Autoevaluación de Modelización (Soluciones)

Tema 2: Ecuaciones en diferencias lineales

1. El modelo de B.J. Ball y E. Smolensky para una economía cerrada se basa en el sistema siguiente

$$C_t = cY_{t-1}, \quad K_t = \sigma Y_{t-1}, \quad Y_t = C_t + K_t - K_{t-1},$$

donde C_t designa el consumo en el año t, K_t es el stock de capital, Y_t es el producto nacional neto y c y σ son constantes positivas.

(a) Dar una interpretación económica de estas ecuaciones.

(b) Deducir una ecuación en diferencias para Y_t.

(c) Hallar condiciones necesarias y suficientes para que las soluciones de esta ecuación tenga oscilaciones explosivas.

Resolución.-

(a) La primera ecuación nos dice que el consumo en un año depende proporcionalmente al producto nacional del año inmediatamente anterior, creciendo cuando el producto crece y disminuyendo si lo hace el producto. La segunda ecuación nos dice que con el stock de un año ocurre lo mismo que con el consumo. Finalmente, la tercera ecuación nos dice que el producto nacional de un año es igual a la suma del consumo de dicho año y el exceso de stock respecto el año anterior, esto es, $K_t - K_{t-1}$.

(b) Incluyendo las dos primeras ecuaciones en la tercera tenemos que

$$Y_t = cY_{t-1} + \sigma Y_{t-1} - \sigma Y_{t-2} \Rightarrow Y_t - (c+\sigma)Y_{t-1} + \sigma Y_{t-2} = 0, \ t \geq 2,$$

lo que es una ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes y orden 2.

(c) El polinomio característico de esta ecuación es

$$\rho(\xi) = \xi^2 - (c+\sigma)\xi + \sigma$$

cuyas raíces son

$$\xi_1 = \frac{c+\sigma-\sqrt{\Delta}}{2}, \quad \xi_2 = \frac{c+\sigma+\sqrt{\Delta}}{2}, \quad \Delta = (c+\sigma)^2 - 4\sigma.$$

Dependiendo del signo de Δ tendremos un tipo de solución.

- Si $\Delta > 0$, $\xi_2 > 0$ y, como el término independiente del polinomio es positivo, $\xi_1\xi_2 = \sigma > 0$, se tiene $\xi_1 > 0$. Por tanto, en este caso no puede haber oscilaciones explosivas.
- Si $\Delta = 0$, $\xi_1 = \xi_2 = (c+\sigma)/2 > 0$, por lo que las soluciones tampoco pueden oscilar.
- Si $\Delta < 0$, las dos raíces son complejas conjugadas, $\xi_2 = \overline{\xi_1} = |\xi_2|e^{i\theta}$, donde θ es su argumento, por lo que las soluciones serán de la forma

$$Y_t = C_1|\xi_2|^t \sin\theta t + C_2|\xi_2|^t \cos\theta t,$$

por lo que solo habrá oscilaciones explosivas en el caso en el que $|\xi_2| > 1$, esto es,

$$\text{si } (c+\sigma)^2 < 4\sigma \quad \text{y} \quad |\xi_2| > 1.$$

Para ver si esto es posible,

$$|\xi_1|^2 = \left| \frac{c+\sigma}{2} + \frac{\sqrt{4\sigma-(c+\sigma)^2}}{2} i \right|^2 = \frac{(c+\sigma)^2}{4} + \frac{4\sigma-(c+\sigma)^2}{4} = \sigma,$$

y, por ser cantidades positivas, $(c+\sigma)^2 < 4\sigma$ si y solo si $0 < c+\sigma < 2\sqrt{\sigma}$, lo que solo es posible si $2\sqrt{\sigma} - \sigma > 0$, es decir, si $\sigma \in (0,4)$. Juntando las dos condiciones necesarias y suficientes, se tendrán oscilaciones si y solo si

$$\sigma \in (1,4), \quad 0 < c < 2\sqrt{\sigma} - \sigma.$$

2. *Mercado duopolista:* Supongamos que solo dos empresas A y B fabrican la totalidad de cierto producto. Supongamos que mediante estudios de mercado se ha llegado a las siguientes conclusiones:

   (a) El 50% de los consumidores que compran durante un mes el producto fabricado por A volverá a hacerlo el mes siguiente, y el resto cambiará al producto fabricado por B.

