

TEMA 7.- PROBLEMAS CONSERVATIVOS. EL PÉNDULO

CONTENIDOS

| | | |
|-----|--|----|
| 1 | EL PÉNDULO SIMPLE | 1 |
| 2 | ESTABILIDAD. | 4 |
| 3 | ESTABILIDAD DE PROBLEMAS ESCALARES CONSERVATIVOS | 4 |
| 3.1 | Curvas de energía | 5 |
| 3.2 | Curvas de energía del péndulo simple | 6 |
| 3.3 | Estabilidad a partir de la energía potencial | 7 |
| 4 | EL PÉNDULO CON PEQUEÑAS OSCILACIONES | 10 |
| 5 | PERÍODO DEL PÉNDULO. | 10 |
| 6 | EJERCICIOS PROPUESTOS | 12 |
| 7 | BIBLIOGRAFÍA | 14 |

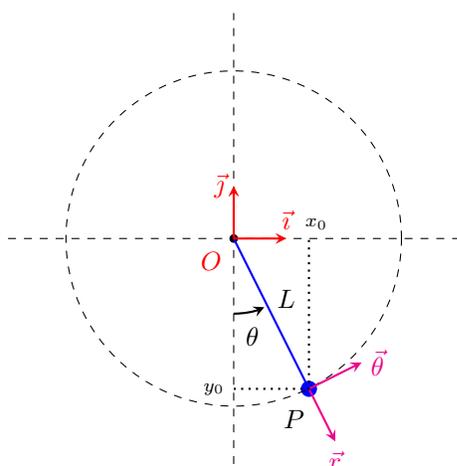
1. EL PÉNDULO SIMPLE

Consideremos un péndulo formado por una varilla rígida de longitud dada L fijada por un extremo a un punto fijo alrededor del cual puede girar libremente. En el otro extremo se le ata una masa m , que supondremos suficientemente grande de forma que podremos suponer que aproximadamente toda la masa está concentrada en este extremo y que en comparación la masa de la varilla es despreciable.

Para describir mejor el movimiento del péndulo con la segunda ley de Newton y estudiar las fuerzas que actúan sobre él cuando la masa está en un determinado punto P del plano será necesario hacer un cambio de referencia del sistema cartesiano $\mathcal{R} = \{O; \vec{i}, \vec{j}\}$ a un sistema fijado en la posición considerada $\mathcal{S} = \{P; \vec{r}, \vec{\theta}\}$.

Así consideremos el origen O fijado en el extremo fijo del péndulo y que en un instante determinado t el otro extremo está en el punto $P = P(t)$ (que dista L del origen O) y que forma un ángulo $\theta = \theta(t)$ (*ángulo polar*) con el semieje vertical negativo ($\theta > 0$ si va en contra de las agujas del reloj y $\theta < 0$ si va a su favor). Los nuevos vectores unitarios del nuevo sistema de referencia sobre P serán

- \vec{r} = vector unitario en la dirección y sentido del vector \overrightarrow{OP} .
- $\vec{\theta}$ = vector unitario perpendicular a \vec{r} (en sentido positivo).



$$\sin \theta = \frac{|x_0|}{L} = \frac{x_0}{L}$$

$$\cos \theta = \frac{|y_0|}{L} = \frac{-y_0}{L}$$

Las coordenadas del punto P y los nuevos vectores $(\vec{r}, \vec{\theta})$ respecto el sistema \mathcal{R} vienen dadas por¹

$$\vec{OP} = L \sin \theta \vec{i} - L \cos \theta \vec{j}, \quad \vec{r} = \vec{OP} / \|\vec{OP}\| = \sin \theta \vec{i} - \cos \theta \vec{j}, \quad \vec{\theta} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \quad (1)$$

Para invertir el cambio de sistema de referencia también se expresa el punto O y los vectores (\vec{i}, \vec{j}) respecto el sistema \mathcal{S} . Se tiene

$$\vec{PO} = -L\vec{r}, \quad \vec{i} = \sin \theta \vec{r} + \cos \theta \vec{\theta}, \quad \vec{j} = -\cos \theta \vec{r} + \sin \theta \vec{\theta} \quad (2)$$

Para demostrar esto, en primer lugar, es evidente que $\vec{PO} = -\vec{OP} = -L\vec{r}$. Si multiplicamos la expresión de \vec{r} por $\sin \theta$ y la de $\vec{\theta}$ por $\cos \theta$ y sumamos

$$\left. \begin{aligned} \sin \theta \vec{r} &= \sin^2 \theta \vec{i} - \sin \theta \cos \theta \vec{j} \\ \cos \theta \vec{\theta} &= \cos^2 \theta \vec{i} + \cos \theta \sin \theta \vec{j} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{i} = \sin \theta \vec{r} + \cos \theta \vec{\theta}.$$

Análogamente, si multiplicamos \vec{r} por $-\cos \theta$ y $\vec{\theta}$ por $\sin \theta$ y sumamos, se obtiene la expresión de \vec{j} dada en (2).

Aplicando estas fórmulas para cada t , $P = P(t)$, $\theta = \theta(t)$, si denotamos $\vec{x}(t) = \vec{OP}(t)$ se tiene que la velocidad del péndulo en el instante t es

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \frac{d\vec{x}}{dt}(t) = \frac{d}{dt} (L \sin \theta(t) \vec{i} - L \cos \theta(t) \vec{j}) \\ &= (L \cos \theta(t) \vec{i} + L \sin \theta(t) \vec{j}) \frac{d\theta}{dt}(t) = L \frac{d\theta}{dt}(t) \vec{\theta}(t) \end{aligned} \quad (3)$$

Además, derivando respecto de t en (1) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt}(t) &= \frac{d}{dt} (\sin \theta(t) \vec{i} - \cos \theta(t) \vec{j}) = (\cos \theta(t) \vec{i} + \sin \theta(t) \vec{j}) \frac{d\theta}{dt}(t) = \frac{d\theta}{dt}(t) \vec{\theta}(t), \\ \frac{d\vec{\theta}}{dt}(t) &= \frac{d}{dt} (\cos \theta(t) \vec{i} + \sin \theta(t) \vec{j}) = (-\sin \theta(t) \vec{i} + \cos \theta(t) \vec{j}) \frac{d\theta}{dt}(t) = -\frac{d\theta}{dt}(t) \vec{r}(t) \end{aligned}$$

En consecuencia, el cálculo de la aceleración es inmediato a partir de (3):

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}(t) = \frac{d}{dt} \left(L \frac{d\theta}{dt} \vec{\theta}(t) \right) = L \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{\theta}(t) + L \frac{d\theta}{dt} \frac{d\vec{\theta}}{dt}(t) = -L \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \vec{r}(t) + L \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{\theta}(t) \quad (4)$$

Observaciones:

- De (3) se ve que el vector velocidad es tangente a la circunferencia de centro O y radio L que describe el péndulo. Además, $\vec{v}(t)$ varía con la *velocidad angular* $\theta'(t) = d\theta/dt$ y

$$\|\vec{v}(t)\| = L \|\theta'(t)\|.$$

- En (4) vemos que el vector aceleración se puede separar en dos componentes con el nuevo sistema de referencia:

$$\vec{a}(t) = a_R(t) \vec{r}(t) + a_T(t) \vec{\theta}(t)$$

donde

$$a_R(t) = -L \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2, \quad a_T(t) = L \frac{d^2\theta}{dt^2}(t),$$

llamándose $a_R(t)$ *aceleración radial o centrípeta* (que siempre se dirige hacia el origen O) y la componente $a_T(t)$ *aceleración tangencial* del péndulo, que solo se aplica cuando el ángulo $\theta(t)$ va acelerando ($a_T(t) = 0$ si la velocidad angular $\theta'(t)$ es constante).

¹Recuérdese que en el plano un vector perpendicular a $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y de igual módulo es $(-u_2, u_1)$.

Para describir el movimiento del péndulo aún nos queda determinar las fuerzas que actúan sobre el extremo de masa m .

En primer lugar, sobre la masa m actúa la fuerza constante de su peso en sentido vertical hacia abajo, es decir, $\vec{W}(t) = -mg\vec{j}$ para todo t . Expresándola en el nuevo sistema de referencia \mathcal{S} usando (2)

$$\vec{W}(t) = mg \cos \theta(t) \vec{r}(t) - mg \sin \theta(t) \vec{\theta}(t) \quad (5)$$

En segundo lugar, la varilla rígida ejerce una fuerza de *tensión* sobre la masa que va en dirección al origen O , por lo que se expresará como

$$\vec{T}(t) = -\tau \vec{r}(t)$$

donde la magnitud $\tau > 0$ es desconocida. Por tanto, la *resultante de fuerzas* que actúan sobre la masa m en el instante t es

$$\vec{F}(t) = \vec{W}(t) + \vec{T}(t) = (mg \cos \theta(t) - \tau) \vec{r}(t) - mg \sin \theta(t) \vec{\theta}(t) \quad (6)$$

Teniendo en cuenta esta última expresión (6) y (4) podemos aplicar entonces la segunda ley de Newton, $m\vec{a}(t) = \vec{F}(t)$ para describir el movimiento del péndulo

$$-mL \left(\frac{d\theta}{dt}(t) \right)^2 \vec{r}(t) + mL \frac{d^2\theta}{dt^2}(t) \vec{\theta}(t) = (mg \cos \theta(t) - \tau) \vec{r}(t) - mg \sin \theta(t) \vec{\theta}(t)$$

lo que es equivalente, separando las componentes radial y tangencial, a las dos ecuaciones escalares

$$mL \frac{d^2\theta}{dt^2}(t) = -mg \sin \theta(t) \quad (7)$$

$$-mL \left(\frac{d\theta}{dt}(t) \right)^2 = mg \cos \theta(t) - \tau \quad (8)$$

Aquí tenemos, en principio, un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas θ y τ . Sin embargo, la ecuación (7) es una ecuación diferencial con incógnita $\theta(t)$, independiente de τ . Si se resuelve ésta, la tensión desconocida τ se calcula directamente de despejar (8). Por ello, desde nuestro punto de vista, la ecuación interesante es la (7), en la que podemos simplificar la masa m en ambos miembros y obtener la **ecuación diferencial del péndulo simple**

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin \theta \quad (9)$$

Obsérvese que es una ecuación diferencial **no lineal** de orden 2, y que es independiente de la masa m . *El movimiento del péndulo solo depende de la longitud de la varilla L* (más precisamente, del cociente g/L).

El cálculo de las soluciones de esta ecuación (9) en apariencia sencilla no es nada simple. No hay una resolución analítica directa de esta ecuación diferencial no lineal. Desde el punto de vista práctico para calcular soluciones de este problema se pueden utilizar métodos numéricos, que dan aproximaciones buenas de la función $\theta(t)$ para unos valores iniciales dados $\theta(0) = \theta_0$, $\theta'(0) = \omega_0$.

Tanto para abordar el problema numérico como para calibrar el modelo en situaciones prácticas es necesario conocer las propiedades cualitativas de este modelo. Una buena forma de conocer estas propiedades consiste en expresar la ecuación (9) como un caso particular de **sistema autónomo de primer orden de dimensión 2**, haciendo el cambio

$$\begin{cases} x = \theta \\ y = \theta' \end{cases} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y \\ -(g/L) \sin x \end{pmatrix} \quad (10)$$

Es decir, el problema no lineal de segundo orden (9) es un caso particular de problema autónomo no lineal de primer orden

$$X' = F(X), \quad t \in \mathbb{R}, \quad X, F \in \mathbb{R}^2$$

2. ESTABILIDAD

Lo primero que tenemos que estudiar son los puntos críticos del sistema (10), es decir, los puntos $X_e \in \mathbb{R}^2$ que hacen $F(X_e) = 0$. En este caso, si denotamos $X_e = (x, y)^T$,

$$y = 0, \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, y = 0, k \in \mathbb{Z},$$

es decir, hay infinitos puntos de equilibrio, que denotaremos por $X_k := (k\pi, 0)^T$, $k \in \mathbb{Z}$. Obsérvese que los puntos $(2k\pi, 0)^T$, $k \in \mathbb{Z}$ corresponden al caso en el que el péndulo está parado en el punto $(-L, 0)$ de la circunferencia. En cambio, los puntos $((2k+1)\pi, 0)^T$, $k \in \mathbb{Z}$ representan el caso en el que el péndulo está parado en el $(L, 0)$. Recuérdese que el péndulo puede dar vueltas completas alrededor del origen O .

Como ya sabemos, para determinar el carácter de estos puntos de equilibrio linealizamos el problema sobre cada punto de equilibrio. La matriz jacobiana es

$$\frac{\partial F}{\partial X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(g/L) \cos x & 0 \end{pmatrix},$$

por lo que sobre cada punto de equilibrio X_k , $k \in \mathbb{Z}$ se tiene

$$A_k = \frac{\partial F}{\partial X}(X_k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(g/L)(-1)^k & 0 \end{pmatrix},$$

y el comportamiento de las soluciones de cada problema lineal

$$U' = A_k U \tag{11}$$

alrededor del origen nos dará información sobre el carácter del correspondiente punto de equilibrio X_k de (10). Es fácil ver que solo hay dos posibles matrices

$$A_0 = \frac{\partial F}{\partial X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(g/L) & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \frac{\partial F}{\partial X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (g/L) & 0 \end{pmatrix},$$

correspondientes a todos los puntos X_{2k} y X_{2k+1} , $k \in \mathbb{Z}$, respectivamente. Si denotamos $\alpha = g/L > 0$, se tiene que los autovalores de estas matrices son

$$p_0(\lambda) = \det(A_0 - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\alpha & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm \sqrt{\alpha} i$$

$$p_1(\lambda) = \det(A_1 - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ \alpha & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \alpha = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm \sqrt{\alpha}$$

En consecuencia, como A_1 tiene un autovalor positivo y otro negativo, sabemos que todos los puntos X_{2k+1} , $k \in \mathbb{Z}$ son puntos de silla (inestables) y que, además, cerca de cada X_{2k+1} el plano de fases de la ecuación no lineal (10) es similar al de la lineal (11).

Sin embargo, como los dos autovalores de A_0 son imaginarios puros, el problema linealizado (11) para k par tiene un centro estable en el origen, pero *esto no nos da ninguna información sobre cómo es la estabilidad de los puntos X_{2k} , $k \in \mathbb{Z}$.*

Aunque pudiera parecer poco habitual, el caso en el que la matriz jacobiana sobre ciertos puntos críticos tiene autovalores imaginarios puros, en la práctica aparece con cierta frecuencia. Este obstáculo en el caso del péndulo (y muchos otros) se supera teniendo en cuenta que también se puede ver como un problema *conservativo*, como veremos en la siguiente sección.

3. ESTABILIDAD DE PROBLEMAS ESCALARES CONSERVATIVOS

La ecuación del péndulo (9) es un caso particular de **los problemas escalares conservativos**²

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -f(x), \quad x, t \in \mathbb{R} \quad \text{donde } f(x) = u'(x) \tag{12}$$

para cierta función diferenciable $u(x)$ que se denomina **función potencial del campo conservativo** $f(x)$. Evidentemente, esta función potencial es una primitiva de $f(x)$ y, por consiguiente, no es única.

²Estos problemas se incluyen en una clase de problemas más amplios, los **problemas Hamiltonianos**.

Obsérvese que estos problemas surgen inmediatamente de aplicar la segunda ley de Newton sobre un cuerpo de masa m cuando sobre dicho objeto actúa una fuerza que solo depende de su posición pero no del tiempo. Los sistemas de masa-resorte con o sin amortiguamiento lineal vistos en la primera parte del tema también pertenecen a esta clase de problemas.

Estos problemas verifican una propiedad que facilitará el estudio de la estabilidad: la *ley de conservación de la energía mecánica*.

Para ver esto se multiplica (12) por $x'(t)$,

$$mx'(t)x''(t) = -f(x)x'(t),$$

se usa que

$$x'(t)x''(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} ((x'(t))^2)$$

e integramos en ambos miembros

$$\frac{m}{2} \int_0^t \frac{d}{ds} ((x'(s))^2) ds = - \int_0^t f(x(s))x'(s) ds.$$

Haciendo el cambio $w = x(s)$, $dw = x'(s) ds$ en la segunda integral, tenemos

$$\int_0^t f(x(s))x'(s) ds = \int_{x(0)}^{x(t)} f(w) dw = \int_{x(0)}^{x(t)} u'(w) dw = u(x(t)) - u(x(0)),$$

y, por tanto,

$$\frac{m}{2} ((x'(t))^2 - (x'(0))^2) = u(x(t)) - u(x(0)).$$

En consecuencia, cualquier solución de (12) que parta del punto $x(0) = x_0$ a una velocidad $x'(0) = v_0$ verifica que

$$\frac{1}{2}m(x'(t))^2 + u(x(t)) = \frac{1}{2}mv_0^2 + u(x_0), \quad \forall t \geq 0 \tag{13}$$

o dicho de otra forma, si se llama

$E_c(x(t)) = \frac{1}{2}m(x'(t))^2$ es la *energía cinética* del objeto que se mueve con velocidad $x'(t)$,

$E_p(x(t)) = u(x(t))$ es la *energía potencial* del objeto debida a la fuerza $u'(x(t))$,

$E = E_c(x(t)) + E_p(x(t))$ es la *energía mecánica total* del objeto,

la ecuación (13) significa que la *energía mecánica total del objeto cuyo movimiento viene dado por* (12) *se conserva a lo largo del tiempo*.

Podemos aplicar esto al caso del péndulo no lineal (9), que expresamos como problema autónomo mediante (10) y es de la forma (12) con $m = 1$, $f(x) = (g/L) \sin x$, cuya función potencial es $u(x) = -(g/L) \cos x + c$ para cualquier constante arbitraria $c \in \mathbb{R}$. Aunque teóricamente da igual la constante de integración que tomemos, en la práctica se recomienda elegir la c que hace que $u(0) = 0$, esto es, $c = g/L$, por lo que se suele tomar como función potencial $u(x) = (g/L)(1 - \cos x)$. Por tanto, la energía mecánica total del péndulo es

$$\frac{1}{2}(x'(t))^2 + \frac{g}{L}(1 - \cos x) = E \tag{14}$$

3.1 Curvas de energía

Veamos ahora para qué se usa esta ley de conservación en el estudio de la estabilidad de (12). En primer lugar, expresamos dicha ecuación como un sistema autónomo de dimensión 2 tomando $y = x'$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y \\ -\frac{1}{m}f(x) \end{pmatrix} \tag{15}$$

Obsérvese que con esta notación la ley de conservación de la energía mecánica implica que si consideramos la solución de (15) que arranque en $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, la energía mecánica total del sistema está determinada por

$$E = \frac{1}{2}my_0^2 + u(x_0),$$

por lo que dicha solución estará sobre la curva de nivel de la función

$$H(x, y) = \frac{1}{2}my^2 + u(x) \tag{16}$$

o *curva de energía* C_E en el plano XY dada por

$$C_E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } H(x, y) = E\}.$$

Como todas las curvas integrales de (15) conservan la energía, si estudiamos cómo son las curvas de nivel de (16) variando $E \in \mathbb{R}$ conoceremos cómo se comportarán las soluciones de (12).

3.2 Curvas de energía del péndulo simple

Para simplificar la presentación, consideremos el problema del péndulo no lineal (10) suponiendo sin pérdida de generalidad que $(g/L) = 1$. Por tanto, sus curvas de energía serán las curvas de nivel de la función

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + (1 - \cos x),$$

Así, para cada valor inicial $x(0) = x_0, y(0) = x'(0) = y_0$, se tiene el nivel

$$E = \frac{1}{2}y_0^2 + (1 - \cos x_0) \geq 0$$

y la correspondiente curva de energía

$$\begin{aligned} C_E &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \frac{1}{2}y^2 + (1 - \cos x) = E\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } y^2 - 2 \cos x = A\}, \\ A &= y_0^2 - 2 \cos x_0 \geq -2, \quad E = A/2 + 1 \end{aligned}$$

Dependiendo de cuánto valga $A \geq -2$ se tendrán distintos tipos de curvas de energía.

