abordar el estudio cualitativo de modelos de evolución de dos especies son conocidas por la mayor parte del estudiantado que aborda esta asignatura. Por ello, introducimos los siguientes modelos insistiendo más en cómo se construyen y qué conclusiones se pueden extraer de ellos.

### 3.1 Evolución de dos especies competidoras

En este modelo se considera la evolución de las poblaciones  $x$  e  $y$  en el tiempo  $t$  de dos especies que compiten por los mismos recursos, por ejemplo, la cantidad de comida disponible. Si cada una evolucionara sin la presencia de la otra con unos recursos limitados, su crecimiento estaría gobernado por un modelo logístico (Tema 4)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(\epsilon_1 - \sigma_1 x) \\ \frac{dy}{dt} &= y(\epsilon_2 - \sigma_2 y) \end{aligned} \tag{2}$$

respectivamente, donde  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  serían las ratios de crecimiento de cada una de ellas y las capacidades de soporte serían  $\epsilon_1/\sigma_1$  y  $\epsilon_2/\sigma_2$ . Sin embargo, al competir ambas por los mismos recursos, el aumento de individuos de una especie influye negativamente en la evolución de la otra. En concreto, el aumento de una especie reduce las ratios de crecimiento y los niveles de saturación de la otra. La forma más simple de modelizar esto es cambiar en la ecuación de  $x'$  en (2) el factor de crecimiento ( $\epsilon_1 - \sigma_1 x$ ) por ( $\epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y$ ), donde el nuevo parámetro  $\alpha_1 > 0$  mide el grado de influencia que tiene la presencia de la especie  $y$  en el crecimiento de la  $x$ . Actuando de forma similar sobre la ecuación de  $y'$ , se obtiene el *modelo competitivo*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(\epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y) \\ \frac{dy}{dt} &= y(\epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x) \end{aligned} \tag{3}$$

donde todos los parámetros que aparecen son positivos y dependen de las especies particulares que estemos tratando, y en el que tendremos que estudiar cómo evolucionan  $x$  e  $y$  a lo largo del tiempo siempre que  $x \geq 0, y \geq 0$ .

**Ejercicio 1:** estudiar el comportamiento cualitativo de las soluciones del modelo (3) en los siguientes casos:

**Caso 1:**  $\epsilon_1 = 1, \sigma_1 = 1, \alpha_1 = 1, \epsilon_2 = 0.75, \sigma_2 = 1, \alpha_2 = 0.5$ .

**Caso 2:**  $\epsilon_1 = 1, \sigma_1 = 1, \alpha_1 = 1, \epsilon_2 = 0.5, \sigma_2 = 0.25, \alpha_2 = 0.75$ .

**Caso 1:** queremos estudiar el sistema

$$x' = f(x, y) = x(1 - x - y), \quad y' = g(x, y) = y(0.75 - y - 0.5x) \tag{4}$$

Este sistema tiene cuatro puntos críticos  $P_1 = (0, 0), P_2 = (0.0.75), P_3 = (1, 0)$  y  $P_4 = (0.5, 0.5)$  que es el corte de las dos rectas *isoclinas*

$$1 - x - y = 0, \quad 0.75 - y - 0.5x = 0. \tag{5}$$

Para estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones cerca de estos puntos, tenemos que linealizar el sistema alrededor de cada uno de ellos, calculando la matriz jacobiana,

$$J(x, y) = \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} 1 - 2x - y & -x \\ -0.5y & 0.75 - 2y - 0.5x \end{pmatrix}.$$

Evaluándolo en el primer punto crítico  $P_1(0, 0)$ , sale directamente  $J(P_1) = \text{diag}(1, 0.75)$ . Así que tiene dos autovalores reales positivos distintos y, por tanto, el origen es un nodo inestable en el problema linealizado  $U' = J(P_1)U$ . En este caso, sabemos que el punto  $P_1$  en el no lineal también en un nodo inestable, es decir, cualquier solución que arranque en valores iniciales  $(x_0, y_0)$  cerca del origen se va a alejar de él cuando  $t > 0$ .

Si hacemos lo mismo con el punto  $P_2(0, 0.75)$  la jacobiana es

$$J(0, 0.75) = \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 \\ -0.375 & -0.75 \end{pmatrix},$$

que, al ser triangular, tiene sus autovalores en la diagonal, 0.25 y -0.75, por lo que en el linealizado tenemos un punto de silla en el origen, lo que sabemos que también "hereda" el problema no lineal. También sale triangular  $J(1, 0)$  por lo que el punto  $P_3$  es un punto de silla del sistema no lineal.

Para el punto  $P_4 = (0.5, 0.5)$  tenemos

$$J(0.5, 0.5) = \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} -0.5 & -0.5 \\ -0.25 & -0.5 \end{pmatrix},$$

En este caso, podemos calcular directamente sus autovalores o bien podemos usar la regla del determinante y la traza. Como

$$D = \det J(0.5, 0.5) = 0.125, \quad T = \text{tr} J(0.5, 0.5) = -1 < 0, \quad T^2 - 4D = 0.5 > 0,$$

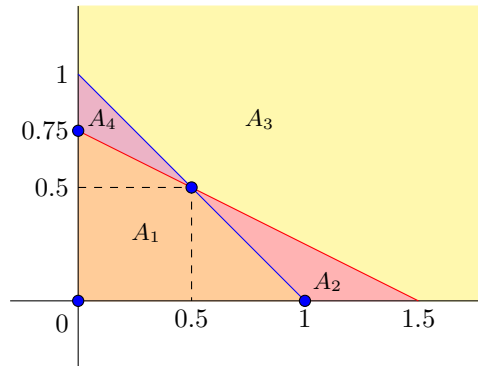
el origen es un nodo asintóticamente estable (o sumidero) en el problema linealizado y, en consecuencia,  $P_4$  también es un nodo asintóticamente estable del problema (4).

Por tanto, conocemos el comportamiento asintótico de las soluciones que pasan cerca de los puntos críticos pero necesitamos más información para hacer un buen diagrama de fases que nos dé una idea de cómo van a ser las soluciones de este sistema.

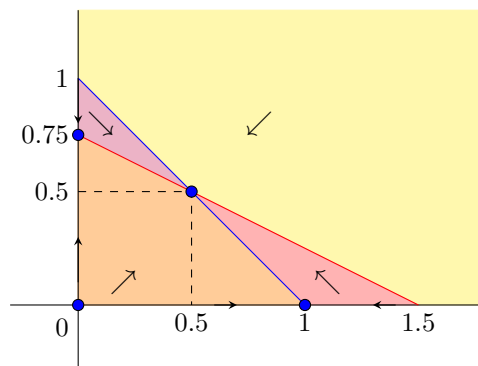
Cuando se estudian sistemas lineales, como solo se tiene al origen como punto crítico, el cálculo de los autovectores de la jacobiana ayuda mucho a visualizar el diagrama de fases. Sabemos que, excepto en el caso de tener autovalores dobles o imaginarios puros, el diagrama alrededor de cada punto crítico es "parecido" al diagrama alrededor del origen en el problema linealizado correspondiente (ver Teorema 6 en el Anexo), por lo que en este caso es útil calcular los autovectores de estas jacobianas. Ahora bien, no hay que olvidar que el linealizado es una aproximación limitada del problema no lineal, por lo que las curvas en el diagrama del no lineal pueden sufrir "deformaciones" respecto a las del lineal.

En la práctica, en muchos de estos problemas no es necesario el cálculo de los autovectores para tener una idea cualitativamente clara del comportamiento de las soluciones, sino que basta un estudio de las isoclinas (5).

Estas isoclinas determinan el campo de direcciones de este sistema y, como consecuencia, su diagrama de fases. Nunca hay que olvidar que el sistema (3) nos da las derivadas de la solución o, lo que es lo mismo, el vector velocidad de la curva solución del sistema (o *curva integral*) que pasa por cada punto del plano. Como  $x$  e  $y$  representan poblaciones, solo tiene sentido determinar el diagrama de fases en el primer cuadrante  $x \geq 0, y \geq 0$ , así que lo primero que hacemos es dibujar estas isoclinas en dicho cuadrante.

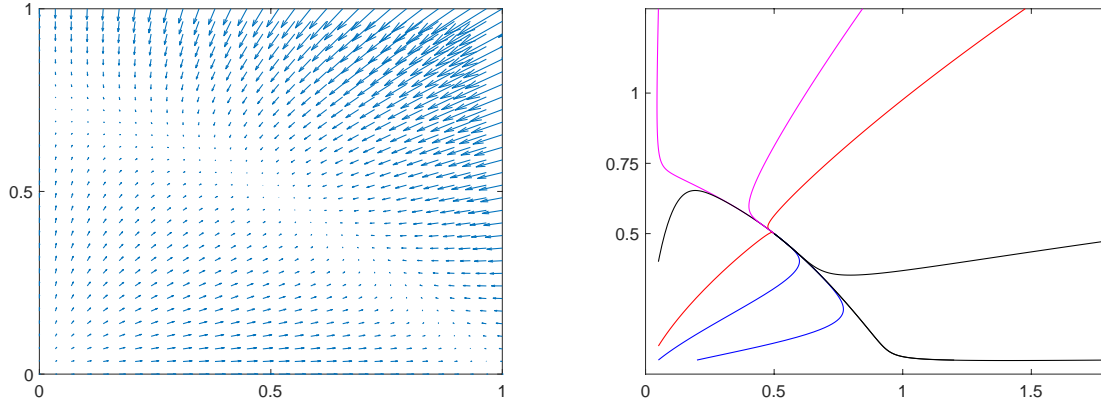


Como podemos observar, las isoclinas dividen al cuadrante en cuatro áreas diferenciadas. Para cada  $(x, y)$  en una de estas áreas el signo de  $x'$  e  $y'$  es el mismo, por lo que podemos saber qué dirección tienen los vectores  $\vec{v} = (x', y')$  tangentes a las curvas integrales del sistema (3). Si  $(x, y) \in A_1$  se tiene que  $y < 1 - x, y < 0.75 - 0.5x$ , por lo que  $x' > 0, y' > 0$  y por tanto los vectores tangentes tienen dirección "hacia la derecha y hacia arriba" (o " $\nearrow$ "). Si  $(x, y) \in A_2$ , se sigue teniendo  $y < 0.75 - 0.5x$  pero ahora  $y > 1 - x$  por lo que  $\vec{v}$  va a tener una dirección " $\nwarrow$ ". Haciendo el mismo estudio para  $A_3$  llegamos a que en esa área los vectores van en dirección " $\swarrow$ ", mientras que en  $A_4$  van " $\searrow$ ". Además, como en  $P_2$  y  $P_3$  son puntos de silla, también debemos saber qué ocurre sobre los ejes coordenados. En el eje  $y = 0$  tenemos que  $\vec{v} = (x(1 - x), 0)$  por lo que si  $x < 1$  la dirección de  $\vec{v}$  es " $\rightarrow$ " mientras que es " $\leftarrow$ " si  $x > 1$ . En el eje  $x = 0$  se tienen  $\vec{v} = (0, y(0.75 - y))$  así que si  $y < 0.75$  va en dirección " $\uparrow$ " y si  $y > 0.75$  va " $\downarrow$ ".



Con toda esta información, ya podemos visualizar cómo va a ser la dinámica de las soluciones del sistema (4).