   (b) El 25% de los consumidores que compran durante un mes el producto fabricado por B volverá a hacerlo el mes siguiente, y el resto cambiará al producto fabricado por A.

   Si llamamos A_n y B_n las cantidades vendidas por las empresas A y B, respectivamente, durante el mes n (teniendo en cuenta que $A_n + B_n$ es el mercado total del mes n), formular un modelo que represente la evolución temporal de estas cuotas de mercado. Resolver el modelo en el caso en el que las cuotas iniciales son $A_0 = 20, B_0 = 30$ y estudiar qué pasará con dichas cuotas a lo largo del tiempo.

   Resolución.- Teniendo en cuenta las hipótesis (a) y (b) el modelo es

$$\begin{cases} A_{n+1} = \frac{1}{2}A_n + \frac{3}{4}B_n \\ B_{n+1} = \frac{1}{2}A_n + \frac{1}{4}B_n \end{cases}$$

   Si llamamos $Y_n = (A_n, B_n)^T$, esto es los mismo que escribir el sistema

$$Y_{n+1} = AY_n, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

   Para transformalo en una ecuación escalar de segundo orden, construimos la matriz Q cuya primera fila es, por ejemplo, $Q_1^T = (0, 1)$ y su segunda fila es $Q_2^T = Q_1^T A = (1/2, 1/4)$. Por tanto,

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad \det Q = -\frac{1}{2} \neq 0, \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = Q\,A\,Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

   Así que multiplicamos la ecuación $Y_{n+1} = AY_n$ por Q y aplicamos el cambio $Z_n = QY_n$ y obtenemos el sistema más simple $Z_{n+1} = \tilde{A}Z_n$. Si denotamos $Z_n = (z_{n,1}, z_{n,2})^T$, este sistema resulta

$$z_{n+1,1} = z_{n,2}, \quad z_{n+1,2} = \frac{1}{4}z_{n,1} + \frac{3}{4}z_{n,2}.$$

   Llamando $v_n = z_{n,1}$ esto se reduce a

$$v_{n+1} = z_{n,2}, \quad v_{n+2} = z_{n+1,2} = \frac{1}{4}v_n + \frac{3}{4}v_{n+1},$$

   lo que es una ecuación de segundo orden escalar

$$v_{n+2} - \frac{3}{4}v_{n+1} - \frac{1}{4}v_n = 0.$$

   El polinomio característico de esta ecuación es

$$\rho(\xi) = \xi^2 - \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}$$

   que tiene dos raíces reales, $\xi_1 = -1/4$, $\xi_2 = 1$, por lo que la solución general es

$$v_n = C_1 + C_2\left(-\frac{1}{4}\right)^n, \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

   Por tanto, deshaciendo los cambios,

$$Z_n = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\left(-\frac{1}{4}\right)^n\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow Y_n = Q^{-1}Z_n = C_1\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\left(-\frac{1}{4}\right)^n\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, exigiendo las condiciones iniciales $Y_0 = (A_0, B_0)^T = (20, 30)^T$, se obtiene la solución buscada

$$A_n = 30 - 10\left(-\frac{1}{4}\right)^n, \quad B_n = 20 + 10\left(-\frac{1}{4}\right)^n.$$

En consecuencia, cuando $n \to \infty$ se tendrá que $A_n \to 30$ y $B_n \to 20$, por lo que la empresa A terminará teniendo más cuota de mercado que la B.

3. Sin calcular la solución de las siguientes EDFs, estudiar sin son estables o no:

   (a) $4y_{n+2} + 3y_{n+1} + 2y_n = \sin\sqrt{n}$, $n \geq 0$.

   (b) $4y_{n+2} + 3y_{n+1} + 8y_n = \sqrt{n^3 + 1}$, $n \geq 0$.

   Resolución.-

   (a) Para ver si son estables aplicamos el teorema que dice que una ecuación de la forma $y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = d_n$ es estable si y solo si $|a_0| < 1$ y $|a_1| < 1 + a_0$. En este ejemplo, tenemos que dividir por 4 la ecuación para dejarla en forma mónica, por lo que

   $$a_0 = \frac{2}{4} < 1, \quad a_1 = \frac{3}{4} < 1 + a_0,$$

   y la ecuación es estable.

   (b) En este caso, aplicando lo mismo que en el apartado anterior, tenemos que $a_0 = \frac{8}{4} > 1$, por lo que la ecuación no puede ser estable.