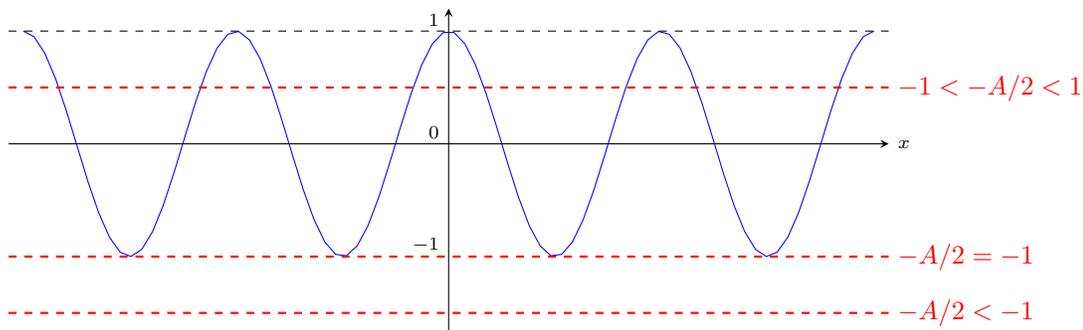
- Si $A = -2$ ($E = 0$): $(x, y) \in C_E$ si y solo si $y = 0, \cos x = 1$, esto es, la curva de energía solo está formada por los puntos

$$C_0 = \{(2k\pi, 0) : k \in \mathbb{Z}\}$$

- Si $A > -2$ ($E > 0$): para que C_E contenga puntos del plano, se necesita que

$$y^2 = 2 \cos x + A \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \geq -\frac{A}{2}$$

Dependiendo de la posición de A pueden ocurrir varias situaciones diferentes:



- Si $-2 < A < 2$ ($0 < E < 2$): existe $x_1 = \arccos(-A/2) \in (0, \pi)$ tal que

$$\cos x \geq -A/2, \quad \forall x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [-x_1 + 2k\pi, x_1 + 2k\pi]$$

Por tanto, la curva C_E estará formada por la unión de las gráficas de $y^2 = A + 2 \cos x$ en cada uno de los subintervalos $[-x_1 + 2k\pi, x_1 + 2k\pi], k \in \mathbb{Z}$. Además, por la periodicidad del coseno,

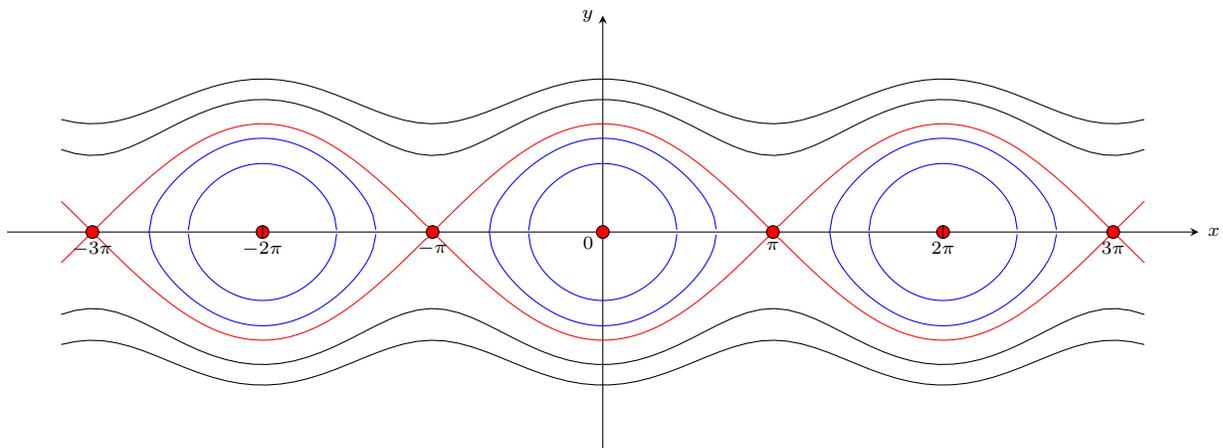


Figura 1: Curvas de energía del péndulo (10)

la gráfica de la función en cada uno de estos subintervalos es la misma que la que se tiene en el intervalo $[-x_1, x_1]$. En este intervalo $y^2 = A + 2 \cos x$ está bien definida y su gráfica es la unión de las dos ramas $y = \pm \sqrt{A + 2 \cos x}$, que se anulan justamente en los bordes $x = \pm x_1$. Cada rama por separado es derivable en el interior pero en los bordes la derivada se va a infinito o, lo que es lo mismo, la recta tangente a la curva en $x = \pm x_1$ es la vertical. En consecuencia, para cualquier constante A en este rango, la curva de energía correspondiente va a ser la unión de funciones de perfil elíptico (aunque no son exactamente elipses). En la Fig. 1 se pueden ver algunas de estas curvas en color azul.

- ▶ Si $A = 2$ ($E = 2$): este es el caso límite del anterior en el que $x_1 = \pi$. En este caso, la curva de energía es la unión de curvas elípticas cerradas que tienen la misma forma y que contactan unas con otras en los puntos $((2k + 1)\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$. En la Fig. 1 esta curva está representada en color rojo.
- ▶ Si $A > 2$ ($E > 2$): $y^2 = A + 2 \cos x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, por lo que la gráfica de esta curva constará de dos ramas, una positiva y otra negativa, $y = \pm \sqrt{A + 2 \cos x}$, que nunca cruzan el eje X. La rama positiva tendrá una gráfica similar a la del coseno (aunque algo más "aplanada" debido a la raíz cuadrada) pero que oscilará en $y \in [\sqrt{A - 2}, \sqrt{A + 2}]$, mientras que la negativa es simétrica a ella respecto al eje X. En la Fig. 1 se pueden ver algunas de estas curvas en color negro.

Ejercicio: deducir el sentido en el que se recorren estas curvas de energía cuando $t \geq 0$ aumenta. (Recuérdese que el vector tangente a la curva integral que pasa por el punto (x, y) es $\vec{v} = (x', y')$).

3.3 Estabilidad a partir de la energía potencial

Estudiando las propiedades de las curvas de energía del sistema, la estabilidad de los puntos críticos de estos problemas conservativos (12) nos la determinará la función potencial $u(x)$. Como los puntos críticos (si los tiene) serán los puntos

$$X_e = (x_e, 0)^T \quad \text{tal que } f(x_e) = 0 \quad \text{y } u'(x_e) = f(x_e) = 0,$$

en consecuencia, *son candidatos a ser extremos de la función potencial* (podrían ser también puntos de inflexión).

Teorema 1 *Si la energía potencial tiene un mínimo relativo en un punto crítico del sistema (15) dicho punto crítico es estable.*

Si la energía potencial alcanza un máximo relativo en un punto crítico del sistema (15) dicho punto crítico es inestable.

