Autoevaluación de Modelización (Soluciones)

Tema 7. Problemas conservativos. El péndulo

1. Considérese el medallón de un péndulo simple de 98 cm de longitud que se levanta hasta formar un ángulo de 60° con la vertical y se suelta.

   (a) Establecer la ecuación que describe la variación del ángulo que forma la varilla con la vertical así como los valores iniciales en este caso.

   (b) Esbozar la curva de energía que pasa por los valores iniciales considerados. A partir de esta curva de energía, ¿cómo se va a mover el medallón del péndulo a medida que pasa el tiempo?

   (c) Calcular el correspondiente problema de valor inicial del péndulo linealizado sobre el punto de equilibrio $(0, 0)$ y resolverlo para los valores iniciales considerados.

   (d) Representar gráficamente la solución obtenida en el apartado anterior. ¿Hay alguna relación entre esta gráfica y la obtenida en el apartado (1b)?

Resolución.-

(a) Como $g/L = 9.8/0.98 = 10$, la ecuación que describe la variación del ángulo $\theta = \theta(t)$ que forma la varilla con la vertical junto con los valores iniciales es

$$\theta'' = -10\sin\theta, \quad \theta(0) = \frac{\pi}{3}, \quad \theta'(0) = 0.$$

(b) Esta ecuación diferencial es conservativa pues es de la forma $\theta'' = -f(\theta)$, donde $f(\theta) = 10\sin\theta = u'(\theta)$ donde

$$u(\theta) = \int f(\theta)\, d\theta = -10\cos x + C, \quad \forall C \in \mathbb{R},$$

son las infinitas funciones potenciales del problema. Por simplicidad tomamos C de forma que $u(0) = -10 + C = 0$, es decir, $C = 10$ y tomamos como potencial

$$u(\theta) = 10(1 - \cos\theta).$$

Sabemos que las soluciones o curvas de energía de este problema son las curvas de nivel de la función

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + u(x) = \frac{1}{2}y^2 + 10(1 - \cos x)$$

con nivel de energía E dado por las condiciones iniciales $x_0 = \theta(0) = \pi/3$, $y_0 = \theta'(0) = 0$, esto es,

$$E = \frac{1}{2}\cdot 0^2 + 10(1 - \cos\frac{\pi}{3}) = 5.$$

Por tanto, la curva de energía es

$$C_E = \left\{(x, y) \,:\, \frac{1}{2}y^2 + 10(1 - \cos x) = 5\right\} = \left\{(x, y) \,:\, y = \pm\sqrt{20\cos x - 10},\, 20\cos x - 10 \geq 0\right\}.$$

Se tiene que $20\cos x - 10 \geq 0$ si y solo si $\cos x \geq 1/2$, lo que ocurre para todo

$$x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right].$$

En nuestro caso particular, como $x_0 = \pi/3$, la curva de energía es la correspondiente al intervalo $x \in [-\pi/3, \pi/3]$. Para estos valores de x, $y = \pm\sqrt{20\cos x - 10}$ son dos ramas de una curva elíptica. Cuando $y = \sqrt{20\cos x - 10}$, tenemos un arco de elipse que une los puntos $(-\pi/3, 0)$ y $(\pi/3, 0)$ pasando en el eje Y por el punto $(0, \sqrt{10})$. La rama $y = -\sqrt{20\cos x - 10}$ es justo la curva simétrica respecto el eje X. Por tanto C_E es una curva cerrada elíptica.

Además, viendo que el vector tangente a la curva de energía es $\vec{v} = (x', y') = (y, -10\sin x)$, se tiene que en el primer cuadrante, $\vec{v} = (+, -)$; en el segundo cuadrante, $\vec{v} = (+, +)$; en el tercero, $\vec{v} = (-, +)$ y en el cuarto $\vec{v} = (-, -)$ por lo que sobre la curva de energía el movimiento será a favor de las agujas del reloj.

Esto quiere decir que el péndulo se moverá indefinidamente entre la posición inicial y la posición que forma un ángulo de $-60°$ con la vertical, en la que se para y vuelve hacia el punto de equilibrio. Además la mayor velocidad que alcanza en su movimiento la lleva justo cuando pasa por el punto de equilibrio, que es $\sqrt{10}$ m/s.

