Autoevaluación de Modelización (Soluciones)

Tema 1: Modelos dinámicos discretos en Economía

1. *Modelo simplificado de oferta y demanda:* La cantidad de un producto ofrecida en una semana dada crece proporcionalmente a su precio en la semana anterior, mientras que la cantidad demandada por el público en una determinada semana depende de su precio actual. Así, si llamamos O_n a la oferta del producto, D_n a su demanda y P_n a su precio en la semana n, existirán constantes a, b, c positivas tal que
$$O_n = aP_{n-1}, \quad D_n = b - cP_n, \quad n \geq 1$$
Idealmente, se tiene que cumplir que $O_n = D_n$, $\forall n$.
   (a) Aplicar dicha condición y establecer un modelo que prediga la evolución del precio del producto.
   (b) Calcular la solución general del modelo.
   (c) Analizar la evolución del precio a medida que el tiempo aumenta, dependiendo de los coeficientes a, b, c.

   Resolución.-

   (a) Aplicando la condición de equilibrio $Q_n = D_n$ se obtiene el modelo
$$P_n = \left(-\frac{a}{c}\right) P_{n-1} + \frac{b}{c}, \quad n \geq 1,$$
   que predice la evolución del precio.
   (b) Iterando se obtiene la solución
$$P_n = \left(-\frac{a}{c}\right)^n P_0 + \frac{b}{c} \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{a}{c}\right)^k.$$
   Como $-a/c \neq 1$ pues a y c son positivos, podemos aplicar la fórmula de los primeros n términos de una progresión geométrica y obtenemos
$$P_n = \left(-\frac{a}{c}\right)^n P_0 + \frac{b}{c} \frac{\left(-\frac{a}{c}\right)^n - 1}{\left(-\frac{a}{c}\right) - 1},$$
   y, por tanto,
$$P_n = \frac{b}{a+c} + \left(-\frac{a}{c}\right)^n \left(P_0 - \frac{b}{a+c}\right), \quad n \geq 1.$$
   (c) El precio evolucionará según el valor de $(-a/c)$.
      i. Si $0 < a < c$, se tiene que $-1 < (-a/c) < 0$ y, por tanto, $P_n \to b/(a+c)$ cuando $n \to \infty$, por lo que el precio se estabilizará en este precio límite.
      ii. Si $a = c$, tendremos
$$P_n = \frac{b}{a+c} + (-1)^n \left(P_0 - \frac{b}{a+c}\right),$$
      por lo que las semanas "pares" (n par) el precio es $P_n = P_0$ mientras que las semanas "impares (n impar) el precio es $P_n = (b/c) - P_0$.
      iii. Si $a > c$, el precio va a ir oscilando con una amplitud cada vez mayor hasta cierto momento en que se hace negativo y el modelo dejará de tener aplicación.

2. Juan gana en la lotería 2 millones de euros y ha decidido retirarse. Para ello ingresa todo el dinero en un depósito a plazo fijo en un banco que le paga un 4% de interés anual, abonado anualmente, y cada año retira 30000 euros para vivir. Construye un modelo que describa cuánto dinero va a tener Juan en este depósito a lo largo de los años y calcula su solución. ¿Se quedará sin dinero en algún momento? ¿Y si retira 100000 euros? ¿Cuál sería la cantidad máxima que podría retirar anualmente para vivir tranquilo el resto de su vida?

   Resolución.- Sea C_t el capital que Juan tiene en el depósito en el año $t \geq 0$. Sea $R = 30000$ la cantidad que retira cada año y $r = 0.04$ el interés que le remunera el banco anualmente. Por tanto, cada año $t \geq 1$, C_t va a ser igual al capital del año anterior, más los intereses y menos la cantidad que ha retirado, esto es,

$$C_t = C_{t-1} + rC_{t-1} - R = (1+r)C_{t-1} - R, \quad t \geq 1, \quad C_0 = 2 \cdot 10^6.$$

   Resolviendo por iteración y aplicando la fórmula de la suma de los t primeros términos de una progresión aritmética, obtenemos

$$C_t = (1+r)^t C_o - R\,\frac{(1+r)^t - 1}{(1+r) - 1} = \left(C_0 - \frac{R}{r}\right)(1+r)^t + \frac{R}{r}, \quad t \geq 1. \tag{1}$$

   Aplicando esto a los valores que nos da el problema tenemos que

$$C_t = 1.25 \cdot 10^6\, 1.04^t + 7.5 \cdot 10^5 \to +\infty, \quad t \to \infty,$$

   por lo que no se quedará nunca sin dinero.

   Si aplicamos (1) para $R = 100000$, se obtiene

$$C_t = -5 \cdot 10^5\, 1.04^t + 2.5 \cdot 10^6 \to -\infty, \quad t \to \infty,$$

   y se quedará sin dinero. En concreto $C_t = 0$ cuando

$$5 \cdot 10^5\, 1.04^t = 2.5 \cdot 10^6 \Leftrightarrow 1.04^t = 5 \Leftrightarrow t = \frac{\ln 5}{\ln 1.04} = 41.03540661,$$

   por lo que el dinero le durará 41 años.

   Si Juan es muy mayor, con 41 años le será suficiente, pero si quiere que su familia herede algo, deberá retirar una cantidad R de forma que

$$C_0 - \frac{R}{r} > 0 \Leftrightarrow R < rC_0 = 80000,$$

   así que si retira menos de 80000 euros al año podrá vivir tranquilo el resto de su vida.