Si aplicamos este teorema al caso del péndulo no lineal (9), que ya sabemos que tiene potencial $u(x) = (g/L)(1 - \cos x)$, y consideramos los puntos críticos de la forma $\{(2k\pi, 0), k \in \mathbb{Z}\}$, cuyo carácter no pudimos determinar con el plano de fases, se tiene que $u'(2k\pi) = f(2k\pi) = 0$, $u''(2k\pi) = f'(2k\pi) > 0$. Por tanto, dichos puntos de equilibrio son mínimos relativos de la función potencial y, por el teorema anterior, *todos son estables*.

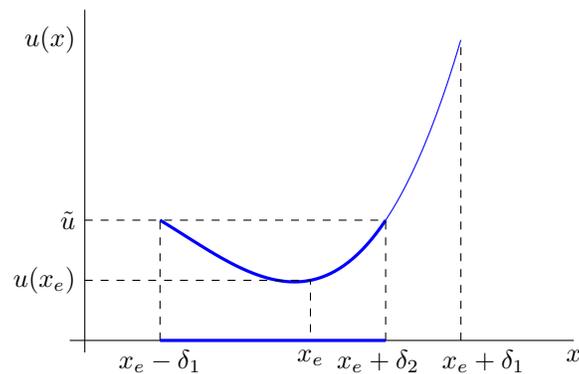
Si lo aplicamos a los puntos críticos $\{(2k+1)\pi, 0), k \in \mathbb{Z}\}$, se tiene que $u'((2k+1)\pi) = f((2k+1)\pi) = 0$, $u''((2k+1)\pi) = f'((2k+1)\pi) < 0$, por lo que dan máximos de la energía potencial y por tanto, son inestables como ya sabíamos.

Para demostrar el Teorema 1, hay que utilizar varias propiedades de las funciones convexas, que son conocidas por cualquier estudiante que haya hecho un curso elemental de cálculo infinitesimal (se puede consultar [3] por ejemplo):

Lema 2 Sea $u(x)$ una función con derivada segunda continua en \mathbb{R}

1. Si en un punto $x_e \in \mathbb{R}$ se tiene que $u'(x_e) = 0$ y $u''(x_e) > 0$, entonces $(x_e, u(x_e))$ es un mínimo local de $u(x)$, es decir, existe $\delta_1 > 0$ tal que $u(x) \geq u(x_e)$ para todo x tal que $|x - x_e| < \delta_1$. Además, en dicho entorno de radio δ_1 se tiene que $u'(x) \neq 0$ para todo $x \neq x_e$ y $u(x)$ es convexa (cóncava hacia arriba).
2. En las condiciones del apartado anterior, en el entorno cerrado $x \in [x_e - \delta_1, x_e + \delta_1]$ los valores máximos de $u(x)$ se deben tomar en los extremos $x = x_e - \delta_1$ o $x = x_e + \delta_1$. En consecuencia, si $\tilde{u} = \min\{u(x_e - \delta_1), u(x_e + \delta_1)\} > u(x_e)$, por el teorema de los valores intermedios, existirán $0 < \delta_2 \leq \delta_1$, $0 < \delta_3 \leq \delta_1$, tal que $u(x_e - \delta_2) = u(x_e + \delta_3) = \tilde{u}$ y para todo $x \in (x_e - \delta_2, x_e + \delta_3)$ se tiene $u(x_e) \leq u(x) < \tilde{u}$.
3. Si en un punto $x_e \in \mathbb{R}$ se tiene que $u'(x_e) = 0$ y $u''(x_e) < 0$, entonces $(x_e, u(x_e))$ es un máximo local de $u(x)$, es decir, existe $\delta_1 > 0$ tal que $u(x) \leq u(x_e)$ para todo x tal que $|x - x_e| < \delta_1$. Además, en dicho entorno de radio δ_1 se tiene que $u'(x) \neq 0$ para todo $x \neq x_e$ y $u(x)$ es cóncava (cóncava hacia arriba).

En el siguiente gráfico podemos ver lo que se afirma en los apartados 1 y 2 en el caso en que $\tilde{u} = u(x_e - \delta_1)$, por lo que se puede tomar $\delta_2 = \delta_1$.



Demostración del Teorema 1.- Tomemos una función potencial $u(x)$ tal que el punto crítico x_e ($f(x_e) = 0$) es además un cero de $u(x)$, $u(x_e) = 0$. Esto es posible ya que $u(x)$ es cualquier primitiva de $f(x)$, por lo que el problema de valor inicial de primer orden

$$u'(x) = f(x), \quad u(x_e) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

siempre tiene solución $u(x)$ única.

Por otra parte, por simplicidad podemos suponer que el punto crítico es el origen $(x_e, 0) = (0, 0)$ sin pérdida de generalidad. Si $x_e \neq 0$ basta con hacer el cambio de variable $z = x - x_e$ para obtener un sistema del tipo (12), $mz'' = -g(z)$, que tiene como punto de equilibrio el origen $g(0) = f(x_e) = 0$ con potencial $w'(z) = g(z)$ verificando $w(0) = 0$, $w'(0) = g(0) = f(x_e) = u'(x_e) = 0$.

Demostración de la primera afirmación del Teorema 1: Por hipótesis tenemos el punto crítico $(x_e, 0) = (0, 0)$ que es un cero y un mínimo relativo del potencial $u(x)$, es decir, $u(0) = u'(0) = 0$ y $u''(0) > 0$. Si le aplicamos el apartado 2 del Lema 2, se tiene que existen $\delta_2 > 0$, $\delta_3 > 0$ y $\tilde{u} > 0$ tal que $u(-\delta_2) = u(\delta_3) = \tilde{u}$ y para todo $x \in (-\delta_2, \delta_3)$ se tiene $0 = u(0) \leq u(x) < \tilde{u}$ y $u(x)$ es convexa.

Para demostrar que este punto crítico es estable tenemos que ver que tomando valores iniciales $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ suficientemente cercanos a dicho punto $(0, 0)$, la solución de (15) que arranca en dichos valores iniciales permanecerá cerca del $(0, 0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Tomemos entonces un vector inicial (x_0, y_0) tal que $|x_0| < \delta := \min\{\delta_2, \delta_3\}$ e y_0 es suficientemente pequeño tal que el nivel de energía de esta solución

$$E = \frac{1}{2}my_0^2 + u(x_0) < \tilde{u}$$

Esto es siempre posible porque existen infinitos y_0 tal que

$$\frac{1}{2}my_0^2 < \tilde{u} - u(x_0) \Leftrightarrow |y_0| < \sqrt{2/m} \sqrt{\tilde{u} - u(x_0)} < K_1 \delta, \quad \text{para cierta } K_1 > 0,$$

pues, como $\tilde{u} = u(\hat{\delta})$, ($\hat{\delta} = -\delta_2$ ó $\hat{\delta} = \delta_3$), se tiene $|\tilde{u} - u(x_0)| = \tilde{u} - u(x_0) = u(\hat{\delta}) - u(x_0) \leq K_2 |\hat{\delta} - x_0| < K_2 \delta$.