Actualmente, para tener una idea aún más clara podemos hacer uso de un programa como el Matlab, Maxima o Maple, que tienen comandos especiales para hacer campos de vectores y diagramas de fase. Por ejemplo, con Matlab podemos construir el siguiente campo de vectores de (4) y el diagrama de fases correspondiente, aproximando numéricamente varias curvas integrales representativas.

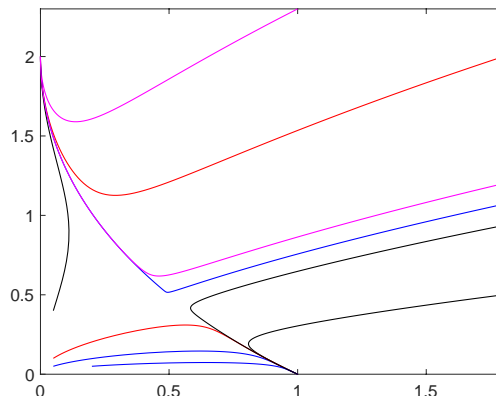


Para interpretar este diagrama en términos poblacionales, hay que entender que  $x$  e  $y$  representan el número de, por ejemplo, decenas o miles de individuos de cada especie. Por tanto, podemos concluir que ambas poblaciones van a tender al punto de equilibrio  $(0.5, 0.5)$ , es decir, van a poder coexistir en el tiempo. En el diagrama vemos varias zonas interesantes. Por ejemplo, cuando una de las dos es casi nula y la otra no muy numerosa, la primera crece lentamente mientras que la segunda evoluciona con rapidez hasta un cierto momento en que la presencia de la primera empieza a reducir los recursos disponibles. En dicho momento la segunda empieza a decrecer hasta que ambas poblaciones se nivelan en el punto de equilibrio. En cambio, si una tiene una población mucho mayor que la del caso de coexistencia, terminará reduciendo su población a lo largo del tiempo.

**Caso 2:** Podemos aplicar unas técnicas similares al segundo sistema

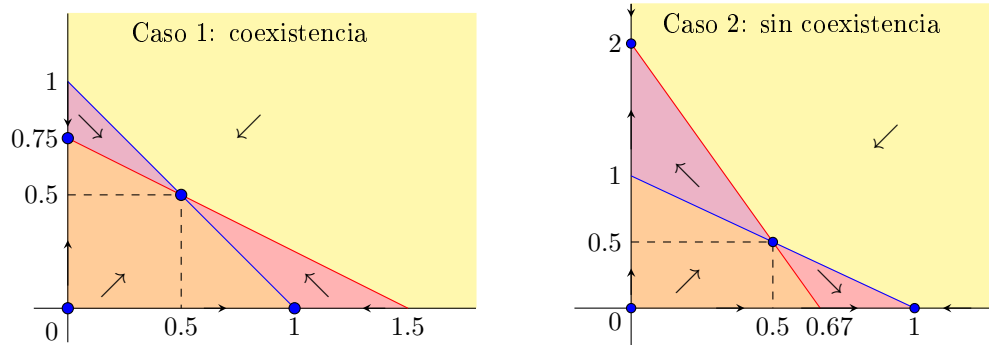
$$x' = f(x, y) = x(1 - x - y), \quad y' = g(x, y) = y(0.5 - 0.25y - 0.75x) \tag{6}$$

De nuevo, hay cuatro puntos de equilibrio  $P_1 = (0, 0)$ ,  $P_2 = (0, 2)$ ,  $P_3 = (1, 0)$  y  $P_4 = (0.5, 0.5)$  que es el punto de corte de las isoclinas. Sin embargo, cuando se estudia la matriz jacobiana sobre estos puntos se ve que su carácter es bastante diferente.  $P_1$  sigue siendo un nodo inestable pero  $P_2$  y  $P_3$  ahora son nodos asintóticamente estables y  $P_4$  es un punto de silla. Con esto ya podemos suponer que no es posible que en este caso las especies coexistan ya que, dependiendo de los valores iniciales, unas soluciones se acercarán al punto  $P_2$  (la primera especie desaparece) y otras se acercarán a  $P_3$  (la que desaparece es la segunda). En otras palabras, sobrevivirá la especie más numerosa inicialmente pero la otra desaparecerá. Igual que en el caso anterior, con Matlab podemos construir el correspondiente diagrama de fases:



Así que vemos que de la elección de los coeficientes del problema (3) va a depender que haya coexistencia de las dos especies o que no sea posible y una desaparezca. En cada caso particular, estos coeficientes dependen tanto de las especies que se consideran como del entorno donde habitan, de sus recursos y de la competencia que una se haga a la otra.

Desde el punto de vista analítico se puede determinar en qué caso de los dos posibles estamos, si en el caso de la coexistencia o en el de la eliminación de una de las especies. Se puede ver que una forma fácil de distinguirlo es comparar los gráficos de las isoclinas:



Para ver que estas son las dos posibilidades que se pueden dar y saber exactamente qué situación va a llevar a una u a otra, hay que hacer un estudio cualitativo del sistema (3) en general. Estudiando los puntos críticos para valores  $\alpha_i, \varepsilon_i, \sigma_i$  positivos cualesquiera, es fácil ver que hay cuatro puntos críticos

$$P_1 = (0, 0), \quad P_2 = (0, \varepsilon_2/\sigma_2), \quad P_3 = (\varepsilon_1/\sigma_1, 0), \quad P_4 = (A, B)$$

donde  $P_4$  es el punto de corte de las isoclinas, de componentes

$$A = \frac{\alpha_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sigma_2}{\alpha_1 \alpha_2 - \sigma_1 \sigma_2}, \quad B = \frac{\alpha_2 \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \sigma_1}{\alpha_1 \alpha_2 - \sigma_1 \sigma_2}, \quad \text{siempre que } \alpha_1 \alpha_2 \neq \sigma_1 \sigma_2 \text{ y } A > 0, B > 0.$$

Para que esto se verifique pueden pasar dos cosas:

$$\text{Si } \alpha_1 \alpha_2 < \sigma_1 \sigma_2 : \quad A > 0, B > 0 \Leftrightarrow \frac{\varepsilon_1}{\alpha_1} > \frac{\varepsilon_2}{\sigma_2} \text{ y } \frac{\varepsilon_1}{\sigma_1} < \frac{\varepsilon_2}{\alpha_2} \quad \text{(Caso 1)}$$

$$\text{Si } \alpha_1 \alpha_2 > \sigma_1 \sigma_2 : \quad A > 0, B > 0 \Leftrightarrow \frac{\varepsilon_1}{\alpha_1} < \frac{\varepsilon_2}{\sigma_2} \text{ y } \frac{\varepsilon_1}{\sigma_1} > \frac{\varepsilon_2}{\alpha_2} \quad \text{(Caso 2)}$$

Veamos el carácter de estos puntos críticos. La matriz jacobiana evaluada en los tres primeros es muy simple:

$$J(P_1) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \quad J(P_2) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 - \alpha_1 \varepsilon_2 / \sigma_2 & 0 \\ -\alpha_2 \varepsilon_2 / \sigma_2 & -\varepsilon_2 \end{pmatrix}, \quad J(P_3) = \begin{pmatrix} -\varepsilon_1 & -\alpha_1 \varepsilon_1 / \sigma_1 \\ 0 & \varepsilon_2 - \alpha_2 \varepsilon_1 / \sigma_1 \end{pmatrix},$$

por lo que sus autovalores salen directamente de las diagonales. En el caso de  $P_4$ ,

$$J(P_4) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 - 2\sigma_1 A - \alpha_1 B & -\alpha_1 A \\ -\alpha_2 B & \varepsilon_2 - 2\sigma_2 B - \alpha_2 A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma_1 A & -\alpha_1 A \\ -\alpha_2 B & -\sigma_2 B \end{pmatrix}$$

pues  $\varepsilon_1 - \sigma_1 A - \alpha_1 B = 0$  y  $\varepsilon_2 - \sigma_2 B - \alpha_2 A = 0$ . Para aplicar el criterio del determinante y la traza, obtenemos que

$$D = (\sigma_1 \sigma_2 - \alpha_1 \alpha_2) AB, \quad T = -\sigma_1 A - \sigma_2 B < 0,$$

por lo que

$$T^2 - 4D = (\sigma_1 A + \sigma_2 B)^2 - 4(\sigma_1 \sigma_2 - \alpha_1 \alpha_2) AB = (\sigma_1 A - \sigma_2 B)^2 + 4\alpha_1 \alpha_2 AB > 0$$

en cualquier caso.

Por tanto, en todos los casos  $P_1$  es un nodo asintóticamente estable. En cambio, el carácter de los otros tres puntos cambia según estemos en el Caso 1 o en el Caso 2:

**Caso 1:**  $\varepsilon_1 - \alpha_1\varepsilon_2/\sigma_2 > 0$ ,  $\varepsilon_2 - \alpha_2\varepsilon_1/\sigma_1 > 0$ ,  $D > 0$ ,  $T < 0$ ,  $T^2 - 4D > 0$  implican que  $P_2$  y  $P_3$  son puntos de silla y  $P_4$  es un nodo asintóticamente estable, por lo que habrá coexistencia de las dos especies.

**Caso 2:**  $\varepsilon_1 - \alpha_1\varepsilon_2/\sigma_2 < 0$ ,  $\varepsilon_2 - \alpha_2\varepsilon_1/\sigma_1 < 0$ ,  $D < 0$ ,  $T < 0$ ,  $T^2 - 4D > 0$  por lo que  $P_2$  y  $P_3$  son nodos asintóticamente estables y  $P_4$  es un punto de silla, lo que lleva a que no sea posible la coexistencia de las dos especies.

En el caso  $\alpha_1\alpha_2 = \sigma_1\sigma_2$  tendríamos que, o bien no hay corte de las isoclinas (cuando  $\alpha_1\varepsilon_2 \neq \varepsilon_1\sigma_2$ ), o bien las dos isoclinas son iguales (si  $\alpha_1\varepsilon_2 = \varepsilon_1\sigma_2$ ) y las dos especies aumentarían proporcionalmente una a la otra, por lo que el modelo realmente no estaría simulando el caso de dos especies que compiten. Por ello, ambos casos carecen de interés práctico.

### 3.2 Modelo de presa-depredador (Lotka-Volterra)

El modelo de Lotka-Volterra describe la evolución de dos especies en el caso de que una de las especies (*depredador*) se alimente de la otra (*presa*) como, por ejemplo, si se considera que en un bosque limitado conviven una población de conejos ( $x(t)$ ) y otra de lobos ( $y(t)$ ). Además, para construir el modelo se hacen las siguientes suposiciones:

1. Cuando no hay depredadores, las presas crecen de forma *malthusiana*, es decir, si  $y = 0$ , se tiene  $x' = ax$ ,  $a > 0$ .
2. Cuando no hay presas los depredadores mueren, por lo que si  $x = 0$ , se tendrá  $y' = -cy$ ,  $c > 0$ .
3. El número de veces que se encuentran los depredadores con presas es proporcional al producto de sus poblaciones. Como cada vez que se encuentran hay ciertas posibilidades de que los depredadores se alimenten y de que algunas presas mueran, la velocidad de aumento de la población de depredadores será de la forma  $\gamma xy$ ,  $\gamma > 0$ , mientras que la ratio de crecimiento de las presas disminuirá como  $-\alpha xy$ ,  $\alpha > 0$ .

