Autoevaluación de Modelización (Soluciones)

Tema 3. Ecuaciones en diferencias no lineales. Bifurcación en sistemas discretos

1. Dado el esquema iterativo
$$x_{n+1} = 4x_n - x_n^2, \qquad n \geq 0,$$
determinar si tiene o no puntos fijos y puntos 2-periódicos y, en tal caso, si son atractores o repulsores. Usando Maxima o Maple, estudiar si tiene puntos 3-periódicos y determinar su carácter.

Resolución.- Denotamos el esquema como $x_{n+1} = f(x_n)$, donde $f(x) = 4x - x^2$.

Para calcular los puntos fijos resolvemos la ecuación $f(x) = x$, que da dos soluciones $x = 0$ y $x = 3$. Como $|f'(0)| = 4 > 1$ y $|f'(3)| = 2 > 1$, ambos puntos fijos son repulsores.

Para los 2-periódicos calculamos
$$f^2(x) = f(f(x)) = -x^4 + 8x^3 - 20x^2 + 16x$$
y resolvemos $f^2(x) = x$, que resulta la ecuación
$$-x^4 + 8x^3 - 20x^2 + 16x = 0.$$
Como sabemos que los dos puntos fijos cumplen esta ecuación, podemos dividir este polinomio por $x(x-3)$ (por Ruffini es simple), por lo que se reduce a resolver el polinomio $-x^2 + 5x - 5 = 0$, que tiene como raíces a los dos puntos 2-periódicos,
$$\alpha_1 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}.$$
Calculamos la derivada de $f^2(x)$ y comprobamos que
$$|(f^2(\alpha_1))'| = |(f^2(\alpha_2))'| = |-4| > 1,$$
por lo que ambos puntos 2-periódicos son repulsores.

Para calcular los puntos 3 periódicos es recomendable usar un programa de cálculo simbólico como Maple o wxMaxima. Con ellos encontramos que
$$f^3(x) = -x^8 + 16x^7 - 104x^6 + 352x^5 - 660x^4 + 672x^3 - 336x^2 + 64.$$
Para resolver la ecuación $f^3(x) = x$ usamos el hecho de que los puntos fijos 0 y 3 verifican esta ecuación, por lo que dividiendo $f^3(x) - x$ por $x(x-3)$ por Ruffini, el problema se reduce a resolver la ecuación
$$-x^6 + 13x^5 - 65x^4 + 157x^3 - 189x^2 + 105x - 21 = 0.$$
Con un simple gráfico de esta función en [0,4] podemos ver que tiene 6 raíces reales y con el comando `fsolve` de Maple o `find_root` de wxMaxima las calculamos numéricamente, resultando
$$0.4679111138, 0.7530203963, 1.652703645, 2.445041868, 3.801937736, 3.879385242.$$
Calculando la derivada de $f^3(x)$ y evaluándola en estos seis puntos se ve que en todos ellos $|(f^3(x))'| = 8 > 1$, por lo que se tienen seis puntos 3-periódicos repulsores (o dos 3-ciclos repulsores).

2. Determinar los puntos fijos y, si tiene, los puntos 2-periódicos del esquema de Baker

$$x_{n+1} = \begin{cases} 2x_n, & 0 \le x_n < 0.5 \\ 2x_n - 1, & 0.5 \le x_n \le 1 \end{cases}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

analizando si son atractores o repulsores. Calcular 10 iteraciones de este esquema de las órbitas que arrancan en $x_0 = 0.6$ y $x_0 = 0.61$.

Resolución.- Escribimos el esquema como $x_{n+1} = f(x_n)$ donde f es

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x < 0.5 \\ 2x - 1, & 0.5 \le x \le 1 \end{cases}$$

Para ver si tiene puntos fijos, buscamos en los dos subintervalos:

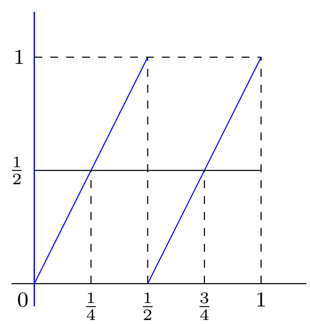
$$2x = x \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{y} \quad 2x - 1 = x \Leftrightarrow x = 1.$$

Por tanto, los puntos 0 y 1 son los únicos puntos fijos y son repulsores porque $f'(0) = f'(1) = 2 > 1$.

Para estudiar los 2-periódicos necesitamos calcular $f^2(x)$, que debe ser

$$f^2(x) = \begin{cases} 2f(x), & 0 \le f(x) < 0.5 \\ 2f(x) - 1, & 0.5 \le f(x) \le 1 \end{cases}$$

Es fácil ver dónde $f(x) < 0.5$ o mayor si graficamos $f(x)$:



Por tanto,

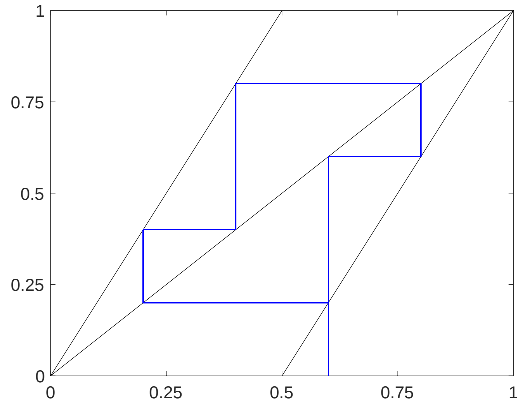
$$f^2(x) = \begin{cases} 2f(x), & 0 \le x < 0.25 \\ 2f(x) - 1, & 0.25 \le f(x) < 0.5 \\ 2f(x), & 0.5 \le x < 0.75 \\ 2f(x) - 1, & 0.75 \le f(x) \le 1 \end{cases} = \begin{cases} 4x, & 0 \le x < 0.25 \\ 4x - 1, & 0.25 \le f(x) < 0.5 \\ 4x - 2, & 0.5 \le x < 0.75 \\ 4x - 3, & 0.75 \le f(x) \le 1 \end{cases}$$

Estudiando los puntos que verifican $f^2(x) = x$ nos salen $x = 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$. Como 0 y 1 son puntos fijos, solo hay dos puntos 2-periódicos, $x = \frac{1}{3}$ y $x = \frac{2}{3}$. Como $f^2(1/3) = f^2(2/3) = 4 > 1$, los dos puntos periódicos son repulsores.

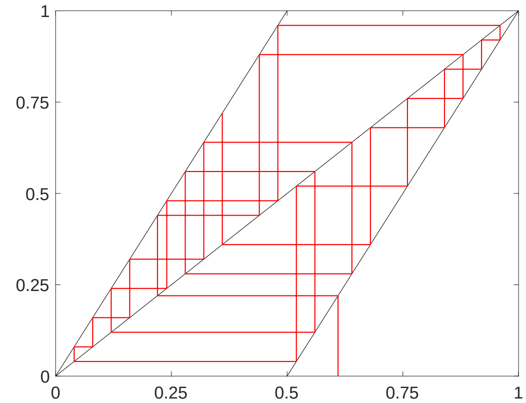
Computamos las 10 iteraciones pedidas

$x_0 = 0.6$	$x_0 = 0.61$
0.6	0.61
0.2	0.22
0.4	0.44
0.8	0.88
0.6	0.76
0.2	0.52
0.4	0.04
0.8	0.08
0.6	0.16
0.2	0.32
0.4	0.64

con lo que vemos que con $x_0 = 0.6$ obtenemos un 4-ciclo pero con una pequeña variación del valor inicial, $x_0 = 0.61$, el comportamiento de la órbita es completamente diferente. Esto se puede ver mejor con un diagrama de telaraña que hemos computado con 20 iteraciones.



$x_0 = 0.6$



$x_0 = 0.61$

Esto confirma que este esquema va a presentar un comportamiento caótico, es decir, una extrema sensibilidad a los valores iniciales.