En consecuencia, la solución $(x(t), y(t))$ de (15) que arranca en este (x_0, y_0) caerá para todo t sobre la curva de nivel

$$C_E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \frac{1}{2}my^2 + u(x) = E\} \quad \text{donde el nivel } E \text{ verifica } u(x_0) \leq E < \tilde{u} \quad (17)$$

Aplicando el teorema de los valores intermedios se tiene que existirán $0 < \delta_4 < \delta$, $0 < \delta_5 < \delta$ tal que $u(-\delta_4) = u(\delta_5) = E$ y $0 \leq u(x) < E$ para todos los puntos $x \in (-\delta_4, \delta_5)$ y, además, $x_0 \in (-\delta_4, \delta_5)$. Si estudiamos la curva de nivel C_E (17) anterior en el intervalo cerrado $x \in [-\delta_4, \delta_5]$ se tiene que en todos estos puntos la coordenada y verifica

$$y^2 = \frac{2}{m} (E - u(x)) \geq 0 \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - u(x)}$$

por lo que su representación gráfica en el plano XY es simétrica respecto el eje OX, sólo se anula en $x = -\delta_4$ y $x = \delta_5$, y solo tendrá problemas de derivabilidad cuando $x \rightarrow (-\delta_4)^+$ y $x \rightarrow (\delta_5)^-$. Por tanto C_E será una curva cerrada en XY que en el eje OX toma valores máximos en los extremos $x = -\delta_4$ y $x = \delta_5$ y en el eje OY se mueve en $y \in (-\sqrt{2E/m}, \sqrt{2E/m})$. Como además $2E/m = y_0^2 + (2/m)u(x_0)$ y como al estar x_0 suficientemente cerca del 0 por Taylor se tiene que $0 < u(x_0) = u(0) + u'(0)x_0 + u''(0)x_0^2/2 + \mathcal{O}(x_0^3) = u''(0)x_0^2/2 + \mathcal{O}(x_0^3)$, se obtiene

$$\frac{2E}{m} = y_0^2 + u''(0)x_0^2/2 + \mathcal{O}(x_0^3) < K_3 \delta^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{2E}{m}} < K_4 \delta$$

para ciertas cotas $K_3 > 0$, $K_4 > 0$ de tamaño moderado. Por tanto, todos los puntos (x, y) de la curva cerrada C_E estarán contenidos en un entorno del origen de longitud $K\delta$, $K = \max\{1, K_1, K_4\}$ y, por tanto, la solución que arranca en un punto suficientemente cercano (x_0, y_0) del punto de equilibrio $(0, 0)$ permanecerán siempre cerca de dicho punto de equilibrio para todo t , por lo que dicho punto es entonces estable.

Demostración de la segunda afirmación del Teorema 1: Ahora tenemos que el punto crítico $(x_e, 0) = (0, 0)$ es un cero y un máximo relativo del potencial $u(x)$, es decir, $u(0) = u'(0) = 0$ y $u''(0) < 0$. Por el apartado 3 del Lema 2, se tiene que existe $\delta_1 > 0$ tal que para todo $x \in (-\delta_1, \delta_1)$ se tiene $u(x) \leq u(0) = 0$ y $u(x)$ es cóncava. En este caso siempre podremos encontrar un valor inicial (x_0, y_0) suficientemente cerca del origen tal que

$$E = \frac{1}{2}my_0^2 + u(x_0) > 0$$

Si dibujamos la curva C_E con este nivel de energía en el entorno $x \in (-\delta_1, \delta_1)$ se tiene que $E > 0 \geq u(x)$ por lo que en todos estos puntos la coordenada y verifica

$$y^2 = \frac{2}{m} (E - u(x)) \geq \frac{2E}{m} > 0$$

por lo que su representación gráfica en el plano XY es simétrica respecto el eje OX, pero $y \neq 0$ para todo x . De hecho, $y \geq \sqrt{2E/m}$ ó $y \leq -\sqrt{2E/m}$ y es derivable en todos los puntos. Por tanto, por muy cerca que tomemos los puntos (x_0, y_0) al origen, siempre habrá valores de t para los que $(x(t), y(t)) \in C_E$ están lejos de dicho punto de equilibrio. En consecuencia, es un punto de equilibrio inestable. \square

4. EL PÉNDULO CON PEQUEÑAS OSCILACIONES

En el caso en que $\theta(0) = \theta_0$ y $\theta'(0) = \theta'_0$ son pequeños, en la práctica el péndulo se comporta como un oscilador armónico. Esta es la propiedad que aplicó Christiaan Huygens en 1656 para construir el primer reloj de péndulo³. Hasta la década de los años 30 del siglo pasado, en el que se diseñaron los primeros relojes de cuarzo, los de péndulo fueron los relojes más precisos y más usados.

Como hemos visto anteriormente, si $\theta_0 \approx 0, \theta'_0 \approx 0$ estaríamos cerca del punto de equilibrio $(0, 0)$ que es estable, al igual que lo es como punto de equilibrio del sistema linealizado (11) para $k = 0$, por lo que la solución permanecerá cerca de dicho punto cuando t aumenta. De hecho, en este caso de pequeñas oscilaciones, el problema linealizado (11) es una excelente aproximación del problema no lineal.

Expresando este problema linealizado en el origen en términos de una ecuación escalar de segundo orden tenemos

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta \tag{18}$$

Esta ecuación es exactamente la misma que la del sistema masa-resorte sin amortiguamiento que vimos en el Tema 4 y, en consecuencia, *el péndulo linealizado se moverá con un movimiento armónico simple* de frecuencia $\omega = \sqrt{g/L}$ y período $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ siempre que θ sea suficientemente pequeño.

Sin embargo, hay que tener en cuenta que esta aproximación no sirve cuando el sistema produce oscilaciones grandes.

5. PERÍODO DEL PÉNDULO

Observando las curvas de energía del péndulo en la Fig 1 se ve claramente otra propiedad cualitativa interesante: *si partimos del reposo ($y = 0$) las soluciones de la ecuación (9) son periódicas*, es decir, si $\theta'(0) = 0$, existe $T > 0$ tal que $\theta(t + T) = \theta(t)$, pero no podemos asegurar que sea armónico. Evidentemente, esto incluye el caso en el que $\theta_0 = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ en el que la solución es la estacionaria $\theta(t) = k\pi, \forall t \geq 0$.

Partiendo de este hecho, se puede calcular teóricamente su período:

Teorema 3 Período del péndulo no lineal en reposo sin fricción: *Si el péndulo no lineal modelizado por (9) parte de la posición $\theta(0) = \theta_0$ en reposo ($\theta'(0) = 0$) su período viene dado por la integral elíptica de primera especie*

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - r^2 \sin^2 \phi}}, \quad r = \sin(\theta_0/2) \tag{19}$$

Demostración: En esta propiedad se sobreentiende que $\theta_0 \neq k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$. Además, como lo que pasa en todos los intervalos de longitud 2π se repite, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\theta_0 \in (-\pi, \pi) - \{0\}$.