Así el modelo más simple que refleja estas suposiciones es el **modelo de presa-depredador o de Lotka-Volterra**

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(a - \alpha y) \\ \frac{dy}{dt} &= y(-c + \gamma x) \end{aligned} \tag{7}$$

donde todas las constantes son positivas, lo que constituye un sistema de dos ecuaciones diferenciales no lineales. Además, de forma natural este sistema sólo tiene interés cuando  $x \geq 0, y \geq 0$ .

Claramente solo hay dos puntos críticos en el primer cuadrante,  $P_1 = (0, 0)$  y  $P_2 = (c/\gamma, a/\alpha)$ , que es el corte de las dos isoclinas  $y = a/\alpha$  y  $x = c/\gamma$ . La matriz jacobiana en ambos puntos resulta

$$J(P_1) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}, \quad J(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha c/\gamma \\ -\gamma a/\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que directamente sabemos que  $P_1$  es un punto de silla, tanto del problemas linealizado como del no lineal.

En cambio, en el caso de  $P_2$ ,  $D = ac > 0$ ,  $T = 0$ ,  $T^2 - 4D = -4ac < 0$  (los dos autovalores son imaginarios puros), por lo que tenemos que el origen es un centro estable en el problema linealizado  $U' = J(P_2)U$ , pero no podemos afirmar que  $P_2$  lo sea en el no lineal. El estudio del campo de vectores según las isoclinas ayuda a hacerse una idea del diagrama de fases pero en este caso no nos garantiza nada. Por eso hay que buscar otras herramientas para conocer cómo son las curvas integrales de (7) cerca de  $P_2$ .

Una de las herramientas que se suele usar, aprovechando que estamos trabajando con problemas autónomos es que la ecuación (7) nos da también el crecimiento de las curvas integrales entendiéndolas como curvas de la forma  $y = y(x)$ , esto es, las curvas verifican

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}} = \frac{x(a - \alpha y)}{y(-c + \gamma x)} \Leftrightarrow \frac{y dy}{a - \alpha y} = \frac{x dx}{-c + \gamma x},$$

lo que es una ecuación diferencial de variables separadas que al integrarse se obtiene

$$a \ln y - ay + c \ln x - \gamma x = C, \quad \forall C \in \mathbb{R},$$

y se demuestra que son curvas cerradas alrededor del punto  $P_2$ , por lo que este punto también es un centro estable para el problema (7).

Esto significa que este modelo predice que las dos poblaciones van a evolucionar de forma cíclica. Un ejemplo muy conocido que se vio que se ajustaba perfectamente a este modelo es el del censo de una especie de lince y una de liebre que la compañía Hudson Bay de Canadá realizó desde el año 1845 hasta 1935, con el que observaron que las poblaciones variaban periódicamente cada 9 ó 10 años.

Como en el modelo anterior, actualmente muchos programas informáticos son capaces de representar estas curvas. En Matlab es simple construir el diagrama de fases.

**Ejercicio 2:** estudiar el comportamiento cualitativo de las soluciones del modelo de Lotka-Volterra (7) en los siguientes casos:

1.  $a = 1, \alpha = 0.5, c = 0.75, \gamma = 0.25$ . Construimos con Matlab el diagrama de fases que se puede ver en la Fig. 1, donde se ven claramente los ciclos alrededor del punto de equilibrio (3,2) en el diagrama de fases.

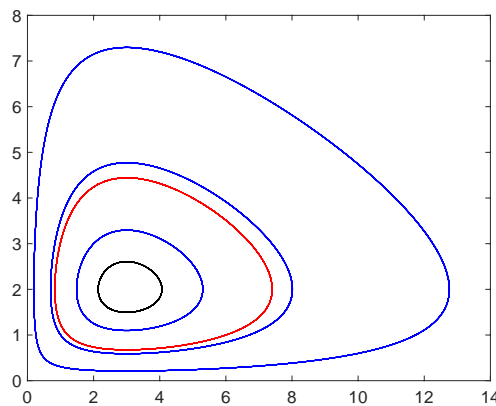


Figura 1: Diagrama de fase de (7) con  $a = 1, \alpha = 0.5, c = 0.75, \gamma = 0.25$

2.  $a = 1.5, \alpha = 0.5, c = 0.5, \gamma = 1$ .

### 3.3 Presa-depredador con crecimiento logístico

Un problema del modelo presa-depredador (7) es que si el depredador desapareciera por alguna causa, la presa crecería de forma exponencial. Una corrección de este modelo consiste en considerar que en dicho caso la presa evolucionaría siempre que se lo permitieran los recursos disponibles, es decir, siguiendo un modelo logístico:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(a - \sigma x - \alpha y) \\ \frac{dy}{dt} &= y(-c + \gamma x) \end{aligned} \tag{8}$$

Con las herramientas vistas en las secciones anteriores, el estudiante será capaz de esbozar el diagrama de fases de este modelo y de extraer conclusiones.

**Ejercicio 3:** estudiar el comportamiento cualitativo de las soluciones del modelo (8) en los mismos casos que el Ejercicio 2 anterior con  $\sigma = 0.5$ .



#### 4. CICLOS LÍMITE

Consideremos el sistema no lineal autónomo de dimensión 2

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y) \end{aligned} \tag{9}$$

donde las funciones  $f$  y  $g$  tienen derivadas parciales primeras continuas en el plano, lo que garantiza la existencia y unicidad de soluciones del sistema para cada valor inicial  $(x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, t_0 \in \mathbb{R})$  del plano.

Sabemos que si una solución de (9) tiende a un punto cuando  $t \rightarrow \infty$ , necesariamente es un punto crítico. En los problemas lineales, como solo hay un punto crítico, si es atractor atrae a todas las soluciones del sistema. Sin embargo, en los problemas no lineales aparece un fenómeno que ningún problema lineal puede reproducir: la aparición de algunas soluciones que también atraen o repelen a las curvas integrales próximas. Estas soluciones atractoras (que no son puntos críticos) van a ser necesariamente periódicas, como veremos, y se llaman *ciclos límite*.

Para detectar si hay ciclos límite en problemas no lineales (9) primero tenemos que estudiar la existencia de *soluciones periódicas* de dicho sistema. ¿Existe alguna solución  $X$  del sistema (9) y  $T > 0$  tal que  $X(t + T) = X(t)$  para todo  $t \geq 0$ ? ¿Existe alguna órbita cerrada en el plano de fases de (9)?

Aunque podríamos interpretar que las soluciones estacionarias  $X = X_e$ , donde  $X_e$  es un punto crítico, son soluciones periódicas de período  $T$ , para cualquier  $T > 0$ , en el estudio siguiente se entenderá que cuando hablamos de soluciones periódicas no incluimos a las soluciones de este tipo.

Una herramienta bastante útil para detectar soluciones periódicas es hacer el cambio de variables en polares<sup>1</sup>

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan(y/x).$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{dr}{dx} = \frac{x}{r}, \quad \frac{dr}{dy} = \frac{y}{r}, \quad \frac{d\theta}{dx} = -\frac{y}{r^2}, \quad \frac{d\theta}{dy} = \frac{x}{r^2},$$

aplicando la regla de la cadena obtenemos

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r} (xf(x, y) + yg(x, y)) \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r^2} (-yf(x, y) + xg(x, y))$$

por lo que el sistema (9) se transforma en un sistema

$$r' = \phi(r, \theta), \quad \theta' = \vartheta(r, \theta). \tag{10}$$

Evidentemente, si el estudio cualitativo de este sistema transformado (10) es más complejo que el del problema original (9), esta herramienta no es útil. Sin embargo, sí que es aplicable en el caso en el que  $\phi(r, \theta) = \phi(r)$ ,  $\vartheta(r, \theta) = \vartheta(\theta)$ , por lo que las dos ecuaciones están desacopladas y son autónomas. En ese caso, si existe un punto crítico  $r = r_0$  en la primera, se tiene que hay una solución periódica en (9), que es justamente la circunferencia de radio  $r_0$  del diagrama de fases. La solución de la ecuación en  $\theta$  fundamentalmente nos informará sobre el sentido en que se recorre dicha curva. También se suelen usar cambios de tipo elíptico.

Por ejemplo, si aplicamos esta transformación al sistema

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y) = x + y - x(x^2 + y^2) \\ y' &= g(x, y) = -x + y - y(x^2 + y^2) \end{aligned} \tag{11}$$

obtenemos el sistema transformado

$$r' = r(1 - r^2), \quad \theta' = -1.$$

Como  $r = 0, \pm 1$  son puntos críticos de la primera ecuación, el  $(0,0)$  es un punto crítico de (11) y la circunferencia de radio 1 ( $x^2 + y^2 = 1$ ) es una curva integral de (11) periódica. De la ecuación respecto  $\theta$ ,

<sup>1</sup>Suponemos  $x > 0, y > 0$  para hacer el cambio, pero hay que tener en cuenta que en algunos problemas esto hay que ajustarlo si  $(x, y)$  están en los otros cuadrantes del plano o sobre los ejes.

tenemos inmediatamente que  $\theta = -t + \theta_0$ , por lo que la circunferencia unidad se recorrerá en el sentido de las agujas del reloj y que su periodo es  $2\pi$ .

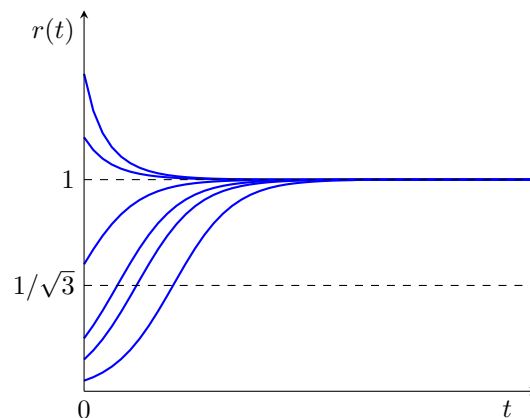
Una cuestión importante es diferenciar el concepto de solución periódica y de ciclo límite. Por ejemplo, sabemos que si la matriz del problema lineal  $X' = AX$  tiene dos autovalores imaginarios puros, todas las soluciones son periódicas (el origen es un centro), pero no tiene ningún ciclo límite. Estos solo aparecen en problemas no lineales.

Un **ciclo límite** es una trayectoria cerrada del plano de fases tal que las otras trayectorias no cerradas cercanas al ciclo giran en espiral hacia él, bien acercándose a o bien alejándose, indefinidamente cuando  $t \rightarrow \infty$ .

