Autoevaluación de Modelización (Soluciones)

Tema 5. Modelos en ecuaciones diferenciales ordinarias lineales. El oscilador armónico

1. Se encontró experimentalmente que cuando se ancla una bola metálica de masa 100 gr a un resorte vertical en reposo, este se estira 5 cm.

   (a) Si consideramos que sobre el mismo sistema masa-resorte vertical actúa una fuerza de rozamiento lineal con coeficiente de fricción $c = 1$, establezca la ecuación diferencial que describe el movimiento de dicho sistema a lo largo del tiempo. ¿Es un sistema sub o sobreamortiguado?

   (b) Si la bola inicialmente se coloca 1 cm por encima del punto de equilibrio y se impulsa hacia arriba con una velocidad de 20 cm/s, hallar la función que describe la posición de la bola en cualquier instante de tiempo. Esbozar una gráfica de dicha función. ¿La bola vuelve a pasar por el punto de equilibrio del sistema en algún momento?

   Resolución.-

   (a) La ecuación que modeliza un sistema de masa-resorte vertical con fricción lineal es

$$my'' + cy' + ky = -mg$$

   donde m es la masa, k la constante del resorte, c el coeficiente de fricción y $g \approx 10$ m/s^2 es la aceleración de la gravedad. Del enunciado tenemos que $m = 100$ gr$= 0.1$ Kg y $c = 1$. Para calcular la constante del resorte usamos que el punto de equilibrio del sistema está en $y_E = -0.05$ m. Por tanto, para que la fuerza del resorte compense el peso de la masa tiene que ocurrir que

$$ky_E = -mg \;\Rightarrow\; k = -\frac{mg}{y_E} = -\frac{0.1 \cdot 10}{-0.05} = 20.$$

   Para saber si es un sistema sub-amortiguado tenemos que calcular las raíces del polinomio característico $p(\lambda) = m\lambda^2 + c\lambda + k$ que son

$$\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}.$$

   Como $c^2 - 4km = 1 - 4 \cdot 20 \cdot 0.1 = -7 < 0$, es un sistema sub-amortiguado.

   (b) Este apartado nos da las condiciones iniciales del sistema, con lo que tenemos el problema de valor inicial

$$my'' + cy' + ky = -mg, \quad y(0) = -0.05 + 0.01 = -0.04, \quad y'(0) = 0.2$$

   Para resolverlo, hacemos el cambio $z = y - y_E = y + 0.05$, con el que este problema se transforma en el homogéneo

$$mz'' + cz' + kz = 0, \quad z(0) = 0.01, \quad z'(0) = 0.2$$

   Del apartado anterior tenemos el polinomio característico y sus raíces

$$\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{0.2} = -5 \pm 5\sqrt{7}i$$

   Por tanto, la solución general de la ecuación es

$$z(t) = Ae^{-5t}\sin(\omega t + \phi_0), \quad \omega = 5\sqrt{7}, \quad A, \phi_0 \in \mathbb{R}.$$

   Exigiendo las condiciones iniciales, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{l} z(0) = A\sin\phi_0 = 0.01 \\ z'(0) = -5A\sin\phi_0 + \omega A\cos\phi_0 = 0.2 \end{array}\right. \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} A\sin\phi_0 = 0.01 \\ A\cos\phi_0 = 0.25/\omega \end{array}\right.$$

   Así que se obtiene

$$A^2 = 0.01^2 + (0.25/\omega)^2 \;\Rightarrow\; A = 0.021,$$

$$\tan\phi_0 = \frac{0.01\omega}{0.25} \;\Rightarrow\; \phi_0 = 0.49,$$

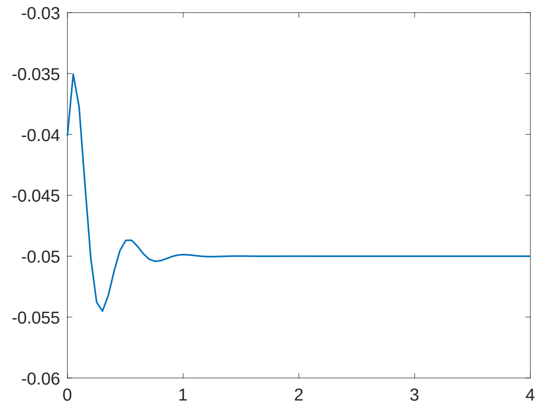
y, por tanto, la solución es

$$z(t) = 0.021e^{-5t}\sin(\omega t + 0.49).$$

Deshaciendo el cambio, la función que describe el movimiento vertical de la bola a lo largo del tiempo es

$$y(t) = -0.05 + 0.021e^{-5t}\sin(\omega t + 0.49)$$

cuya gráfica es



En consecuencia, la bola pasa infinitas veces por el punto de equilibrio, aunque a partir de los dos segundos, el movimiento será imperceptible en la práctica.

2. Se encontró experimentalmente que cuando se ancla una bola metálica de masa 5 kg a un resorte vertical en reposo, este se estira 40 cm en el vacío. (Nota: tomar la aceleración de la gravedad como $g = 10$ m/s^2)

   (a) Se empuja la bola hacia arriba 20 cm por encima de la posición de equilibrio y se suelta. Establezca el modelo diferencial que describe la posición de la bola en función del tiempo y resuélvalo. ¿Seguirá la bola un movimiento armónico simple? Esboce la solución.

   (b) Suponga que en lugar de lo anterior, cuando el sistema está en reposo se le aplica una fuerza externa al sistema $F(t) = 3\sin(5t)$. Establezca el modelo diferencial que describe la posición de la bola en función del tiempo y resuélvalo. ¿Seguirá la bola un movimiento armónico simple? ¿Hay resonancia? Esboce la solución.

Resolución.-

1. La ecuación que modeliza un sistema de masa-resorte vertical sin fricción es

$$my'' + ky = -mg$$

donde $m = 5$ es la masa, k la constante del resorte y $g \approx 10$ m/s^2 es la aceleración de la gravedad. Como en el ejercicio anterior, para calcular la constante del resorte aplicamos que

$$ky_E = -mg \Rightarrow k = -\frac{mg}{y_E} = -\frac{5 \cdot 10}{-0.4} = 125.$$

Como, además, nos dan valores iniciales, tenemos que resolver el problema de valor inicial

$$5y'' + 125y = -50, \quad y(0) = -0.4 + 0.2 = -0.2, \quad y'(0) = 0.$$

Para resolverlo hacemos el cambio $z = y + 0.4$, obteniendo el sistema homogéneo equivalente

$$z'' + 25z = 0, \quad z(0) = 0.2, \quad z'(0) = 0.$$

Calculamos las raíces del polinomio característico $p(\lambda) = \lambda^2 + 25 = 0$ que son complejas conjugadas $\lambda = \pm 5i$, por lo que la solución general de la ecuación es

$$z(t) = A\sin(5t + \phi_0), \quad A, \phi_0 \in \mathbb{R},$$

por lo que la bola va a seguir un movimiento armónico simple de frecuencia 5. Además, imponiendo las condiciones iniciales

$$\left\{ \begin{array}{l} z(0) = A\sin\phi_0 = 0.2 \\ z'(0) = 5A\cos\phi_0 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \phi_0 = \frac{\pi}{2},\ A = 0.2,$$

por lo que la solución particular buscada es

$$z(t) = 0.2\sin(5t + \frac{\pi}{2}), \quad t \geq 0,$$

y el movimiento de la bola en el resorte vertical es (deshaciendo el cambio)

$$y(t) = -0.4 + 0.2\sin(5t + \frac{\pi}{2}), \quad t \geq 0.$$

2. En este caso, el problema de valor inicial es

$$5y'' + 125y = -50 + 3\sin 5t, \quad y(0) = -0.4, \quad y'(0) = 0,$$

o con el cambio visto anteriormente,

$$5z'' + 125z = 3\sin 5t, \quad z(0) = 0, \quad z'(0) = 0.$$

La solución general de la homogénea es la misma que en el apartado anterior, $z^h(t) = A\sin(5t + \phi_0)$, pero ahora hay que buscar una solución particular de la completa. Como vemos que la fuerza externa vibra con la misma frecuencia $\omega = 5$ que el sistema masa-resorte, sabemos que hay resonancia mecánica y, por tanto, la bola no seguirá un movimiento armónico simple. Además, dicha fuerza externa, $3\sin 5t$, es solución de la ecuación homogénea, por lo que para resolver la ecuación tenemos que buscar soluciones particulares del tipo

$$z(t) = t\,(A_1 \sin 5t + A_2 \cos 5t)\,,$$

por lo que

$$z'(t) = (A_1 - 5A_2 t)\sin 5t + (A_2 + 5A_1 t)\cos 5t, \quad z''(t) = (-10A_2 - 25A_1 t)\sin 5t + (10A_1 - 25A_2 t)\cos 5t.$$

Llevando esto a la ecuación resulta,

$$-50A_2 \sin 5t + 50A_1 \cos 5t = 3\sin 5t, \quad t \geq 0,$$

de donde se obtiene directamente que $A_1 = 0$, $A_2 = -3/50$, por lo que la solución general de la ecuación es

$$z(t) = A\sin(5t + \phi_0) - \frac{3}{50} t \cos 5t.$$

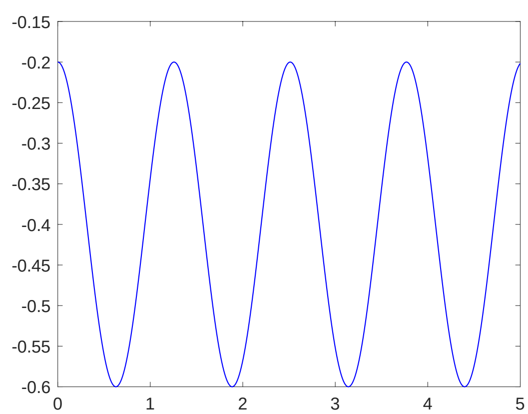
Imponiendo los valores iniciales tenemos

$$\left\{ \begin{array}{l} z(0) = A\sin\phi_0 = 0 \\ z'(0) = 5A\cos\phi_0 - \dfrac{3}{50} = 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow\ \phi_0 = \pi,\ A = \frac{3}{250} = 0.012.$$

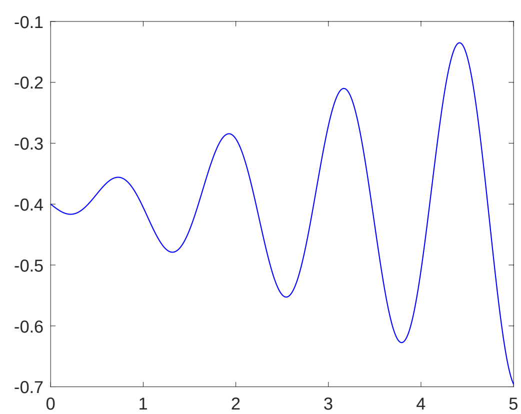
Obsérvese que podría haberse tomado también $\phi_0 = 0, A = -0.012$, pero se prefiere tomar la amplitud A positiva. Por tanto, la solución buscada es

$$y(t) = -0.4 + 0.012\sin(5t + \pi) - \frac{3}{50} t \cos 5t,$$

lo que hace que el movimiento de la bola se amplíe cada vez más hasta que el sistema se rompe.



Solución de (a)



Solución de (b)