Normalmente tenemos en mente que θ y $d\theta/dt$ son funciones de t pero sabemos que, por el teorema de la función implícita, también podemos ver t y, en consecuencia $d\theta/dt$, como funciones de θ , es decir,

$$t = t(\theta), \quad f(\theta) := \frac{d\theta}{dt}(t(\theta)) = \frac{1}{\frac{dt}{d\theta}(\theta)}. \tag{20}$$

Por una parte, como por la regla de la cadena, en general

$$\frac{d}{dt}(f(\theta(t))) = \frac{d}{d\theta}(f(\theta)) \frac{d\theta}{dt}$$

y por otra

$$\frac{d}{d\theta} ((f(\theta))^2) = 2f(\theta) \frac{d}{d\theta}(f(\theta)),$$

³Parece que usando una idea original de Galileo Galilei de unos 30 años antes.

aplicándolo a la $f(\theta)$ en (20), tenemos

$$\frac{d}{dt}(f(\theta(t))) = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} ((f(\theta))^2)$$

y, por tanto, la ecuación del péndulo (9) resulta

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} ((f(\theta))^2) = -\frac{g}{L} \sin \theta$$

Integrando en ambos miembros entre θ_0 y θ ,

$$\frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d}{ds} ((f(s))^2) ds = \frac{g}{L} \int_{\theta_0}^{\theta} (-\sin s) ds$$

y en consecuencia

$$\frac{1}{2} ((f(\theta))^2 - (f(\theta_0))^2) = \frac{g}{L} (\cos \theta - \cos \theta_0).$$

Como $\theta = \theta_0$ cuando $t = 0$,

$$f(\theta_0) = \left. \frac{d\theta}{dt} \right|_{t=0} = \theta'(0) = 0,$$

por lo que multiplicando ambos miembros de la igualdad anterior por L^2 queda

$$\frac{1}{2} \left(L \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = gL (\cos \theta - \cos \theta_0). \quad (21)$$

Para despejar $d\theta/dt$ hay que extraer las dos raíces posibles $\pm\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}$. Aquí hay que diferenciar si θ_0 es positivo o negativo para seleccionar el signo de $d\theta/dt$ y garantizar que $\cos\theta - \cos\theta_0 \geq 0$, teniendo en cuenta que $\theta'(0) = 0$:

Si $\theta_0 > 0$: necesariamente $-\theta_0 < \theta < \theta_0$, θ' es decreciente por (9) $\Rightarrow \theta'(t) < 0, t > 0$

Si $\theta_0 < 0$: necesariamente $\theta_0 < \theta < -\theta_0$, θ' es creciente por (9) $\Rightarrow \theta'(t) > 0, t > 0$

En consecuencia, de (21)

$$\text{Si } \theta_0 > 0: \quad L \frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{2gL} \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}, \quad -\theta_0 < \theta < \theta_0$$

$$\text{Si } \theta_0 < 0: \quad L \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{2gL} \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}, \quad \theta_0 < \theta < -\theta_0$$

Veamos el caso $\theta_0 > 0$ (dejándose como ejercicio estudiar el caso $\theta_0 < 0$). De lo anterior, separando las variables tenemos

$$dt = -\sqrt{\frac{L}{2g}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}, \quad -\theta_0 < \theta < \theta_0$$

Si llamamos $T > 0$ al período de oscilación, necesariamente $\theta(T) = \theta_0$. Como se mueve a intervalos regulares (recordemos que se mueve en el vacío, sin rozamiento), a la mitad del período llega hasta la máxima distancia en el lado negativo $\theta(T/2) = -\theta_0$ y vuelve a la posición inicial en $t = T$ pasando por el punto de equilibrio en $t = T/4$ y $t = 3T/4$. Por tanto, cuando $t \in [0, T/4]$, la variable θ va desde θ_0 decreciendo hasta 0. Así que si integramos la igualdad anterior

$$\int_0^{T/4} dt = -\sqrt{\frac{L}{2g}} \int_{\theta_0}^0 \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} = \sqrt{\frac{L}{2g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}$$

En la integral de la derecha aplicamos la fórmula trigonométrica $\cos \theta = 1 - 2\sin^2(\theta/2)$, con lo que tenemos, denotando $r = \sin(\theta_0/2)$,

$$\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0} = \sqrt{2} \sqrt{\sin^2(\theta_0/2) - \sin^2(\theta/2)} = r\sqrt{2} \sqrt{1 - (\sin(\theta/2)/r)^2}$$

Haciendo el cambio

$$\sin(\theta/2) = r \sin \phi \Rightarrow \sqrt{1 - (\sin(\theta/2)/r)^2} = \cos \phi, \quad \frac{d\theta}{r} = \frac{2 \cos \phi d\phi}{\sqrt{1 - r^2 \sin^2 \phi}},$$

y teniendo en cuenta que cuando $\theta = 0$, $\phi = 0$ y cuando $\theta = \theta_0$, $\sin \phi = \sin(\theta_0/2)/r = 1$, por lo que $\phi = \pi/2$, se llega a la expresión de T (19) buscada. \square

6. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Considérese el medallón de un péndulo simple de 1 m de longitud que parte del reposo pero se impulsa de modo que lleva una velocidad angular inicial de 7 rad/s (para simplificar los cálculos, tomar como valor para la aceleración de la gravedad $g = 10 \text{ m/s}^2$).
 - (a) Establecer la ecuación que describe la variación del ángulo que forma la varilla con la vertical así como los valores iniciales en este caso.
 - (b) Esbozar la curva de energía que pasa por los valores iniciales considerados. A partir de esta curva de energía, ¿cómo se va a mover el medallón del péndulo a medida que pasa el tiempo?
 - (c) Calcular el correspondiente problema de valor inicial del péndulo linealizado sobre el punto de equilibrio $(0, 0)$ y resolverlo para los valores iniciales considerados.
 - (d) Representar gráficamente la solución obtenida en el apartado anterior. ¿Hay alguna relación entre esta gráfica y la obtenida en el apartado (1b)?
2. Un péndulo simple vibra en un medio resistente en el cual el amortiguamiento es proporcional a la velocidad angular instantánea, por lo que su movimiento viene gobernado por la ecuación

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin \theta - \beta \frac{d\theta}{dt}, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \theta'(0) = \theta'_0, \quad t \geq 0, \quad \beta > 0 \quad (22)$$

- (a) ¿Esta ecuación es conservativa?
 - (b) Expresar la ecuación como un sistema autónomo de orden 1.
 - (c) Calcular sus puntos críticos.
 - (d) Si es posible, esquematizar el diagrama de fases cerca de cada punto crítico, deduciendo el carácter de dichos puntos según sea el valor del coeficiente de fricción β .
3. Un péndulo simple vibra en un medio en el cual el amortiguamiento es proporcional a la velocidad angular instantánea. Si la masa del péndulo pasa a través de la posición de equilibrio $\theta = 0$ en $t = 0$ con velocidad v_0 :
 - (a) Deducir la ecuación que gobierna el movimiento de dicho péndulo.
 - (b) Para valores moderados de θ , aproximar $\sin \theta \approx \theta$ y obtener la ecuación linealizada en el origen.
 - (c) Demostrar que el ángulo θ que forma la cuerda del péndulo con la vertical es

$$\theta = \frac{v_0}{\omega} e^{-\beta t/2} \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{L} - \left(\frac{\beta}{2}\right)^2}$$

donde β es la constante de amortiguamiento y L es la longitud del péndulo.