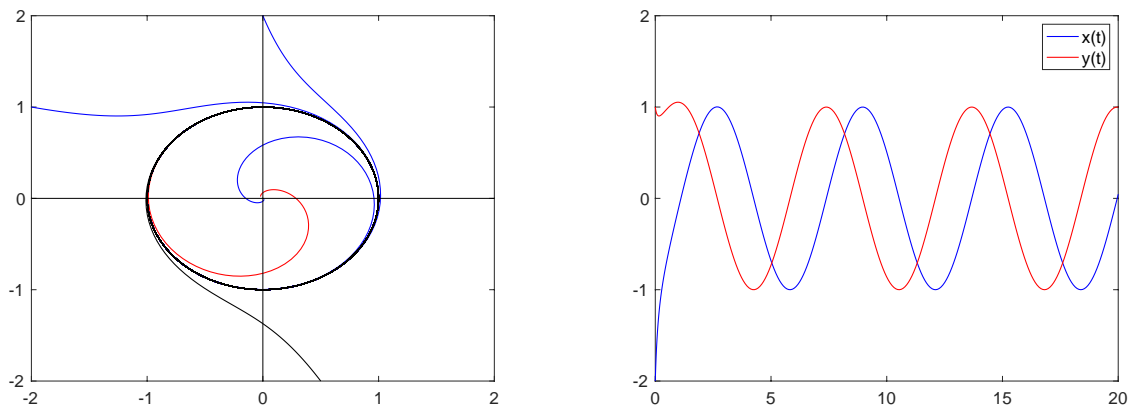
Al ser trayectorias cerradas, dividen el plano en dos "lados": el interior al ciclo y el exterior. Si todas las trayectorias no cerradas cercanas se acercan al ciclo límite, tanto las que arrancan dentro como fuera de él, el ciclo límite se dice **asintóticamente estable**. Si las trayectorias que arrancan en un "lado" del ciclo se acercan a él y las del otro "lado" se alejan, el ciclo se dice **semiestable**. Si todas las trayectorias cercanas por ambos lados se alejan en espiral de él, se dice que es **inestable**.

Cuando se tienen órbitas cerradas que no atraen ni repelen a ninguna otra, simplemente se dice que son *órbitas estables*.

En el ejemplo (11), podemos aprovechar el carácter del puntos crítico  $r = 1$  del problema transformado para saber si la circunferencia unidad es un ciclo límite y si es atractor o repulsor. Como la ecuación en  $r$  es autónoma de la forma  $r' = F(r)$ , se puede hacer un estudio cualitativo de sus soluciones, para  $r \geq 0$ , similar al que se hizo con la ecuación logística en un tema anterior (se incluye también un repaso de esto en el Anexo). Analizando el signo de  $F(r)$  y de  $r'' = F'(r)F(r)$  se puede esbozar cómo serán sus soluciones.



En consecuencia, se ve claramente que  $r = 0$  es un punto repulsor y  $r = 1$  es atractor del problema transformado, por lo que el origen va a ser un punto repulsor de (11) y la circunferencia unidad va a ser un ciclo límite atractor. Por tanto, las curvas integrales que parten fuera del círculo unidad van a acercarse a la circunferencia girando indefinidamente a favor de las agujas del reloj, acercándose hacia ella, y ocurre lo mismo con las que arrancan dentro del círculo. En el diagrama de fases siguiente se puede observar con claridad este ciclo límite. En la gráfica de la derecha hemos incluido la solución obtenida para  $x_0 = -2, y_0 = -1$  como se ve que tras una breve fase transitoria las componentes prácticamente se comportan como las de la circunferencia de radio 1. Esta gráfica también sirve para evitar la tentación de pensar que como las curvas integrales se acercan a la circunferencia en el diagrama de fases, las componentes se "pegan" cuando  $t \rightarrow \infty$ .



Cuando el problema transformado (10) ya no es tan sencillo como este, asegurar la existencia de ciclos límites en problemas no lineales es muy complicado. Hay muchos teoremas que intentan dar condiciones necesarias o suficientes para garantizar la presencia de un ciclo límite. Aquí solo destacaremos dos.

**Teorema 2** *Consideremos el sistema (9) donde las funciones  $f$  y  $g$  tienen derivadas parciales primeras continuas en un dominio  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Una trayectoria cerrada del sistema (9) debe encerrar necesariamente al menos a un punto crítico. Si encierra solo a un punto crítico, dicho punto crítico no puede ser un punto de silla.*

Este teorema se suele usar mucho de forma negativa, esto es, que si en una región concreta no hay ningún punto crítico, no puede haber una trayectoria cerrada contenida completamente en dicha región. También se puede aplicar cuando hay una región que sólo contiene un punto de silla: no puede contener a ninguna trayectoria cerrada del sistema.

**Teorema 3 Teorema de Poincaré-Bendixson<sup>2</sup>:** *En las mismas condiciones del teorema anterior, si una trayectoria de (9) está acotada cuando  $t \rightarrow \infty$ , entonces tiene que*

1. ser un punto crítico o
2. tender a un punto crítico o
3. ser periódica o
4. tender a un ciclo límite

La importancia de este último teorema no reside tanto en poder garantizar la existencia de un ciclo límite o no, como en que nos detalla todos los comportamientos posibles de las soluciones acotadas en todos los problemas autónomos de dimensión 2.

### 4.1 La ecuación de Van der Pol

Los primeros casos prácticos de ciclos límite fueron estudiados por Rayleigh y Van der Pol trabajando con oscilaciones no lineales. Sabemos que las soluciones de la ecuación

$$u'' + \alpha u' + u = 0$$

se amortiguan si  $\alpha > 0$  y son inestables para  $\alpha < 0$ . Usando un triodo (aparato amplificador de corriente precursor en la electrónica de los actuales transistores), intentaban cambiar  $\alpha$  con el tiempo de tal forma que  $\alpha < 0$  para pequeños valores de  $u$  y  $\alpha > 0$  cuando  $u$  toma valores grandes. La forma más simple en la que modelizaron esto fue tomar  $\alpha = -\varepsilon(1 - u^2)$ ,  $\varepsilon > 0$ , con lo que resulta la llamada **ecuación de Van der Pol**

$$u'' - \varepsilon(1 - u^2)u' + u = 0, \quad \varepsilon \geq 0 \tag{12}$$

<sup>2</sup>Hay varios enunciados de este teorema en la literatura, todos más o menos equivalentes

Si  $\varepsilon = 0$ , esta ecuación se reduce a la  $u'' + u = 0$  que ya sabemos que tiene como soluciones senos o cosenos de período  $2\pi$ . Si  $\varepsilon > 0$ , al linealizar sabemos que, al menos localmente, las pequeñas oscilaciones se amplifican y las grandes se amortiguan. Por tanto, es esperable que haya una solución "intermedia" a la que las otras soluciones se acerquen cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Expresando (12) matricialmente,  $x = u, y = u'$ ,

$$x' = y \quad y' = -x + \varepsilon(1 - x^2)y \tag{13}$$

cuyo único punto crítico es el origen. Linealizando cerca de dicho origen se tiene

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

cuyos autovalores son

$$\lambda_1 = \frac{\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 4}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 4}}{2}$$

En consecuencia, el origen es un punto espiral inestable cuando  $0 < \varepsilon < 2$  y un nodo inestable para  $\varepsilon \geq 2$ . Por tanto, cualquier solución que arranca cerca del origen se alejará de él cuando  $t$  aumenta y, claramente, no puede ser la "solución intermedia" esperada, lo que les llevó a sospechar la presencia de un ciclo límite.

La demostración de la existencia de un ciclo límite en este caso es bastante complicado. Además, se puede probar que es único. En este curso solo lo vamos a comprobar numéricamente. Podemos ver experimentalmente que (13) tiene un único ciclo límite atractor cuyo período y amplitud dependen de  $\varepsilon$ .

**Ejercicio 4:** Construir un programa en Matlab u Octave que resuelva el sistema de ecuaciones diferenciales (13), dibuje al menos dos órbitas del plano de fases y la solución  $x$  respecto de  $t$ , en los casos  $\varepsilon = 0.2, 1, 5$  para los dos valores iniciales  $(x_0, y_0) = (0.1, 0.2)$  y  $(x_0, y_0) = (-4, 3)$ .

## 5. ATRACTORES EXTRAÑOS Y CAOS

Cuando se pasa a sistemas no lineales de tres o más ecuaciones, aparecen otros fenómenos que no se pueden observar en dos dimensiones.

El meteorólogo Edward Lorentz en 1963 usó un sistema de ecuaciones no lineales para modelizar la convección del aire en la atmósfera y se sorprendió de lo que obtuvo al aproximar su solución numéricamente con dos valores iniciales muy cercanos. El modelo es

$$\begin{aligned} x'(t) &= \sigma(-x + y) \\ y'(t) &= rx - y - xz \\ z'(t) &= -bz + xy \end{aligned} \tag{14}$$

donde los parámetros  $\sigma$  y  $b$  están relacionados con las propiedades de la atmósfera, siendo valores razonables  $\sigma = 10$  y  $b = 8/3$ . El parámetro  $r$  es proporcional a la diferencia de temperaturas entre las capas de aire atmosférico. El objetivo es averiguar cómo afecta el cambio de esta  $r$  a las soluciones del sistema (14).

Se demuestra que este sistema (14) tiene tres puntos críticos,  $P_1 = (0, 0)$ ,  $P_2 = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$ ,  $P_3 = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$ . Para  $r > 1$  el origen es repulsor, mientras que si  $1 < r \lesssim 24.737$   $P_2$  y  $P_3$  son asintóticamente estables. Sin embargo, desde que  $r \gtrsim 24.737$ , todos son repulsores. Sin embargo, se puede demostrar que todas las soluciones están acotadas. Si el Teorema de Poincaré-Bendixson fuera válido en sistemas 3D, se podría esperar que hubiera algún ciclo límite, pero no es así. Aparece lo que se llama un *atractor extraño*, que solo veremos numéricamente. El estudio analítico de estos atractores requiere unas herramientas matemáticas que sobrepasan el nivel de este curso.

**Ejercicio 5.-** Construir un programa Matlab que resuelva el sistema (14) para los valores iniciales  $(5, 5, 5)$ ,  $(5.01, 5, 5)$ ,  $(3, 8, 0)$ , para  $r = 21$  y  $r = 28$ , para  $t \in [0, 30]$ . Hacer una gráfica 2D en la que se enfrenta  $t$  con  $x(t)$ , otra que dibuje los pares  $(x(t), y(t))$  y otra los pares  $(x(t), z(t))$ . También, hacer una gráfica 3D (usar `plot3` de Matlab) para dibujar las curvas solución  $(x(t), y(t), z(t))$ .

En primer lugar, en la Fig. 2 comparamos las soluciones  $x(t)$  para el caso  $r = 21$  con valores iniciales  $(5, 5, 5)$  y  $(3, 8, 0)$  con las soluciones obtenidas con  $r = 28$  donde los valores iniciales están mucho más cerca,  $(5, 5, 5)$  y  $(5.01, 5, 5)$ .

En el caso  $r = 21$ , después de una fase transitoria, la solución que arranca en  $(5, 5, 5)$  tiende hacia  $P_2 \approx (12.6, 12.6, 20)$ , mientras que la que arranca en  $(3, 8, 0)$  se acerca a  $P_3 \approx (-12.6, -12.6, 20)$ . En

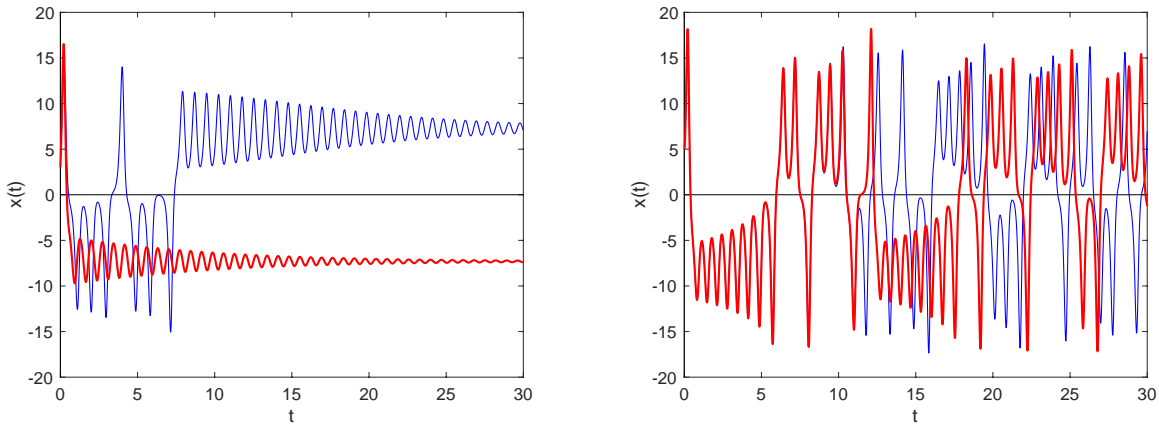


Figura 2: Solución  $x(t)$  de (14) con  $r = 21$  (izda.) y  $r = 28$  (dcha.)

cambio, para  $r = 28$ , aunque los dos valores iniciales elegidos son muy cercanos, las soluciones son bastante parecidas hasta  $t \approx 10$  pero se diferencian bastante a partir de ahí.

Para  $r = 28$  se sabe que hay un atractor extraño, que es un conjunto en el espacio que no tiene volumen y que podemos visualizar en las Fig. 3 y 4. En primer lugar, en Fig. 3 podemos ver los diagramas de fase en los que dibujamos solo los pares  $(x(t), y(t))$  (a la izquierda) de la solución que arranca en  $(5, 5, 5)$  y los pares  $(x(t), z(t))$  (a la derecha).

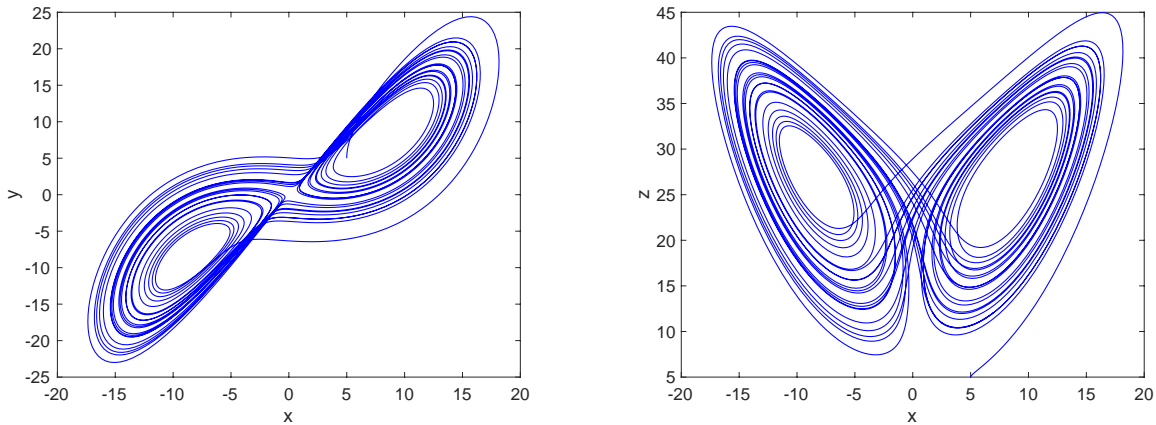


Figura 3: Planos  $(x(t), y(t))$  y  $(x(t), z(t))$  de (14) con  $r = 28$  arrancando en  $(5, 5, 5)$

Obsérvese que aunque parezca que se cruzan no es cierto, pues hay que tener en cuenta que esto son las proyecciones a los planos coordenados. Lo que sí se puede observar una forma característica donde la solución permanece cuando  $t \rightarrow \infty$ . La región del espacio que atrae a las soluciones se ve mejor en la gráfica 3D dada en Fig. 4.

Aquí se puede observar el atractor extraño más claramente. Si se usa, por ejemplo, un gráfico animado para ver esta gráfica, con el que podemos ver cómo va avanzando la solución, se puede ver que va girando alrededor de esos dos "ojos" de una forma que parece bastante aleatoria. Unas veces recorre una vez cada "ojo", luego en la siguiente vuelta recorre tres veces el primero antes de ir al segundo, etc.

Además, el estudio cualitativo de este sistema demuestra que tomando diferentes valores de  $r$  con  $r \gtrsim 24.737$  se pueden obtener muchos comportamientos diferentes, apareciendo valores para los que las soluciones son oscilaciones periódicas estables. También aparece un fenómeno similar a doblar los ciclos cuando vimos el caos en los esquemas iterativos en el Tema 3. Por ejemplo, si  $r = 100.78$  se obtiene el diagrama de la Fig. 5. Se puede ver que aparece un fenómeno parecido a lo que veíamos en los diagramas

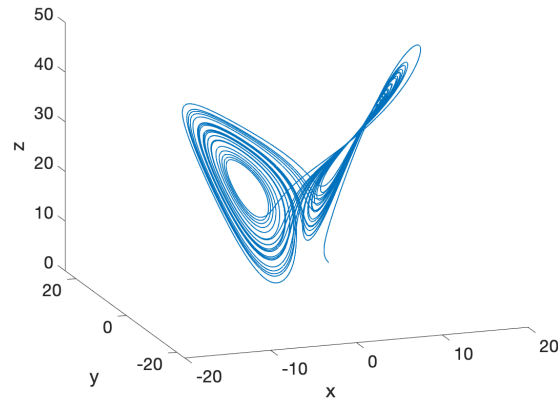


Figura 4: Atractor de (14) con  $r = 28$  arrancando en  $(5,5,5)$

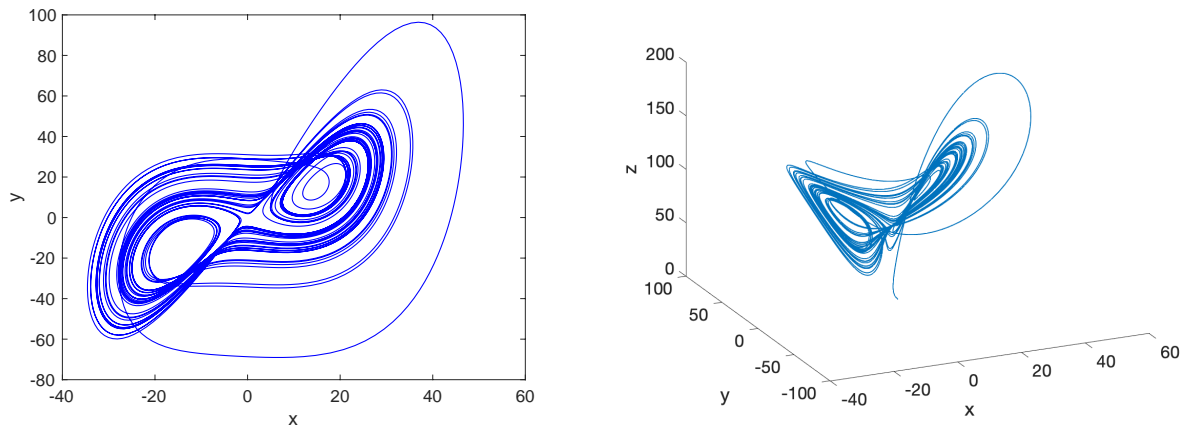


Figura 5: Atractor de (14) con  $r = 100.78$  arrancando en  $(5,5,5)$

de telaraña de la ecuación logística discreta. La solución a veces se acerca a una curva y a veces a otra. Como dijimos antes, el estudio de la bifurcación de este modelo se sale del nivel de esta asignatura.

A partir de este ejemplo podemos ver que no es difícil tropezarse en las aplicaciones con modelos relativamente simples y que presentan tal sensibilidad a las condiciones iniciales y comportamiento caótico.

## 6. ANEXO: ESTABILIDAD DE PROBLEMAS AUTÓNOMOS ESCALARES

La ecuación (1) cuando  $n = 1$  se reduce a la ecuación escalar

$$x' = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0 \tag{15}$$

y los puntos críticos  $x_e$  son los ceros de la función derivada  $f(x_e) = 0$ . Para estudiar el comportamiento de las curvas integrales que arrancan en un valor  $x(0) = x_0$  cercano a un punto crítico, es fundamental el uso de la gráfica de esta función derivada  $y = f(x)$  cerca de dicho punto crítico. Con ella, la ecuación (15) nos da el crecimiento de la solución  $x(t)$  cerca de  $x_e$  y, teniendo en cuenta que

$$x'' = \frac{d}{dt}f(x) = f'(x)f(x),$$

combinando los signos de  $f'(x)$  y  $f(x)$  a la derecha e izquierda de  $x_e$  conoceremos la curvatura de dicha solución.

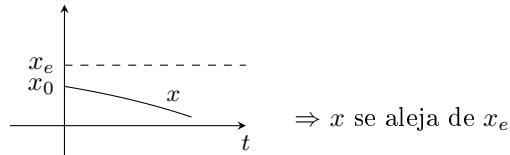
Dependiendo de si  $f'(x_e) \neq 0$  o no, cerca del punto crítico la función  $f$  puede tener una de las siguientes gráficas.

(a) $f'(x_e) > 0$	
(b) $f'(x_e) < 0$	
(c) $f'(x_e) = 0$	(c.1) $f''(x_e) > 0$
	(c.2) $f''(x_e) < 0$
	(c.3) $f''(x_e) = 0$ (c.3.1)  ó (c.3.2)

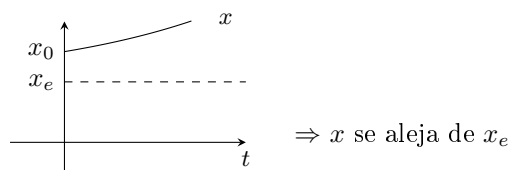
Por tanto, en el estudio cualitativo tenemos que diferenciar los siguientes casos

(a)  $f'(x_e) > 0$ :  $x_e$  es un punto de equilibrio inestable o **punto de equilibrio repulsor**;

► Si  $x_0 < x_e$ :  $f(x_0) < 0$ ,  $x'(0) < 0$ ,  $x''(0) < 0 \Rightarrow x$  decrece y es cóncava

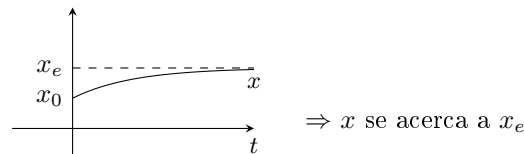


► Si  $x_0 > x_e$ :  $f(x_0) > 0$ ,  $x'(0) > 0$ ,  $x''(0) > 0 \Rightarrow x$  crece y es convexa

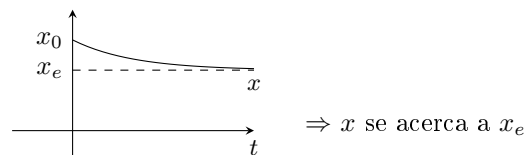


(b)  $f'(x_e) < 0$ :  $x_e$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable o **punto de equilibrio atractor**;

► Si  $x_0 < x_e$ :  $f(x_0) > 0$ ,  $x'(0) > 0$ ,  $x''(0) < 0 \Rightarrow x$  crece y es cóncava



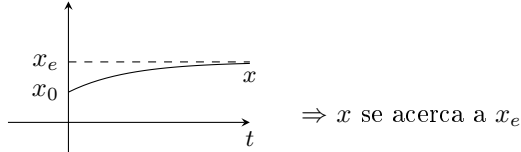
► Si  $x_0 > x_e$ :  $f(x_0) < 0$ ,  $x'(0) < 0$ ,  $x''(0) > 0 \Rightarrow x$  decrece y es convexa



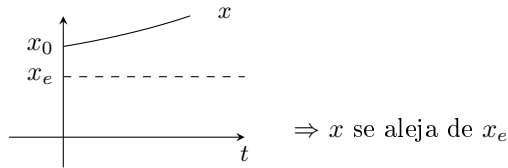
(c)  $f'(x_e) = 0$ :  $x_e$  puede ser inestable, asintóticamente estable o algo intermedio que se denomina **punto de equilibrio semi-estable**. Este es el caso en el que si se toman valores iniciales  $x_0$  por un lado de  $x_e$ , la curva integral se acerca a  $x_e$ , pero si tomamos un  $x_0$  por el otro lado de  $x_e$  la curva se aleja.

(c.1)  $f''(x_e) > 0$ :  $x_e$  es semi-estable

\* Si  $x_0 < x_e$ :  $f(x_0) > 0, f'(x_0) < 0, x'(0) > 0, x''(0) < 0 \Rightarrow x$  crece y es cóncava

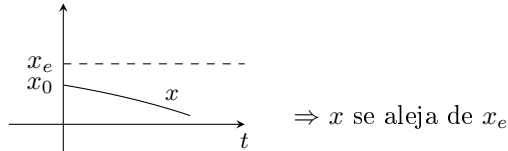


\* Si  $x_0 > x_e$ :  $f(x_0) > 0, f'(x_0) > 0, x'(0) > 0, x''(0) > 0 \Rightarrow x$  crece y es convexa

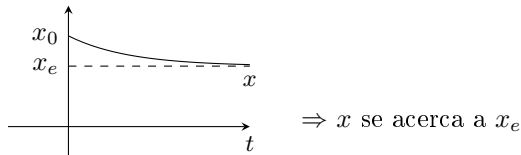


(c.2)  $f''(x_e) < 0$ :  $x_e$  es semi-estable

\* Si  $x_0 < x_e$ :  $f(x_0) < 0, f'(x_0) > 0, x'(0) < 0, x''(0) < 0 \Rightarrow x$  decrece y es cóncava



\* Si  $x_0 > x_e$ :  $f(x_0) < 0, f'(x_0) < 0, x'(0) < 0, x''(0) > 0 \Rightarrow x$  decrece y es convexa



(c.3)  $f''(x_e) = 0$ : tenemos otras dos posibilidades

(c.3.1) Ocurre lo mismo que en el caso (a), es decir,  $x_e$  es un punto inestable.

(c.3.2) Ocurre lo mismo que en el caso (b), es decir,  $x_e$  es un punto asintóticamente estable.

## 7. ANEXO: ESTABILIDAD DE SISTEMAS DE DIMENSIÓN 2

Para poder abordar el estudio cualitativo de sistemas autónomos de dimensión 2 no lineales en general, debemos conocer primero la resolución del caso más sencillo, el caso de los problemas lineales de coeficientes constantes.

### 7.1 Expresión matricial de la solución general de los sistemas lineales

La solución general de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficientes constantes y dimensión  $n \geq 1$

$$X' = AX, \quad A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_n, \quad X \in \mathbb{R}^n \quad (16)$$

se puede expresar matricialmente como

$$X(t) = e^{At} X_0, \quad t \geq 0$$

para cualquier valor inicial  $X(0) = X_0$ , donde  $e^{At}$  es la **matriz exponencial** dada por la serie convergente

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k, \quad t \in \mathbb{R} \quad (17)$$



El cálculo de las potencias  $A^k$  viene determinada por sus autovalores  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  (contados según su multiplicidad algebraica).

- Si  $A$  es diagonalizable, existe  $P$  no singular tal que  $A = PDP^{-1}$  donde  $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  y, por tanto,

$$e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}, \quad e^{Dt} = \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t})$$

- Si  $A$  no es diagonalizable, tiene descomposición de Jordan, es decir, si  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$  son los autovalores distintos entre sí de  $A$  ( $s \leq n$ ), existe  $P$  no singular tal que  $A = PJP^{-1}$  y  $J$  es la matriz de Jordan dada por

$$J = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & J(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

donde cada submatriz  $J(\lambda_i)$  es la caja de Jordan asociada al autovalor  $\lambda_i$  de la forma

$$J(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} \quad (18)$$

para cada  $i = 1, \dots, s$  y cuya dimensión es la multiplicidad geométrica del autovalor  $\lambda_i$  ( $= n - \text{rango}(A - \lambda_i I)$ ). En consecuencia,

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}, \quad e^{Jt} = \text{diag}(e^{J(\lambda_1)t}, \dots, e^{J(\lambda_s)t})$$

y estas submatrices exponenciales se calculan usando la expresión en serie (17), que es conocida para los bloques de Jordan (18).

## 7.2 Expresión vectorial para sistemas lineales de dimensión 2

La expresión matricial anterior de la solución del problema lineal (16) facilita el estudio de la estabilidad de dichos problemas y su manejo para dimensiones  $n$  relativamente grandes. Para dimensiones pequeñas ( $n = 2, 3, 4$ ) se suele preferir la expresión siguiente que hace uso también de los autovectores de la matriz  $A$ .

Considérese el sistema de primer orden lineal de coeficientes constantes de dimensión 2

$$X' = AX, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (19)$$

siendo  $\{\lambda_1, \lambda_2\}$  los dos autovalores de  $A$  (pueden ser iguales).

- Si  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , y  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$  son sus autovectores asociados (que son linealmente independientes), entonces la solución general del problema (19) es

$$X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2, \quad t \geq 0, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

- Si  $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , y  $\vec{v}_1$  es el autovector complejo asociado a  $\lambda_1$ , se separa también la parte real y la imaginaria de dicho autovector  $\vec{v}_1 = \vec{u}_1 - i\vec{w}_1$  (nótese el cambio de signo necesario para las fórmulas posteriores), y la solución general del problema (19) se puede expresar como

$$X(t) = e^{\alpha t} (c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t) \vec{u}_1 + e^{\alpha t} (c_1 \sin \beta t - c_2 \cos \beta t) \vec{w}_1, \quad t \geq 0, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

o, de forma alternativa

$$X(t) = e^{\alpha t} B (\cos(\beta t + \phi_0) \vec{u}_1 + \sin(\beta t + \phi_0) \vec{w}_1), \quad t \geq 0, \quad B, \phi_0 \in \mathbb{R}$$

- Si  $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , entonces la solución general dependerá de la multiplicidad geométrica de dicho autovalor:

1. Si la multiplicidad geométrica es 2, es decir, se pueden encontrar dos autovectores  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$  asociados al mismo autovalor  $\lambda_1$  linealmente independientes, entonces la solución general del problema (19) es

$$X(t) = e^{\lambda_1 t} (c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2), \quad t \geq 0, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2. Si la multiplicidad geométrica es 1, es decir, solo se puede disponer de un autovector  $\vec{v}_1$  (linealmente independiente) asociado al autovalor  $\lambda_1$ , se busca un vector  $\vec{v}_2$  linealmente independiente de  $\vec{v}_1$  y que verifica  $(A - \lambda_1 I)\vec{v}_2 = \vec{v}_1$ . Entonces la solución general del problema (19) se puede expresar como

$$X(t) = e^{\lambda_1 t} (c_1 + c_2 t) \vec{v}_1 + e^{\lambda_1 t} c_2 \vec{v}_2, \quad t \geq 0, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

### 7.3 Diagrama de fases

El estudio de la estabilidad de los puntos críticos de los sistemas autónomos de dimensión 2 se facilita mucho estudiando *el diagrama de fases* del sistema de ecuaciones.

Consideremos el sistema autónomo de dos ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y) \end{aligned} \tag{20}$$

donde  $f(x, y)$  y  $g(x, y)$  tienen derivadas parciales primeras continuas en el plano, lo que garantiza la existencia y unicidad de soluciones del sistema (20) para cada valor inicial  $(x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, t_0 \in \mathbb{R})$  del plano.

Toda solución  $(x(t), y(t))$  de este sistema (20) define una curva  $C$  parametrizada en el plano XY llamada **órbita o trayectoria** de la solución. En este ámbito, como se puede ver el plano XY como el plano en el que se mueven todas las órbitas de las soluciones de (20), se le suele llamar **plano de fases**. La representación gráfica de varias órbitas de una misma ecuación diferencial se denomina **diagrama de fases** (o también retrato de fases).

La ventaja de trabajar con órbitas es que de la propia ecuación (20) se puede saber cómo son dichas órbitas sin conocer previamente sus soluciones. Por una parte, la ecuación (20) nos da la *velocidad de la curva C*:

$$\vec{v}(t) = (x'(t), y'(t)) = (f(x, y), g(x, y))$$

En otras palabras, si la curva  $C$  pasa por un punto del plano  $(x_1 = x(t_1), y_1 = y(t_1))$  entonces el vector velocidad  $\vec{v}(t_1) = (f(x_1, y_1), g(x_1, y_1))$  es tangente a la curva  $C$ .

Además, si  $(f(x, y), g(x, y)) \neq (0, 0)$ , la órbita  $C$  es suave (no tiene puntos angulosos) y podemos expresar dicha curva como la gráfica de la función  $y = y(x)$  en el plano XY donde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}. \tag{21}$$

Para trabajar con las órbitas es muy útil esta propiedad de las soluciones

**Lema 4** Si  $(x(t), y(t))$ ,  $t \in \mathbb{R}$  es una solución de (20), entonces  $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = (x(t+c), y(t+c))$ ,  $t \in \mathbb{R}$  es también solución de (20) para cualquier constante  $c \in \mathbb{R}$ .

**Propiedades de las órbitas:** sea  $C = \{(x(t), y(t)), t \in \mathbb{R}\}$  una órbita de (20)

1. Como consecuencia directa del Lema 4, la curva  $C$  se puede parametrizar como  $C = \{(x(t+c), y(t+c)), t \in \mathbb{R}\}$  para cualquier constante  $c \in \mathbb{R}$ .
2. Por cada punto del plano XY pasa una y solo una órbita de (20). Una consecuencia de esto es que si las órbitas de dos soluciones  $(x(t), y(t))$  y  $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$  tienen un punto en común, deben ser idénticas.
3. Si una solución  $(x(t), y(t))$  de (20) verifica que  $(x(t_0 + T), y(t_0 + T)) = (x(t_0), y(t_0))$  para algún  $t_0$  y  $T > 0$ , entonces es periódica con período  $T$ , y la órbita correspondiente es una curva cerrada. Recíprocamente, si la órbita de una solución  $(x(t), y(t))$  es una curva cerrada en el plano que no contiene ningún punto de equilibrio, entonces, dicha solución es periódica.

4. Otra de las consecuencias de la unicidad de las órbitas es que sobre cada punto  $(x_1, y_1)$  del plano XY podremos fijar el vector  $(f(x_1, y_1), g(x_1, y_1))$  que, por (21), será tangente a la única órbita del sistema diferencial que pasa por dicho punto  $(x_1, y_1)$ , creando un *campo de vectores o de direcciones* que determinará el comportamiento de las órbitas de este sistema.

**Ejemplo:** el oscilador armónico de frecuencia angular 1, es decir  $mx'' = -kx, t \geq 0$  con  $\omega = k/m = 1$ . Sabemos que sus soluciones son  $x(t) = A \sin(t + \phi_0)$ ,  $A, \phi_0 \in \mathbb{R}$ . Para verlo como un sistema autónomo incluimos la componente  $y(t) = x'(t)$ , por lo que se expresa de la forma (20) como

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x \end{aligned} \tag{22}$$

Si tomamos  $x_0 = x(0) = 1, y_0 = x'(0) = 0$ , resolviendo la ecuación diferencial de orden 2 tenemos como solución  $x(t) = \sin(t + \pi/2)$ , por lo que la órbita en el plano de fases que pasa por el punto  $(x_0, y_0) = (1, 0)$  es  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \sin(t + \pi/2), y = \cos(t + \pi/2), t \geq 0\}$ , es una órbita periódica. Es más, es la circunferencia unidad.

Si partimos de  $\tilde{x}_0 = x(0) = 1/2, \tilde{y}_0 = x'(0) = \sqrt{3}/2$ , se obtiene como solución el M.A.S.  $\tilde{x}(t) = \sin(t + \pi/6)$ , con lo que la órbita correspondiente en el plano es  $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \sin(t + \pi/6), y = \cos(t + \pi/6), t \geq 0\}$ . Esta órbita vuelve a ser la circunferencia unidad  $C_2 = C$ .

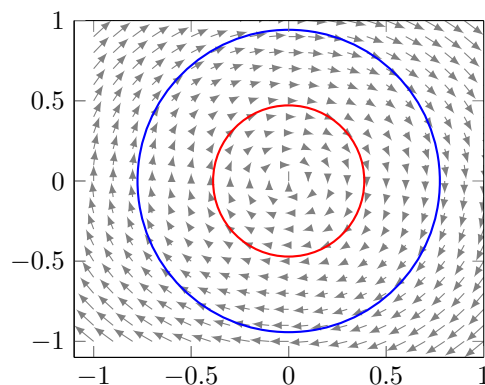
Obsérvese que las soluciones en los dos casos anteriores son diferentes, nunca se cortan. Recuerdese que para "cortarse" tiene que ocurrir que exista un  $t^* > 0$  tal que  $x(t^*) = \tilde{x}(t^*)$  y que  $x'(t^*) = \tilde{x}'(t^*)$ . Si pensamos que esto modeliza el movimiento de dos sistemas masa-resorte idénticos que arrancan en el mismo instante  $t = 0$  con posiciones y velocidades iniciales diferentes, para que "las soluciones se corten" la masa tiene que pasar por el mismo punto y a la misma velocidad en ambos sistemas. Sin embargo, aunque las soluciones no se cortan, producen la misma órbita periódica en el plano de fases.

Podemos crear el campo de direcciones o campo de vectores de este sistema tomando una malla de puntos  $(x_i, y_j)$  del plano y sobre cada uno de esos puntos se dibuja el vector  $(f(x_i, y_j), g(x_i, y_j)) = (y_j, -x_i)$ , que tiene pendiente

$$\frac{dy}{dx}(x_i, y_j) = -\frac{x_i}{y_j},$$

lo que concuerda con (21). Esta gráfica ayuda a visualizar cómo van a moverse las trayectorias del sistema (20).

En la práctica, para ver qué pasa alrededor del origen, con la ayuda de wxMaxima u Octave/Matlab, se crea una malla en  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  y se dibuja sobre cada  $(x, y)$  de la malla el vector  $(y, -x)$ , como vemos en la siguiente gráfica.



Pero es más, en muchos casos como este, podemos ver (21) como una ecuación diferencial escalar de incógnita  $y(x)$ , resolverla y determinar exactamente las órbitas del sistema. En el caso del oscilador armónico, sale por variables separadas la solución general  $x^2 + y^2 = C^2$ , por lo que las órbitas del problema (22) son todas circunferencias centradas en el origen. En la gráfica anterior se han añadido dos órbitas como ejemplo. El campo de vectores nos deja claro en qué dirección se recorren dichas trayectorias.

### 7.4 Estabilidad de problemas lineales de dimensión 2

Consideremos el sistema lineal de dimensión 2

$$X' = AX, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \det A \neq 0 \tag{23}$$

en el que  $X = (0, 0)^T$  es su único punto crítico<sup>3</sup>.

Las soluciones de este sistema dependerán de los autovalores de la matriz  $A$ . Para estudiar cómo son dichas soluciones es importante tener en cuenta que su polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^2 - T\lambda + D, \quad T = \text{tr } A = \text{traza de } A = a + d, \quad D = \det A \neq 0,$$

por lo que sus raíces son los autovalores

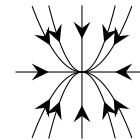
$$\lambda_1 := \frac{T - \sqrt{T^2 - 4D}}{2}, \quad \lambda_2 := \frac{T + \sqrt{T^2 - 4D}}{2}.$$

Estudiando sus órbitas según sean los autovalores, a partir de la expresión vectorial de las soluciones vista en la Sección 7.2, se demuestra que cuando  $t \rightarrow \infty$  se tiene que alrededor del origen dichas órbitas siguen uno de los siguientes patrones:

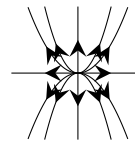
- Si  $T^2 - 4D > 0$ :  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 < \lambda_2$ :

- ▶ Si  $D > 0$ :

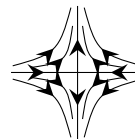
- \* Si  $T < 0$ :  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ : *nodo asintóticamente estable (sink)*



- \* Si  $T > 0$ :  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ : *nodo inestable (source)*



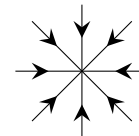
- ▶  $D < 0$ :  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ : *punto de silla (saddle)*



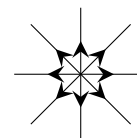
- Si  $T^2 - 4D = 0$ :  $\lambda_1 = \lambda_2 = T/2 \in \mathbb{R}$ :

- ▶ Si  $A = (T/2)I$ : ( $\text{rango}(A - (T/2)I) = 0$ ):

- \* Si  $T < 0$ : *nodo propio asintóticamente estable (nodal sink)*

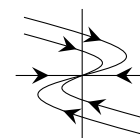


- \* Si  $T > 0$ : *nodo propio inestable (nodal source)*



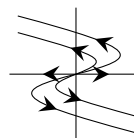
- ▶ Si  $A \neq (T/2)I$ : ( $\text{rango}(A - \lambda I) = 1$ ):

- \* Si  $T < 0$ : *nodo impropio asintóticamente estable (degenerate sink)*



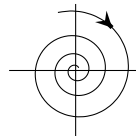
<sup>3</sup>Si  $\det A = 0$ , las dos ecuaciones son linealmente independientes,  $y = \alpha x + c$  para ciertas constantes  $\alpha, c \in \mathbb{R}$  y realmente tendríamos un problema de dimensión 1

\* Si  $T > 0$ : *nodo impropio inestable (degenerate source)*

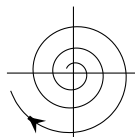


• Si  $T^2 - 4D < 0$ :  $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha = T/2, \beta = \sqrt{4D - T^2}/2$ :

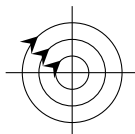
► Si  $T < 0$ : *foco asintóticamente estable (spiral sink)*



► Si  $T > 0$ : *foco inestable (spiral source)*



► Si  $T = 0$ : *centro estable (center)*



Para distinguir mejor los tipos de puntos críticos a menudo los asintóticamente estables (nodos, nodos propios, impropios y focos) se llaman *atractores*. Entre los inestables, se distinguen los que se alejan del punto crítico como *repulsores*, de los puntos de silla.

### 7.5 Estabilidad de problemas no lineales de dimensión 2

El estudio de la estabilidad de problemas no lineales (20) en general es más complejo. Una gran parte del trabajo se ahorra al *linealizar* el problema, es decir, buscar un problema lineal cuyas soluciones se comporten de una manera similar a las del no lineal.

Si suponemos que las funciones  $f(x, y)$  y  $g(x, y)$  del problema no lineal (20) tienen derivadas parciales continuas en el plano al menos hasta orden 2, para cada punto crítico de este sistema  $X_e = (x_e, y_e)$  ( $f(x_e, y_e) = g(x_e, y_e) = 0$ ), se puede aplicar el desarrollo de Taylor hasta orden 2 para todo  $X = (x, y)$  en un entorno de  $X_e$ :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_e, y_e) + f_x(x_e, y_e)(x - x_e) + f_y(x_e, y_e)(y - y_e) + \eta_1(x, y) \\ g(x, y) &= g(x_e, y_e) + g_x(x_e, y_e)(x - x_e) + g_y(x_e, y_e)(y - y_e) + \eta_2(x, y) \end{aligned} \tag{24}$$

donde  $\eta_i(X) / \|X - X_e\|_2 \rightarrow 0$  cuando  $X \rightarrow X_e$  para  $i = 1, 2$ . Como además,

$$\frac{d(X - X_e)}{dt} = \left( \frac{d(x - x_e)}{dt}, \frac{d(y - y_e)}{dt} \right)^T = \frac{dX}{dt}$$

y  $f(X_e) = g(X_e) = 0$ , se tiene

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x - x_e \\ y - y_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(X_e) & f_y(X_e) \\ g_x(X_e) & g_y(X_e) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_e \\ y - y_e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_1(X) \\ \eta_2(X) \end{pmatrix}$$

Por tanto, si  $U = X - X_e$  y  $R(X) = (\eta_1(X), \eta_2(X))^T$ , el sistema (20) se puede transformar en el sistema "casi lineal"

$$\frac{dU}{dt} = A_e U + R(X) \tag{25}$$

donde  $A_e$  es la matriz jacobiana de  $F = (f, g)^T$  evaluada en el punto crítico

$$A_e = \frac{\partial F}{\partial X}(X_e) = \begin{pmatrix} f_x(X_e) & f_y(X_e) \\ g_x(X_e) & g_y(X_e) \end{pmatrix}$$

y  $\|R(X)\| / \|X - X_e\| \rightarrow 0$  cuando  $X \rightarrow X_e$ .