(c) El problema linealizado sobre el $(0,0)$ es

$$\theta'' = -10\,\theta, \quad \theta(0) = \frac{\pi}{3}, \quad \theta'(0) = 0,$$

lo que es el modelo del oscilador armónico, cuya solución general es el movimiento armónico simple

$$\theta(t) = A\sin(\sqrt{10}t + \phi_0), \quad A, \phi_0 \in \mathbb{R}.$$

Exigiendo las condiciones de frontera resulta

$$\begin{cases} A\sin\phi_0 = \frac{\pi}{3} \\ \sqrt{10}A\cos\phi_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{\pi}{3},\ \phi_0 = \frac{\pi}{2}.$$

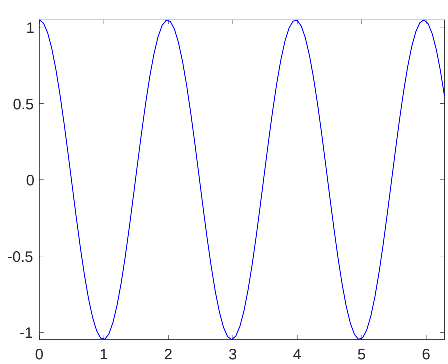
por lo que el péndulo se mueve con un movimiento armónico simple de frecuencia angular $\sqrt{10}$, amplitud $\pi/3$ y período $T = 2\pi/\sqrt{10}$.
Si hacemos un gráfico de la curva en el plano

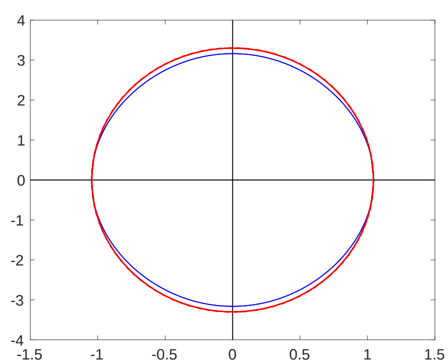
$$\begin{aligned}(x,y) = &\ (\theta(t), \theta'(t)) = (\tfrac{\pi}{3}\sin(\sqrt{10}t + \pi/2), \sqrt{10}\tfrac{\pi}{3}\cos(\sqrt{10}t + \pi/2)) \\ = &\ (\tfrac{\pi}{3}\cos\sqrt{10}t, -\sqrt{10}\tfrac{\pi}{3}\sin\sqrt{10}t),\ t \geq 0,\end{aligned}$$

tenemos la elipse centrada en el origen y de semiejes $\pi/3$ y $\sqrt{10}\pi/3$, pues

$$\frac{x}{\pi/3} = \cos\sqrt{10}t,\ \frac{y}{\sqrt{10}\pi/3} = -\sin\sqrt{10}t \Rightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{\pi}{3}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{10}\frac{\pi}{3}\right)^2} = 1,$$

lo que es una buena aproximación a la curva de energía vista en el apartado (a).
En la gráfica siguiente, a la izquierda, podemos ver la solución $\theta(t)$ para $t \in [0, 2\pi]$, en la que vemos el M.A.S. anterior (observe que $\pi/3 \approx 1.0472$). En la gráfica de la derecha hemos dibujado en azul la curva de energía del problema no lineal del apartado (a) y la elipse obtenida del linealizado del apartado (b) en rojo. Vemos que claramente ésta es una buena aproximación de la no lineal.





2. Consideremos una nave espacial, de masa m_n, localizada en un punto del espacio entre la Tierra, de masa $m_T \approx 6 \cdot 10^{24}$ kg, y la Luna, de masa $m_L \approx 7 \cdot 10^{22}$ kg. La fuerza gravitacional entre dos masas es una fuerza de atracción de magnitud $G\frac{m_1 m_2}{r^2}$ (donde G es la constante gravitacional universal, m_1 y m_2 son las dos masas y r es la distancia entre las dos masas).