- (d) Encontrar β si la distancia recorrida durante un ciclo completo es la mitad de la del ciclo previo.
4. Consideremos el problema conservativo

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x - x^3$$

- (a) Hallar una expresión de la conservación de la energía.
 - (b) ¿Cómo son sus curvas de energía? Esbozar al menos tres curvas de energía de niveles representativos.
 - (c) Deducir la estabilidad de los puntos críticos del problema a partir de las curvas de energía.
5. Supongamos que el movimiento de un sistema masa-resorte con fuerza restauradora no lineal viene descrito por la ecuación diferencial

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\beta x^3, \quad (\beta > 0)$$

- (a) ¿Cuáles son sus puntos críticos? Analizar su estabilidad.

- (b) Hallar una expresión de la conservación de la energía.
 - (c) ¿Cómo son sus curvas de energía?
 - (d) Si para $t = t_0$ se tiene $x(t_0) = x_0$ y $x'(t_0) = v_0$, ¿cuál es el máximo desplazamiento desde la posición de equilibrio? ¿Cuál es la velocidad de la masa cuando pasa por $x = 0$?
6. Supongamos que el movimiento de una masa m está gobernado por la ecuación $mx'' = kx$ donde $k > 0$. Hallar las soluciones estacionarias del sistema. ¿Qué podemos decir acerca de la estabilidad de dichas soluciones estacionarias?
7. Consideremos una masa m localizada en $\vec{x} = x\vec{i} + y\vec{j}$, donde x e y son funciones del tiempo. La masa se mueve libremente en el plano XY en ausencia de gravedad y por tanto la distancia L desde el origen puede variar con el tiempo (la masa no está conectada al origen con una varilla como un péndulo)

- (a) Usando el mismo cambio de coordenadas introducido para el estudio del péndulo, averiguar la expresión del vector velocidad.
- (b) Demostrar que el vector aceleración es

$$\vec{a} = \left(\frac{d^2}{dt^2}\right)\vec{x} = \left(\frac{d^2L}{dt^2} - L\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)\vec{r} + \left(L\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dL}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right)\vec{\theta}$$

- (c) Si L es independiente de t y $\frac{d\theta}{dt}$ es constante, dibujar las trayectorias. > ¿Qué dirección tiene \vec{a} ? > ¿Es esto razonable?
 - (d) Si θ es independiente de t , dibujar posibles trayectorias. Usando el apartado (b), demostrar que la aceleración está en la dirección correcta.
8. Consideremos una masa m localizada en $\vec{x} = x\vec{i} + y\vec{j}$, donde x e y son funciones del tiempo. Supongamos que sobre m sólo actúa una fuerza que depende de L cuya dirección es \vec{r} y de magnitud $-g(L)$, denominada **fuerza central** (L no es constante como en el ejercicio 7 anterior).
- (a) Deducir las ecuaciones diferenciales que gobiernan al ángulo θ y a la distancia L (usar el apartado (b) del ejercicio 7).
 - (b) Demostrar que $L^2\frac{d\theta}{dt}$ es constante derivando respecto de t . A esta propiedad se le llama *ley de conservación del momento angular*.

9. Consideremos una partícula aislada con una carga positiva q_e y masa m_e localizada entre dos partículas fijas de carga positiva q_{p1} y q_{p2} respectivamente. La fuerza eléctrica entre dos cargas viene dada por $-F\frac{q_1q_2}{r^2}$ (cargas del mismo signo se repelen y cargas de distinto signo se atraen), donde F es una constante eléctrica universal, q_1 y q_2 son las dos cargas y r es la distancia entre las dos cargas.

- (a) Si la carga q_e está localizada a una distancia y de una de las partículas fijas, demostrar que

$$m_e\frac{d^2y}{dt^2} = F\frac{q_eq_{p1}}{y^2} - F\frac{q_eq_{p2}}{(r_0 - y)^2}$$

donde r_0 es la distancia entre las dos cargas fijas.

- (b) Calcular la posición de equilibrio de la partícula de carga q_e .
 - (c) ¿Es la posición de equilibrio estable? ¿Es razonable tu conclusión?
10. Las oscilaciones pequeñas de un péndulo simple tienen un período de 2 seg. Determine la longitud del péndulo. Encuentre la longitud correspondiente de un péndulo simple que tiene dos veces este período.

11. El medallón de un péndulo simple de 50 cm de longitud se desplaza de manera que la cuerda del péndulo forma un ángulo de 1° con la vertical. Si el péndulo se suelta de esta posición: (a) Encontrar el ángulo θ que la cuerda forma con la vertical en cualquier tiempo. (b) Determinar la frecuencia de la vibración. (c) Calcular la distancia recorrida por el medallón del péndulo durante un período. (d) Expresar la velocidad y aceleración del medallón en el centro de su trayectoria en coordenadas cartesianas.
12. Repetir el problema 11 anterior para un péndulo de 2 m de longitud. Comparar los resultados con los obtenidos en dicho problema y extraer conclusiones.
13. Repetir el problema 11 para un péndulo de 1 m de longitud que parte del mismo desplazamiento inicial (1° con la vertical) pero que lleva una velocidad angular inicial $\theta'(0) = 0.5^\circ/\text{s}$.

7. BIBLIOGRAFÍA

- [1] S. J. Farlow, *An introduction to differential equations and their applications*, Dover Publ. Inc., 1994.
- [2] R. Haberman, *Mathematical models: mechanical vibrations, population dynamics and traffic flow*, SIAM, 1998.
- [3] R. Larson, R. P. Hostetler, B. H. Edwards, *Cálculo con geometría analítica, volumen I*, McGraw-Hill Interamericana, 2006.
- [4] M. R. Spiegel, *Ecuaciones diferenciales aplicadas*, Prentice-Hall Hispanoamericana, 1983.
- [5] N. Wolanski, *Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias*, Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, 2007. (Puede descargarse gratuitamente de <http://mate.dm.uba.ar/wolanski>)