El siguiente teorema nos da la relación existente entre la estabilidad del sistema (25) con la del sistema *linealizado*

$$\frac{dU}{dt} = A_e U \tag{26}$$

**Teorema 5** *Supóngase que que las funciones  $f(x, y)$  y  $g(x, y)$  del problema no lineal (20) tienen derivadas parciales continuas en el plano al menos hasta orden 2, que  $X_e$  es un punto crítico aislado de (20) (es decir, existe un entorno de dicho punto en el que no hay otro punto crítico de (20)), que  $\det A_e \neq 0$  (es decir,  $U = 0$  es el único punto crítico del sistema linealizado (26)) y que la función  $R(X)/\|X\|$  es una función continua que se anula para  $X = 0$ . Entonces*

1. *La solución de equilibrio  $U = 0$  de (25) es asintóticamente estable si la solución de equilibrio  $U = 0$  de la linealizada (26) es asintóticamente estable. De forma equivalente, la solución  $U = 0$  de (25) es asintóticamente estable si todos los autovalores de  $A_e$  tienen parte real negativa.*
2. *La solución  $U = 0$  de (25) es inestable si al menos un autovalor de  $A_e$  tiene parte real positiva.*
3. *La estabilidad del punto crítico  $U = 0$  de (25) no se puede determinar a partir de la estabilidad de la solución  $U = 0$  de la linealizada (26) si los dos autovalores de  $A_e$  son imaginarios puros.*

Como bajo las hipótesis de este Teorema 5,  $X$  es una solución de (20) si y sólo si  $U = X - X_e$  es una solución de (25), y el tipo de estabilidad que tendrá el punto de equilibrio  $X = X_e$  de (20) es el mismo que tiene el punto de equilibrio  $U = 0$  de (25), el Teorema nos dice que *cuando el único punto de equilibrio  $U = 0$  del sistema linealizado (26) es asintóticamente estable o inestable, el punto crítico  $X = X_e$  de (20) es asintóticamente estable o inestable respectivamente.* El único caso en que queda indeterminado el carácter del punto de un punto de equilibrio  $X_e$  de (20) es aquel en el que la matriz jacobiana  $A_e$  tiene sus dos autovalores imaginarios puros.

Pero es que, además, podremos deducir el diagrama de fases del problema no lineal (20) a partir del diagrama de fases del linealizado (26), salvo en los casos "frontera" en el que sólo se tenga un único autovalor doble o cuando los dos autovalores sean imaginarios puros.

**Teorema 6** *Supóngase que tenemos las mismas hipótesis que en el Teorema 5 anterior y que  $A_e$  no tiene ni un autovalor doble ni dos imaginarios puros. Entonces el diagrama de fases del sistema (20) en un entorno de  $X = X_e$  es muy parecido al diagrama del sistema linealizado (26) cerca de  $U = 0$ .*

*Es decir, hay una biyección continuamente diferenciable con inversa continuamente diferenciable entre un entorno de  $X = X_e$  y un entorno de  $U = 0$  que transforma órbitas del sistema (20) en órbitas del sistema (26) preservando su orientación.*

Obsérvese que cuando  $A_e$  tiene un autovalor doble, el Teorema 5 nos garantiza si el punto  $X = X_e$  es estable o inestable, pero lo que no podemos afirmar es que las órbitas del lineal cerca de  $U = 0$  sean similares a las del no lineal (20). Evidentemente, tanto en este caso como cuando  $A_e$  tiene autovalores imaginarios puros habrá que estudiar las órbitas en dicho problema en particular, siempre que sea factible. En la actualidad en estos casos también suelen usarse programas informáticos para graficar las órbitas numéricamente, con lo que se pueden extraer conclusiones al menos parcialmente.

## 7.6 Estabilidad de problemas lineales de dimensión $n$

El estudio de las órbitas de los problemas lineales cuando  $n > 2$  es más complicado (de hecho, tendríamos que definir qué es una órbita en dimensión  $n$ ) y, sobre todo, su representación gráfica es impracticable. Sin embargo, estudiando sus soluciones en forma matricial (ver Sección 7.1) se puede saber qué tipo de estabilidad van a tener dichas soluciones.

**Teorema 7** 1. *Si la matriz  $A$  del sistema (16) es diagonalizable:*

- (a) *Todas las soluciones del sistema son estables si  $\operatorname{Re} \lambda \leq 0, \forall \lambda \in \sigma(A)$ .*
- (b) *Todas las soluciones son asintóticamente estables si  $\operatorname{Re} \lambda < 0, \forall \lambda \in \sigma(A)$ .*
- (c) *Todas las soluciones son inestables si existe un  $\lambda \in \sigma(A)$  tal que  $\operatorname{Re} \lambda > 0$ .*

2. *Si  $A$  no es diagonalizable:*

- (a) *Todas las soluciones del sistema son estables si  $\operatorname{Re} \lambda \leq 0, \forall \lambda \in \sigma(A)$  y si todos los autovalores que verifican  $\operatorname{Re} \lambda = 0$  son simples.*
- (b) *Todas las soluciones son asintóticamente estables si  $\operatorname{Re} \lambda < 0, \forall \lambda \in \sigma(A)$ .*

(c) Todas las soluciones son inestables si existe un  $\lambda \in \sigma(A)$  tal que  $\operatorname{Re} \lambda > 0$  o un autovalor con  $\operatorname{Re} \lambda = 0$  múltiple.

Obsérvese que en este teorema se habla de "todas las soluciones" pues solo existe un punto crítico  $X = 0$ .

### 8. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. En las siguientes ecuaciones autónomas  $x' = f(x)$ , representa gráficamente la función  $y = f(x)$ , calcula los puntos críticos, clasificalos y representa el comportamiento cualitativo de las soluciones de la ecuación diferencial dependiendo de qué valor inicial  $x_0$  se toma en el intervalo considerado:

$$\begin{array}{ll} (a) x' = ax + bx^2, a > 0, b > 0, x_0 \geq 0 & (b) x' = ax + bx^2, a > 0, b > 0, x_0 \in \mathbb{R} \\ (c) x' = x(x-1)(x-2), x_0 \in \mathbb{R} & (d) x' = e^x - 1, x_0 \in \mathbb{R} \\ (e) x' = e^{-x} - 1, x_0 \in \mathbb{R} & (f) x' = k(1-x)^2, k > 0, x_0 \in \mathbb{R} \\ (g) x' = -k(1-x)^2, k > 0, x_0 \in \mathbb{R} & (h) x' = x^2(x^2-1), x_0 \in \mathbb{R} \\ (i) x' = x^2(1-x^2), x_0 \in \mathbb{R} & (j) x' = x^2(1-x^2), x_0 \in \mathbb{R} \end{array}$$

2. Considérese los sistemas lineales de dimensión 2  $X' = AX$  donde la matriz  $A$  viene dada por

$$\begin{array}{lll} (a) A = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} & (b) A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} & (c) A = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} \\ (d) A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} & (e) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} & (f) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Calcular una expresión vectorial de la solución general de cada una de ellas, en función de sus autovalores y autovectores.

3. Esquematizar los diagramas de fases de los sistemas lineales de la forma  $X' = AX$  dados en el problema 2 y clasificar qué tipo de punto crítico es el origen y su estabilidad.

4. En cada uno de los siguientes sistemas no lineales, calcular los puntos críticos y clasificarlos. Si es posible, hacer un diagrama de fases en el entorno de cada punto crítico:

$$\begin{array}{ll} (a) x' = x - xy, y' = y + 2xy & (b) x' = 1 + 2y, y' = 1 - 3x^2 \\ (c) x' = x - x^2 - xy, y' = \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}y^2 - \frac{3}{4}xy & (d) x' = -(x-y)(1-x-y), y' = x(2+y) \\ (e) x' = y(2-x-y), y' = -x-y-2xy & (f) x' = (2+x)(y-x), y' = y(2+x-x^2) \\ (g) x' = -x + 2xy, y' = y - x^2 - y^2 & (h) x' = y, y' = x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{5}y \end{array}$$

5. En cada uno de los siguientes sistemas que describen la interacción de dos especies con poblaciones  $x$  e  $y$ , calcular los puntos críticos y clasificarlos, hacer un esbozo que refleje cómo serán las órbitas cerca de dichos puntos críticos y deducir cómo van a evolucionar las poblaciones a lo largo del tiempo:

$$\begin{array}{ll} (a) x' = x(1.5 - x - 0.5y), & y' = y(2 - y - 0.75x) \\ (b) x' = x(1.5 - x - 0.5y), & y' = y(2 - 0.5y - 1.5x) \\ (c) x' = x(1.5 - 0.5x - y), & y' = y(2 - y - 1.125x) \end{array}$$

6. Ídem com

$$\begin{array}{ll} (a) x' = x(1.5 - 0.5y), & y' = y(-0.5 + x) \\ (b) x' = x(1 - 0.5y), & y' = y(-0.25 + 0.5x) \\ (c) x' = x(1 - 0.5x - 0.5y), & y' = y(-0.25 + 0.5x) \\ (d) x' = x(1.125 - x - 0.5y), & y' = y(-1 + x) \end{array}$$

Nota: tener en cuenta que la gráfica en el plano de la función implícita

$$a \ln y - \alpha y + c \ln x - \gamma x = C, \quad a, \alpha, c, \gamma > 0, C \in \mathbb{R}$$

es una curva cerrada alrededor del punto  $(c/\gamma, a/\alpha)$ .

7. Aplicar al siguiente sistema un cambio en polares anterior y determinar si tiene ciclos límite circulares y de qué tipo

$$x' = f(x, y) = -y + x(1 - \sqrt{x^2 + y^2})^2$$

$$y' = g(x, y) = x + y(1 - \sqrt{x^2 + y^2})^2$$

8. Ídem con

$$x' = f(x, y) = -y + x\sqrt{x^2 + y^2}(1 - x^2 - y^2)$$

$$y' = g(x, y) = x + y\sqrt{x^2 + y^2}(1 - x^2 - y^2)$$

9. Los siguientes sistemas se han obtenido después de aplicar el cambio a polares a un sistema autónomo no lineal. Determinar sus soluciones periódicas, sus ciclos límite si los tiene y el tipo de estabilidad de dichos ciclos:

(a)  $r' = r(1 - r)(r - 2), \quad \theta' = -1$

(b)  $r' = r(r - 1)(r - 3), \quad \theta' = 1$

(c)  $r' = \sin \pi r, \quad \theta' = 1$

10. Considérese la ecuación de Rayleigh

$$u'' - \mu\left(1 - \frac{1}{3}(u')^2\right)u' + u = 0, \quad \mu > 0.$$

- (a) Transformarla en un sistema de dos ecuaciones de primer orden.  
 (b) Demuéstrese que el origen es su único punto crítico y determinar su estabilidad.  
 (c) Hacer un programa que dado  $\mu$  y varias condiciones iniciales compute las correspondientes soluciones para  $t \in [0, 20]$ , dibuje las trayectorias en el plano de fases, incluyendo el campo de vectores, y otra gráfica en que se enfrente  $t$  y  $u(t)$ . Probar con  $\mu = 1, 0.5, 2$  para valores iniciales  $(x_0, y_0) = (0.5, -0.5), (-1, 3), (3, -6)$ . Se recomienda que el plano de fases se limite al cuadrado  $[-4, 4] \times [-4, 4]$ . ¿Se observa un ciclo límite? ¿En qué casos?

## 9. BIBLIOGRAFÍA

- [1] W. E. Boyce, R. C. DiPrima, *Elementary differential equations and boundary value problems*, Ed. John Wiley and Sons, 2001.  
 [2] S. J. Farlow, *An introduction to differential equations and their applications*, Dover Publ. Inc., 1994.  
 [3] R. Haberman, *Mathematical models: mechanical vibrations, population dynamics and traffic flow*, SIAM, 1998.  
 [4] E. Hairer, S. P. Nørsett, G. Wanner, *Solving ordinary differential equations, I, nonstiff problems, 2nd revised edition*, Springer, 1987.  
 [5] J. D. Murray, *Mathematical biology I. An introduction, 3rd edition*, Springer, 2002.  
 [6] M. R. Spiegel, *Ecuaciones diferenciales aplicadas*, Prentice-Hall Hispanoamericana, 1983.