   (a) Si la nave está localizada a una distancia y del centro de la Tierra, demostrar que

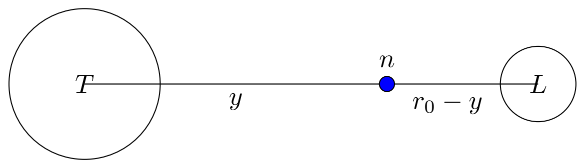
   $$m_n \frac{d^2y}{dt^2} = -G\frac{m_T m_n}{y^2} + G\frac{m_L m_n}{(r_0 - y)^2}$$

   donde r_0 es la distancia entre la Tierra y la Luna. (Asúmase que la Tierra no tiene efecto sobre la Luna, es decir, que ambas están fijas en el espacio).

   (b) Calcular la posición de equilibrio de la nave.

   (c) ¿Es la posición de equilibrio estable? ¿Es razonable tu conclusión?

Resolución.-



(a) Las fuerzas que actúan sobre la nave son la fuerza gravitatoria debida a la Tierra y la fuerza gravitatoria debida a la Luna. Como y representa la distancia de la nave al centro de la Tierra, la fuerza de atracción hacia la Tierra es negativa y la de atracción hacia la Luna es positiva, por lo que por la segunda ley de Newton

$$m_n \frac{d^2y}{dt^2} = -G\frac{m_T m_n}{y^2} + G\frac{m_L m_n}{(r_0 - y)^2}$$

(b) Dividiendo la anterior ecuación por m_n se tiene la ecuación diferencial

$$y'' = -\frac{A}{y^2} + \frac{B}{(r_0 - y)^2}, \quad A = Gm_T,\ B = Gm_L.$$

Para calcular sus puntos de equilibrio la transformamos en un sistema de primer orden, llamando $X = y$, $Y = y'$, obteniéndose

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y \\ -\frac{A}{X^2} + \frac{B}{(r_0 - X)^2} \end{pmatrix},$$

por lo que los puntos de equilibrio son los puntos (X, Y) tales que

$$Y = 0, \quad -\frac{A}{X^2} + \frac{B}{(r_0 - X)^2} = 0.$$

De la segunda ecuación llegamos a que

$$\frac{A}{X^2} = \frac{B}{(r_0 - X)^2} \Leftrightarrow A(r_0 - X)^2 = BX^2 \Leftrightarrow (A - B)X^2 - 2r_0AX + Ar_0^2 = 0$$

cuyas soluciones son

$$X = \frac{r_0}{A - B}(A \pm \sqrt{AB}) = r_0\frac{m_T \pm \sqrt{m_T m_L}}{m_T - m_L},$$

que resultan,

$$X_1 \approx 0.9r_0, \quad X_2 \approx 1.1r_0.$$

Por tanto, hay dos puntos de equilibrio de la nave $(X_1, 0)$ (entre la Tierra y la Luna) y $(X_2, 0)$ (la Luna estará entre la nave y la Tierra).

(c) Para ver si las posiciones de equilibrio son estables o no, usamos que este problema es conservativo, pues es de la forma

$$y'' = -f(y), \quad u'(y) = f(y) = \frac{A}{y^2} - \frac{B}{(r_0 - y)^2},$$

donde

$$u(y) = \int f(y)\,dy = -\frac{A}{y} - \frac{B}{r_0 - y} + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

son las funciones potenciales del problema. Sabemos que los puntos de equilibrio son extremos de esta función potencial. Para ver su estabilidad tenemos que ver si son máximos o mínimos. Derivando

$$u''(y) = -\frac{2A}{y^3} - \frac{2B}{(r_0 - y)^3},$$

por tanto,

$$u''(X_1) < 0 \quad \text{y} \quad u''(X_2) > 0,$$

de lo que se deduce que X_1 es un máximo de la energía potencial y, en consecuencia, es inestable, mientras que X_2 es un mínimo y, por tanto, es estable. Lo que nos dice esto es que si queremos que la nave no se mueva, tendría que estar a una distancia $1.1r_0$ desde la Tierra, es decir, tendríamos que colocarla en la cara oculta de la Luna. No parece "razonable" porque partimos del hecho de que la nave está localizada entre la Tierra y la Luna, pero lo que nos dice esto es que en ese caso la nave nunca estará en equilibrio estable.