Autoevaluación de Modelización (Soluciones)

Tema 4. Modelos dinámicos continuos. Algunos ejemplos

1. La policía descubre el cadáver de una profesora de Matemáticas. Para resolver el crimen es decisivo saber cuándo se cometió el homicidio. El forense llega a mediodía, y de inmediato observa que la temperatura del cadáver es de 30°C. Espera una hora y observa que la temperatura del cuerpo ha disminuido a 29°C. Asimismo, observa que la temperatura de la habitación se ha mantenido en 27°C. Suponiendo que la temperatura de la víctima era normal (37°C) en el momento de su fallecimiento, determinar la hora en que se cometió el crimen.

   Resolución.- Sabemos que la temperatura del cadáver sigue la ley de enfriamiento de Newton,

   $$T'(t) = K(T(t) - T_a), \quad K < 0.$$

   donde T_a es la temperatura ambiente, que según el enunciado, es $T_a = 27°\text{C}$. También sabemos que la temperatura inicial del cadáver es 37°C, es decir, que $T(t) = T_0 = 37°\text{C}$. Resolvemos el problema de valor inicial y obtenemos la solución

   $$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{Kt} = 27 + 10e^{Kt}.$$

   Sea t_1 el número de horas que han pasado desde que murió hasta que llega el forense a mediodía. Entonces sabemos que

   $$T(t_1) = 30, \quad T(t_1 + 1) = 29.$$

   Por tanto, tenemos que resolver el sistema de ecuaciones

   $$27 + 10e^{Kt_1} = 30, \quad 27 + 10e^{K(t_1+1)} = 29.$$

   Despejando e^{Kt_1} de ambas obtenemos que

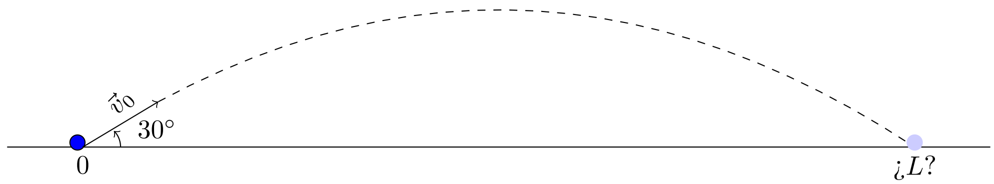
   $$e^{Kt_1} = \frac{3}{10},\ e^{Kt_1} = \frac{2}{10}e^{-K} \Rightarrow 2e^{-K} = 3 \Rightarrow K = -\ln(3/2) = -0.405.$$

   Por tanto,

   $$e^{-0.405t} = \frac{3}{10} \Rightarrow t_1 = \frac{\ln(3/10)}{-0.405} = 2.97,$$

   es decir, que han pasado prácticamente 3 horas desde que se cometió el homicidio hasta el mediodía, por lo que podemos concluir que la profesora fue asesinada sobre las 9 de la mañana.

2. Cristiano Ronaldo es capaz de lanzar un balón de fútbol de 450 gr a una velocidad de 117 km/h con un ángulo de 30° respecto a la horizontal. Suponiendo que la resistencia del aire es despreciable, ¿qué distancia hay entre el punto de lanzamiento y el punto en que cae el balón? ¿Qué trayectoria sigue el balón?



Resolución.- Sabemos que $|\vec{v}_0| = 117$ Km/h=32.5 m/s. Podemos suponer que no hay movimiento lateral del balón y el rozamiento del aire es despreciable, por lo que trabajamos en el plano XY, siendo el origen de coordenadas el punto desde que se lanza el balón. Desde que el balón sale impulsado del suelo la única fuerza que actúa sobre él es la de la gravedad $\vec{F} = (0, -mg)$, donde $m = 450$ gr $=$0.45 kg, y $g = 9.8$ m/s^2 es la aceleración de la gravedad. Por tanto, según la segunda ley de Newton

$$m\vec{a} = \vec{F} \Leftrightarrow m(v_x', v_y') = (0, -mg),$$

donde $\vec{v} = \vec{v}(t) =$ velocidad del balón en cada instante $t \geq 0$. Su valor inicial es $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$, por lo que hay que calcular las componentes de este vector $\vec{v}_0 = (v_{x,0}, v_{y,0})$ que, como sale del suelo con una inclinación de 30° por simple trigonometría resulta

$$v_{x,0} = |\vec{v}_0| \cos \pi/6 = 32.5\sqrt{3}/2, \quad v_{y,0} = |\vec{v}_0| \sin \pi/6 = 32.5/2.$$

Por tanto, desacoplando las dos componentes y simplificando la m, tenemos dos ecuaciones diferenciales de primer orden sencillas,

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x' = 0, \\ v_x(0) = 32.5\sqrt{3}/2 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} v_y' = -g, \\ v_y(0) = 32.5/2 \end{array} \right.$$

Fácilmente se obtiene que

$$v_x = 32.5\sqrt{3}/2, \quad \int_0^t v_y'(s)\, ds = \int_0^t (-g)\, ds \Rightarrow v_y = -9.8t + 32.5/2.$$

Para acabar el problema solo tenemos que calcular la posición del balón $(x(t), y(t))$ a partir de aquí, resolviendo otras dos ecuaciones sencillas

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = 32.5\sqrt{3}/2, \\ x(0) = 0 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} y' = -9.8t + 32.5/2, \\ y(0) = 0 \end{array} \right.$$

obteniendo

$$x(t) = 32.5\sqrt{3}/2\, t, \quad y = -9.8t^2/2 + 32.5t/2.$$

Como $t = \dfrac{2}{32.5\sqrt{3}}x$, el balón sigue la trayectoria parabólica (aproximando con dos cifras significativas)

$$y = -0.005x^2 + 0.58x$$

por lo que llega al suelo cuando $-0.005x^2 + 0.58x = 0$, es decir, cuando $x = L = 116$ m.

3. En la década de los 30 del siglo pasado, el biólogo y matemático G.F. Gause realizó el siguiente experimento que avaló la aplicación del modelo logístico para predecir la evolución de ciertas especies. Colocó 5 ejemplares del protozoo *Paramecium caudatum* en un tubo de ensayo con 0.5cm^3 de solución nutriente y contó el número diario de individuos durante 6 días seguidos. Observó experimentalmente que cuando la población era pequeña el protozoo se reproducía con una tasa del 230.9% diario, alcanzando en cuatro días un nivel máximo de 375 individuos con el que se saturó el tubo de ensayo. ¿Cuáles son los parámetros r y K de la ecuación logística? Dibujar la solución de la ecuación $p(t)$ durante los 6 días considerados. ¿Qué habría pasado si hubiera colocado inicialmente 100 ejemplares en el mismo tubo de ensayo (con los mismos nutrientes)? ¿Y si hubiera colocado 200?

Resolución.- Si $p = p(t) =$ número de protozoos en el tubo de ensayo en el día t, el modelo logístico dice que va a evolucionar según la ecuación

$$p' = r\left(1 - \frac{p}{K}\right)p, \quad p(0) = p_0$$

donde K es la capacidad de soporte del tubo de ensayo, es decir, el número máximo de protozoos que pueden vivir en él. Así que, según el enunciado, $K = 375$.

El parámetro r se calcula como la tasa de crecimiento cuando la población es baja, pues en esos momentos, como la población está muy por debajo de la capacidad de soporte, esta no influye en el crecimiento. Esto también se puede ver en la ecuación, porque si $p \approx 0$ entonces p/K es despreciable y la ecuación sería aproximadamente $p' = rp$. Según el enunciado, cuando p es pequeña, la población crece a una tasa del 230.9%, lo que significa que $r = 2.309$.

Por tanto, el problema de valor inicial a resolver en este caso particular es

$$p'(t) = 2.309\left(1 - \frac{p}{375}\right)p, \quad p(0) = 5,$$

cuya solución es

$$p(t) = \frac{Kp_0}{p_0 + (K - p_0)e^{-rt}} = \frac{1875}{5 + 370e^{-2.309t}}.$$

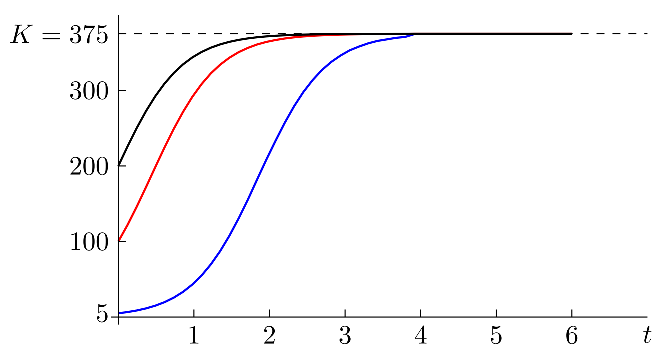
Si hubiera puesto 100 protozoos al principio, la población evolucionaría como

$$\hat{p}(t) = \frac{K\hat{p}_0}{\hat{p}_0 + (K - \hat{p}_0)e^{-rt}} = \frac{37500}{100 + 275e^{-2.309t}},$$

mientras que si hubiera puesto 200 protozoos, tendríamos

$$\tilde{p}(t) = \frac{75000}{200 + 175e^{-2.309t}}.$$

En la siguiente gráfica dibujamos los tres casos: en azul cuando $p_0 = 5$, en rojo el caso $\hat{p}_0 = 100$ y en negro $\tilde{p}_0 = 200$.



Así que si arranca con 100 protozoos, el tubo de ensayo se satura a los dos días aproximadamente ($\hat{p}(2) = 365$), mientras que si empieza con 200 se satura prácticamente el primer día ($\tilde{p}(1) = 345$).