Autoevaluación de Modelización (Soluciones)

Tema 6. Sistemas autónomos: ciclos límite y atractores extraños

1. Se considera un sistema presa-depredador en el que el depredador tiene otras alternativas de alimentación:

$$x' = x(\alpha_1(\beta_1 - x) - \gamma_1 y), \quad y' = y(\alpha_2(\beta_2 - x) + \gamma_2 y)$$

Calcular los puntos críticos de este modelo para el caso

$$\alpha_1 = 0.5,\ \beta_1 = 0.5,\ \gamma_1 = 0.4, \alpha_2 = 0.2,\ \beta_2 = 0.3,\ \gamma_2 = 0.2$$

y clasificarlos, hacer un esbozo que refleje cómo serán las órbitas cerca de dichos puntos críticos. A partir de este diagrama de fases, deducir cómo van a evolucionar las poblaciones de presas y depredadores a lo largo del tiempo.

Resolución.- Lo primero que tenemos que hacer es buscar los puntos de equilibrio de este sistema, esto es, los puntos (x, y) con $x \geq 0, y \geq 0$, tal que

$$x(\alpha_1(\beta_1 - x) - \gamma_1 y) = 0, \quad y(\alpha_2(\beta_2 - x) + \gamma_2 y) = 0.$$

Resolviendo el sistema, salen tres puntos de equilibrio positivos diferentes siempre que $\beta_1 > \beta_2$, a saber,

$$P_1 = (0, 0), \quad P_2 = (\beta_1, 0), \quad P_3 = (A, B),$$

donde

$$A = \frac{\alpha_1\beta_1\gamma_2 + \alpha_2\beta_2\gamma_1}{\alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\gamma_1}, \quad B = \frac{\alpha_1(\beta_1 - \beta_2)}{\gamma_1},$$

siendo P_3 el punto de corte de las dos isoclinas $\alpha_1(\beta_1 - x) - \gamma_1 y = 0$, $\alpha_2(\beta_2 - x) + \gamma_2 y = 0$.

En este caso particular, son

$$P_1 = (0, 0), \quad P_2 = (0.5, 0), \quad P_3 = (0.367, 0.067).$$

Para ver su carácter, hay que estudiar la matriz jacobiana en cada uno de estos puntos. Derivando

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 - 2\alpha_1 x - \gamma_1 y & -\gamma_1 x \\ -\alpha_2 y & \alpha_2\beta_2 - \alpha_2 x + 2\gamma_2 y \end{pmatrix},$$

por lo que

$$J(P_1) = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2\beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0.06 \end{pmatrix},$$

tiene dos autovalores reales positivos (0.25 y 0.06) y, como consecuencia, el origen es un nodo repulsor, tanto del problema linealizado como del no lineal.

$$J(P_2) = \begin{pmatrix} -\alpha_1\beta_1 & -\gamma_1\beta_1 \\ 0 & \alpha_2(\beta_2 - \beta_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.25 & -0.2 \\ 0 & -0.04 \end{pmatrix},$$

de lo que deducimos que el punto P_2 es un nodo atractor porque la matriz tiene dos autovalores reales negativos (-0.25 y -0.04).

En cuanto a P_3, como (A, B) pertenece a las dos isoclinas, se tiene que

$$\alpha_1\beta_1 - 2\alpha_1 A - \gamma_1 B = -\alpha_1 A, \quad \alpha_2\beta_2 - \alpha_2 A + 2\gamma_2 B = \gamma_2 B,$$

y

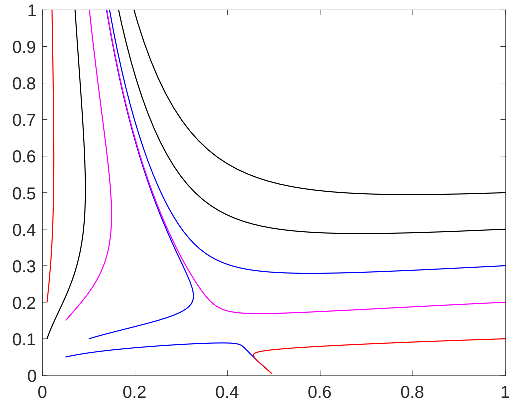
$$J(P_3) = \begin{pmatrix} -\alpha_1 A & -\gamma_1 A \\ -\alpha_2 B & \gamma_2 B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.073 & -0.147 \\ -0.013 & 0.013 \end{pmatrix}.$$

Como

$$D = \det J(P_3) = -0.0029 < 0, \quad T = \operatorname{tr} J(P_3) = -0.06 < 0, \quad T^2 - 4D > 0,$$

sabemos que P_3 es un punto de silla.

El diagrama de fases de este problema resulta aproximadamente



Podemos concluir que si el número de depredadores es bajo, a lo largo del tiempo éstos desaparecerán (se acercan al valor $(0.5, 0)$). Desde que el número de depredadores sea mayor que un cierto nivel (aproximadamente $y = 0.1$), la población de presas va a disminuir drásticamente. En cambio, como los depredadores tienen otras posibilidades de alimentación, seguirán aumentando a lo largo del tiempo.

2. Sea $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$.

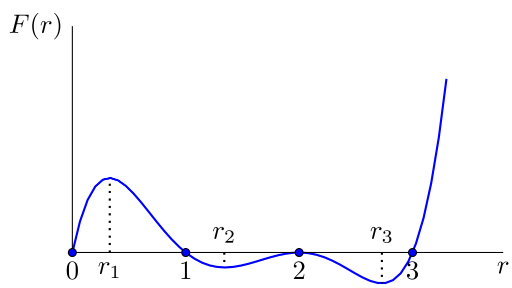
   (a) Demostrar que el sistema
   $$x' = -y + x\frac{F(r)}{r}, \quad y' = x + y\frac{F(r)}{r}$$
   tiene soluciones periódicas si $F(r)$ tiene ceros no nulos. En tal caso, ¿cuál es la dirección del movimiento sobre las trayectorias cerradas del diagrama de fases?

   (b) Considérese el sistema anterior con $F(r) = r(r-2)^2(r^2-4r+3)$. Determinar todas sus soluciones periódicas y su estabilidad.

Resolución.-

(a) Si llamamos
$$f(x,y) = -y + x\frac{F(r)}{r}, \qquad g(x,y) = x + y\frac{F(r)}{r},$$
aplicando la regla de la cadena obtenemos que
$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r}\left(xf(x,y) + yg(x,y)\right) \qquad \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r^2}\left(-yf(x,y) + xg(x,y)\right)$$
de donde resulta
$$\frac{dr}{dt} = F(r) \qquad \frac{d\theta}{dt} = 1.$$
Por tanto, el sistema propuesto tiene soluciones periódicas si el sistema $r' = F(r)$ tiene puntos de equilibrio positivos, esto es, si $F(r)$ tiene ceros no nulos. Obsérvese que si $F(0) = 0$, lo que se tendría es que el (0,0) es punto de equilibrio del sistema original. De la ecuación $\theta' = 1$ podemos deducir que $\theta = t + \theta_0$, por lo que las trayectorias cerradas del diagrama de fases se van a recorrer en sentido positivo, esto es, en contra de las agujas del reloj.

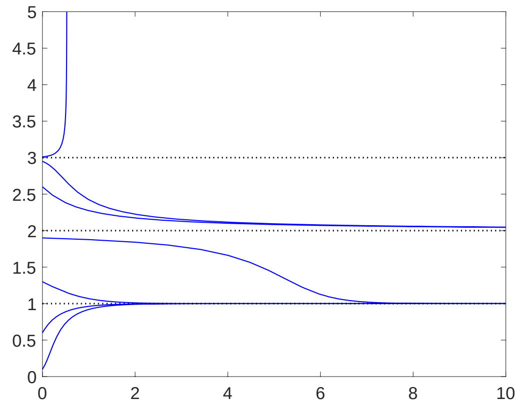
(b) En primer lugar estudiamos el carácter de los puntos críticos de
$$r' = F(r) = r(r-2)^2(r^2-4r+3) = r(r-1)(r-2)^2(r-3).$$
La representación gráfica de $F(r)$ es



Además, $r'' = F'(r)r' = F'(r)F(r)$, donde
$$F'(r) = (r-2)(5r^3 - 22r^2 + 25r - 6),$$
que se anula en 2 y en tres números reales más $0 < r_1 < 1 < r_2 < 2 < r_3 < 3$. Si los aproximamos numéricamente resultan $r_1 \approx 0.33$, $r_2 \approx 1.34$, $r_3 \approx 2.73$, correspondientes a los tres extremos locales que vemos en la gráfica de $F(r)$. Entonces, estudiando el signo de r' y r'' podemos deducir la curvatura de las curvas solución:

$0 < r < r_1$	$F > 0$	$F' > 0$	$r' > 0$	$r'' > 0$	
$r_1 < r < 1$	$F > 0$	$F' < 0$	$r' > 0$	$r'' < 0$	
$1 < r < r_2$	$F < 0$	$F' < 0$	$r' < 0$	$r'' > 0$	
$r_2 < r < 2$	$F < 0$	$F' > 0$	$r' < 0$	$r'' < 0$	
$2 < r < r_3$	$F < 0$	$F' < 0$	$r' < 0$	$r'' > 0$	
$r_3 < r < 3$	$F < 0$	$F' > 0$	$r' < 0$	$r'' < 0$	
$r > 3$	$F > 0$	$F' > 0$	$r' > 0$	$r'' > 0$	

Así que las soluciones de $r' = F(r)$ serán de la forma



por lo que el problema original tiene tres soluciones periódicas que son ciclos límite: las circunferencias centradas en el origen y de radios 1, 2 y 3. Viendo la gráfica anterior, vemos que la circunferencia de radio 1 es atractora, la de radio 2 es semi-estable (si $r < 2$ las curvas se alejan mientras que si $r > 2$ se acercan) y la de radio 3 es repulsora. Además, el origen es un punto de equilibrio repulsor.

Todo esto se puede ver en el diagrama de fases: