# Teoremas de Hahn-Banach y aplicaciones

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

## Índice

# 1 Introducción

El teorema de Hahn-Banach asegura la existencia de una amplia variedad de funcionales lineales sobre un espacio normado, satisfaciendo cualquier propiedad «razonable» que se les pida. En este sentido, dicho teorema constituye la base de la teoría de la dualidad.

Es más propio hablar de «teoremas» de Hahn-Banach, en plural, que de «teorema» de Hahn-Banach, en singular, porque existen varias versiones equivalentes de este resultado (no nos ocuparemos aquí de probar tales equivalencias), que se pueden agrupar en dos categorías: la analítica (donde se incluyen los llamados teoremas de extensión mayorada y de extensión continua), y la geométrica (que corresponde a diversos teoremas de separación de conjuntos convexos por hiperplanos).

Aunque en buena parte de todo lo estudiado hasta ahora se ha denotado el cuerpo escalar por $\mathbb{K}$, asumiendo que $\mathbb{K}$ puede ser $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, indistintamente, en este punto será útil introducir, siquiera de forma temporal, una nueva terminología.

Diremos que $X$ es un *espacio vectorial real* (respectivamente, *complejo*) si $x, y \in X$ implica $x+y \in X$, y si para cualquier número real (respectivamente, complejo) $\alpha$ y cualquier $x \in X$, se tiene que $\alpha x \in X$. Es claro que todo espacio vectorial complejo es también un espacio vectorial real.

Del mismo modo, una función compleja $\varphi$ definida sobre un espacio vectorial complejo $X$ es un *funcional lineal complejo* si

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \quad \text{y} \quad \varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x) \qquad (x, y \in X,\ \alpha \in \mathbb{C}).$$

Una función real $\varphi$ definida sobre un espacio vectorial real o complejo $X$ es un *funcional lineal real* si lo anterior se verifica para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Si $u$ es la parte real de un funcional lineal complejo $f$, esto es, si $u(x)$ es la parte real del número complejo $f(x)$ para todo $x \in X$, es fácil comprobar que $u$ es un funcional lineal real. Entre $f$ y $u$ se tienen las siguientes relaciones:

**Proposición 1.1** *Sea $X$ un espacio vectorial complejo.*

(*i*) *Si $u$ es la parte real de un funcional lineal complejo $f$ sobre $X$, entonces*

$$f(x) = u(x) - iu(ix) \quad (x \in X). \tag{1}$$

(*ii*) *Si $u$ es un funcional lineal real sobre $X$ y se define $f$ mediante (1), entonces $f$ es un funcional lineal complejo sobre $X$.*

(*iii*) *Si $X$ es un espacio vectorial normado y $f$ y $u$ están relacionados como en (1), entonces $\|f\| = \|u\|$.*

*Demostración.* Sean $\alpha, \beta$ números reales, y sea $z = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$. La parte real de $iz$ es $-\beta$, así que

$$z = \Re z - i\Re(iz). \tag{2}$$

Dado $x \in X$, se tiene

$$\Re[if(x)] = \Re f(ix) = u(ix),$$

por lo que (1) sigue de (2), con $z = f(x)$.

Bajo las hipótesis (ii), es claro que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ y $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ para cualesquiera $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Como también tenemos

$$f(ix) = u(ix) - iu(-x) = u(ix) + iu(x) = if(x) \quad (x \in X),$$

$f$ es lineal complejo.

Por último, puesto que $|u(x)| \leq |f(x)|$ $(x \in X)$, necesariamente $\|u\| \leq \|f\|$. De otra parte, para cada $x \in X$ existe $\alpha \in \mathbb{C}$, con $|\alpha| = 1$, tal que $\alpha f(x) = |f(x)|$. Entonces

$$|f(x)| = \alpha f(x) = f(\alpha x) = u(\alpha x) \leq \|u\| \, \|\alpha x\| = \|u\| \, \|x\|.$$

La arbitrariedad de $x \in X$ ya prueba que $\|f\| \leq \|u\|$. □

# 2 Versión analítica

Decir que una función $F$ es una extensión de otra $f$ significa que el dominio de $F$ contiene al de $f$, y que $F(x) = f(x)$ para todo $x$ en el dominio de $f$. Por otra parte, si los espacios $X \supset M$ son los dominios de los funcionales lineales $F$ y $f$, respectivamente, las normas $\|F\|$ y $\|f\|$ se calculan en relación a los dominios correspondientes; es decir,

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in M, \ \|x\| \leq 1\}, \quad \|F\| = \sup\{|F(x)| : x \in X, \ \|x\| \leq 1\}.$$

Las versiones analíticas del teorema de Hahn-Banach son teoremas de extensión. El de extensión mayorada viene a decir que, en espacios vectoriales, es posible extender un funcional $f$ definido sobre un subespacio $M$ a otro definido sobre todo el espacio $X$, respetando la mayoración previamente existente de $f$ sobre $M$ por un tercer funcional subaditivo y positivamente homogéneo sobre $X$. El de extensión continua garantiza que, en espacios normados, es posible extender un funcional lineal continuo definido sobre un subespacio a otro funcional lineal continuo definido sobre todo el espacio, sin incrementar la norma de la extensión respecto a la del funcional extendido.

## 2.1 Extensión mayorada

Recordemos la siguiente

**Definición 2.1** *Una* seminorma *en un espacio vectorial $X$ sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ es un funcional $\nu : X \to \mathbb{R}$ que cumple los siguientes axiomas:*

$(i)$ (homogeneidad positiva) $\nu(\lambda x) = |\lambda| \nu(x)$ $(\lambda \in \mathbb{K}, \ x \in X)$*;*

$(ii)$ (subaditividad) $\nu(x+y) \leq \nu(x) + \nu(y)$ $(x, y \in X)$.

**Teorema 2.2 (Hahn-Banach, extensión mayorada)** *Sea $X$ un espacio vectorial, sobre el que está definido un funcional $\nu : X \to \mathbb{R}$ que verifica las siguientes propiedades:*

$$\nu(x+y) \leq \nu(x) + \nu(y) \quad (x, y \in X); \tag{3}$$

$$\nu(rx) = r\nu(x) \quad (r \geq 0,\, x \in X). \tag{4}$$

*Sean $M$ un subespacio vectorial de $X$ y $g$ un funcional lineal definido sobre $M$, satisfaciendo:*

$$\Re g(m) \leq \nu(m) \quad (m \in M). \tag{5}$$

*Entonces existe un funcional lineal $f$ en $X$ que extiende a $g$, es decir, $f(m) = g(m)$ $(m \in M)$, y cumple que*

$$-\nu(-x) \leq \Re f(x) \leq \nu(x) \quad (x \in X). \tag{6}$$

*Si, además, $\nu$ es una seminorma, se tiene*

$$|f(x)| \leq \nu(x) \quad (x \in X). \tag{7}$$

*Demostración.* Distinguiremos tres casos.

*Caso real: primera extensión.* Consideramos en primer lugar el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y extendemos el funcional $g$ al subespacio $Y$ obtenido al sumar una recta a $M$. Más precisamente, dado $x \in X \setminus M$, ponemos

$$Y = M \oplus \operatorname{span}\{x\} = M \oplus \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Para definir un funcional lineal $h$ sobre $Y$ que extienda a $g$ y siga dominado por $\nu$, escribimos:

$$h(m + \lambda x) = g(m) + \lambda\alpha \quad (m \in M,\, \lambda \in \mathbb{R}),$$

siendo $\alpha$, es decir, el valor de $h(x)$, una constante a determinar de forma que se tenga

$$g(m) + \lambda\alpha \leq \nu(m + \lambda x) \quad (m \in M,\, \lambda \in \mathbb{R}).$$

Fijemos $m \in M$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\lambda > 0$, dividimos por $\lambda$ la expresión

$$g(m) + \lambda\alpha \leq \nu(m + \lambda x)$$

y usamos la linealidad de $g$, junto con (4), para obtener:

$$g\left(\frac{m}{\lambda}\right)+\alpha=\frac{1}{\lambda}[g(m)+\lambda\alpha]\leq\frac{1}{\lambda}\nu(m+\lambda x)=\nu\left(\frac{m}{\lambda}+x\right).$$

Escribiendo $u=m/\lambda$, que es un vector de $M$ tan arbitrario como $m$, deducimos que $\alpha$ debe cumplir:

$$g(u)+\alpha\leq\nu(u+x)\quad(u\in M),$$

de donde

$$\alpha\leq\nu(u+x)-g(u)\quad(u\in M).\tag{8}$$

Si $\lambda<0$, dividimos por $-\lambda$ la expresión

$$g(m)+\lambda\alpha\leq\nu(m+\lambda x)$$

para obtener:

$$-\frac{1}{\lambda}[g(m)+\lambda\alpha]\leq-\frac{1}{\lambda}\nu(m+\lambda x).$$

La linealidad de $g$ y (4) conducen a

$$g\left(-\frac{m}{\lambda}\right)-\alpha\leq\nu\left(-\frac{m}{\lambda}-x\right).$$

Considerando ahora $w=-m/\lambda$, que, de nuevo, es un vector de $M$ tan arbitrario como $m$, obtenemos la otra condición que debe verificar $\alpha$:

$$g(w)-\alpha\leq\nu(w-x)\quad(w\in M),$$

de donde

$$g(w)-\nu(w-x)\leq\alpha\quad(w\in M).\tag{9}$$

Nótese finalmente que cuando $\lambda=0$, la desigualdad

$$g(m)+\lambda\alpha\leq\nu(m+\lambda x)$$

no aporta ninguna información sobre $\alpha$, pues se reduce a la condición

$$g(m)\leq\nu(m)\quad(m\in M),$$

que es la hipótesis (5).

Debemos entonces encontrar $\alpha\in\mathbb{R}$ que satisfaga simultáneamente (8) y (9), es decir,

$$g(w)-\nu(w-x)\leq\alpha\leq\nu(u+x)-g(u)\quad(w,u\in M).$$

Ahora bien usando (5) y (3), para cualesquiera $w, u \in M$ tenemos

$$g(u)+g(w) = g(u+w) \leq \nu(u+w) \leq \nu(u+x)+\nu(w-x),$$

o, equivalentemente,

$$g(w)-\nu(w-x) \leq \nu(u+x)-g(u),$$

obteniéndose así:

$$\sup\{g(w)-\nu(w-x) : w \in M\} \leq \inf\{\nu(u+x)-g(u) : u \in M\}. \tag{10}$$

Por tanto, podemos tomar como $\alpha$ cualquier número real comprendido entre el supremo y el ínfimo en (10), ambos inclusive. Si la desigualdad en (10) es una igualdad, ese valor común es la única elección posible de $\alpha$.

*Caso real: extensión definitiva.* Para finalizar la demostración en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, podríamos pensar en iterar la extensión realizada en la primera etapa, aumentando en cada paso una dimensión al subespacio obtenido en el paso anterior, hasta llegar a $X$. Ahora bien, como el número de etapas puede ser infinito, es necesario formalizar esta inducción transfinita mediante alguna de las herramientas equivalentes disponibles al efecto: el axioma de buena ordenación de Zermelo, el lema de Zorn o el principio de maximalidad de Hausdorff. Nos valdremos de este último:

*Todo conjunto no vacío parcialmente ordenado contiene un subconjunto totalmente ordenado maximal.*

El conjunto $\mathscr{P}$ al que aplicaremos el principio de maximalidad de Hausdorff va a estar formado por todos los pares de la forma $(M^*, g^*)$, donde $M^*$ es un subespacio de $X$ que contiene a $M$ y $g^*$ es un funcional lineal sobre $M^*$ que extiende a $g$ y está dominado por $\nu$ sobre $M^*$. Si $M = X$ no hay nada que probar, por lo que podemos suponer que $M \subsetneq X$, y en tal caso la primera parte de la demostración asegura que $\mathscr{P}$ no es vacío. Ordenamos parcialmente $\mathscr{P}$ mediante la siguiente relación: diremos que $(M^*, g^*) \leq (M^{**}, g^{**})$ cuando $M^* \subset M^{**}$ y el funcional $g^{**}$ extiende al funcional $g^*$. Entonces, el principio de maximalidad de Hausdorff proporciona una subcolección $\Omega$ de $\mathscr{P}$, totalmente ordenada y maximal.

Sea $\Phi = \{M^* : (M^*, g^*) \in \Omega\}$. Como $\Phi$ está totalmente ordenado por la inclusión, $\widetilde{M} = \cup\{M^* : M^* \in \Phi\}$ es un subespacio vectorial de $X$, que contiene a todo $M^* \in \Phi$ y, por tanto, también contiene a $M$. Ahora definimos un funcional $f$ sobre $\widetilde{M}$ como sigue. Dado $x \in \widetilde{M}$, elegimos $M^* \in \Phi$ de forma que $x \in M^*$, y ponemos $f(x) = g^*(x)$. Al estar $\Omega$ totalmente ordenado, el valor de $f(x)$ no depende del par $(M^*, g^*)$ que usemos para definirlo. Además, $f$ es un funcional lineal sobre $\widetilde{M}$, que extiende a $g$ y está dominado por $\nu$. Si $\widetilde{M} \subsetneq X$, podríamos aplicar la primera etapa de la demostración para obtener un par estrictamente mayor que $(\widetilde{M}, f)$, contradiciendo la maximalidad de $\Omega$. Así pues, $\widetilde{M} = X$ y $f(x) \leq \nu(x)$ $(x \in X)$. Por último, esta desigualdad implica

$$-\nu(-x) \leq -f(-x) = f(x) \quad (x \in X),$$

lo que proporciona (6).

*Fin de la demostración: caso complejo y mayoración por seminormas.* Para completar la demostración del teorema debemos suponer que el espacio vectorial $X$ es complejo y verificar que si $\nu$ es una seminorma, se cumple (7). Resolveremos este caso reduciéndolo al caso real.

Dado un espacio vectorial complejo $X$, consideremos el correspondiente espacio vectorial real $X_R$. Análogamente, si $M$ es un subespacio vectorial de $X$ consideramos $M_R$, que es un subespacio de $X_R$. Supongamos que $g$ es un funcional lineal sobre $M$ que verifica $\Re g \leq \nu$. Denotando $u = \Re g$, encontramos que $u$ es un funcional lineal sobre $M_R$ verificando $u \leq \nu$. Como tenemos resuelta la extensión en el caso real, existirá un funcional lineal $U$ sobre $X_R$ que extiende a $u$ y sigue dominado por $\nu$. Por la Proposición 1.1, $U$ es la parte real de un único funcional lineal sobre $X$, al que denotamos $f$. Tenemos así que

$$\Re f(x) = U(x) \leq \nu(x) \quad (x \in X).$$

Además, $f$ extiende a $g$, pues

$$\Re f(m) = U(m) = u(m) = \Re g(m) \quad (m \in M),$$

y ya que tanto $g$ como la restricción de $f$ a $M$ están unívocamente determinados por su parte real, se concluye que $f(m) = g(m)$ para todo $m \in M$.

Por último, supongamos que $\nu$ es una seminorma que mayora a $\Re f$, y veamos que se tiene (7). En efecto, fijado $x \in X$, basta escribir $|f(x)| = \alpha f(x)$, con $\alpha \in \mathbb{K}$, $|\alpha| = 1$, para obtener:

$$|f(x)| = \alpha f(x) = f(\alpha x) = \Re f(\alpha x) \leq \nu(\alpha x) = |\alpha|\, \nu(x) = \nu(x).$$

$\square$

## 2.2 Extensión continua

**Teorema 2.3 (Hahn-Banach, extensión continua)** *Sean $X$ un espacio normado, $M$ un subespacio de $X$ y $g \in M'$. Entonces existe $f \in X'$ que extiende a $g$, tal que $\|f\| = \|g\|$.*

*Demostración.* Por hipótesis tenemos que

$$|g(m)| \leq \|g\|\, \|m\| \quad (m \in M).$$

Tomamos

$$\nu(x) = \|g\|\, \|x\| \quad (x \in X).$$

Entonces $\nu$ es una seminorma en $X$, y aplicando el Teorema 2.2 obtenemos un funcional lineal $f : X \to \mathbb{K}$ que extiende a $g$ y satisface

$$|f(x)| \leq \|g\|\, \|x\| \quad (x \in X).$$

En particular, $f \in X'$ y $\|f\| \leq \|g\|$. Obviamente, $\|g\| \leq \|f\|$, y se concluye que $\|f\| = \|g\|$. $\square$

## 2.3 Abundancia de funcionales

En esta sección trataremos de justificar nuestra afirmación inicial, según la cual *el teorema de Hahn-Banach asegura la existencia de una amplia variedad de funcionales lineales sobre un espacio normado, satisfaciendo cualquier propiedad «razonable» que se les pida*.

**Corolario 2.4** *Dados un subespacio cerrado $M$ de un espacio normado $X$ y un punto $x_0 \in X \setminus M$, existe $f \in X'$, con*

$$\|f\| = \frac{\|x_0\|}{d(x_0, M)},$$

*tal que $f(M) = \{0\}$ y $f(x_0) = \|x_0\| \neq 0$.*

*Demostración.* Sea

$$M_0 = M \oplus \operatorname{span}\{x_0\} = \{s + \lambda x_0 : s \in M,\ \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

La aplicación

$$\begin{array}{cccc} g: & M_0 & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x = s + \lambda x_0 & \longmapsto & g(x) = \lambda \|x_0\| \end{array}$$

es un funcional lineal y continuo sobre $M_0$ que satisface las condiciones requeridas.

En efecto, el funcional $g$ es lineal. Pues si $\alpha \in \mathbb{K}$ y si $x = s + \lambda x_0 \in M_0$, con $s \in M$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, se verifica

$$\alpha x = \alpha s + \alpha \lambda x_0,$$

por lo que

$$g(\alpha x) = \alpha \lambda \|x_0\| = \alpha g(x).$$

Si, además, consideramos $z = t + \mu x_0 \in M_0$, con $t \in M$ y $\mu \in \mathbb{K}$, se verifica:

$$x + z = (s + t) + (\lambda + \mu) x_0,$$

por lo que

$$g(x + z) = (\lambda + \mu)\|x_0\| = \lambda \|x_0\| + \mu \|x_0\| = g(x) + g(z).$$

Finalmente, el funcional $g$ es continuo. Para comprobarlo, recordemos que, siendo lineal, $g$ es continuo si, y sólo si, $g$ es acotado, lo que ocurre si, y sólo si,

$$\|g\| = \sup\left\{\frac{|g(x)|}{\|x\|} : x \in M_0 \setminus \{0\}\right\} < \infty.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}\|g\| &= \sup\left\{\frac{|g(x)|}{\|x\|} : x \in M_0 \setminus \{0\}\right\} \\ &= \sup\left\{\frac{|\lambda|\,\|x_0\|}{\|s+\lambda x_0\|} : s \in M,\ \lambda \in \mathbb{K}\setminus\{0\}\right\} \\ &= \sup\left\{\frac{\|x_0\|}{\|s/\lambda + x_0\|} : s \in M,\ \lambda \in \mathbb{K}\setminus\{0\}\right\} \\ &= \|x_0\|\ \sup\left\{\frac{1}{\|s-x_0\|} : s \in M\right\} \\ &= \frac{\|x_0\|}{\inf\{\|s-x_0\| : s \in M\}} \\ &= \frac{\|x_0\|}{d(x_0,M)},\end{aligned}$$

con $d(x_0,M) > 0$. Además, claramente

$$g(M) = \{g(s) : s \in M\} = \{0\},$$

mientras que

$$g(x_0) = \|x_0\| \neq 0.$$

Llegados a este punto, para obtener $f$ basta aplicar el teorema de extensión continua (Teorema 2.3). □

**Corolario 2.5** *Para cualquier vector $x_0$ de un espacio normado $X$, existe $f \in X'$ tal que $f(x_0) = \|x_0\|$. Cuando $x_0 \neq 0$, se puede elegir $f$ de modo que $\|f\| = 1$.*

*Demostración.* Si $x_0 = 0$, basta tomar $f = 0$. En caso contrario, la aplicación del Corolario 2.4 a $M = \{0\}$ y $x_0 \in X \setminus M$ proporciona $f \in X'$ tal que

$$\|f\| = \frac{\|x_0\|}{d(x_0,M)} = 1$$

y $f(x_0) = \|x_0\|$. □

**Observación 2.6** *Del Corolario 2.5 se deduce, en particular, lo siguiente: si $U$ es la bola unidad abierta (respectivamente, $B$ es la bola unidad cerrada) de $X$ y $x_0 \in X \setminus U$ (respectivamente, $x_0 \in X \setminus B$), existe $f \in X'$ tal que $|f(x)| \leq 1$ para todo $x \in U$ (respectivamente, $x \in B$), pero $f(x_0) = \|x_0\| \geq 1$ (respectivamente, $f(x_0) = \|x_0\| > 1$). Se dice por ello que $f$ separa $U$ (respectivamente, $B$) de $x_0$.*

**Corolario 2.7** *Dados un espacio normado $X$ y puntos $x, y \in X$ con $x \neq y$, existe $f \in X'$ tal que $f(x) \neq f(y)$.*

*Demostración.* Aplicando el Corolario 2.5 a $x_0 = x - y \neq 0$, se obtiene $f \in X'$ tal que

$$f(x) - f(y) = f(x-y) = f(x_0) = \|x_0\| = \|x-y\| \neq 0,$$

con lo cual $f(x) \neq f(y)$. □

**Observación 2.8** *El Corolario 2.7 se resume diciendo que el funcional $f$ separa $x$ de $y$, o, más globalmente, que $X'$ separa los puntos de $X$. Una consecuencia inmediata e interesante de este resultado es que cualquier espacio normado no trivial tiene dual no trivial.*

## 2.4 Otras aplicaciones

A continuación recogemos más consecuencias interesantes del Teorema 2.3. Comenzamos destacando la siguiente caracterización de la adherencia de un subespacio.

**Teorema 2.9 (Clausura de un subespacio)** *Sea $M$ un subespacio vectorial de un espacio normado $X$, y sea $x_0 \in X$. Entonces $x_0$ está en la clausura $\overline{M}$ de $M$ si, y sólo si, para todo $f \in X'$ que se anula en $M$ se tiene que $f(x_0) = 0$.*

*Demostración.* Si $x_0 \in \overline{M}$, entonces $x_0$ es límite de una sucesión de elementos de $M$. Por continuidad, para todo $f \in X'$ tal que $f(x) = 0$ $(x \in M)$ se debe tener $f(x_0) = 0$.

Recíprocamente, si $x_0 \notin \overline{M}$, el Corolario 2.4 proporciona $f \in X'$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in \overline{M}$ (en particular, para todo $x \in M$), pero $f(x_0) \neq 0$. □

El siguiente resultado es de fundamental importancia en teoría de dualidad.

**Teorema 2.10 (Expresión dual de la norma de un vector)** *Sea $X$ un espacio normado. Para todo $x \in X$, se tiene:*

$$\|x\| = \max\left\{|f(x)| : f \in X',\ \|f\| \leq 1\right\}.$$

*Demostración.* Fijemos $x \in X$. Si $f \in X'$ con $\|f\| \leq 1$, entonces

$$|f(x)| \leq \|f\|\,\|x\| \leq \|x\|,$$

así que

$$\sup\left\{|f(x)| : f \in X',\ \|f\| \leq 1\right\} \leq \|x\|.$$

La conclusión deseada sigue del Corolario 2.5. □

**Definición 2.11** *Si $X$, $Y$ son espacios normados, denotamos por $\mathscr{B}(X,Y)$ la familia de todos los operadores lineales acotados de $X$ en $Y$.*

Se comprueba sin dificultad que la norma de operadores

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in X,\ \|x\| \leq 1\} \quad (T \in \mathscr{B}(X,Y))$$

dota efectivamente a $\mathscr{B}(X,Y)$ de estructura de espacio normado. ¿Bajo qué condiciones es $\mathscr{B}(X,Y)$ un espacio de Banach? El teorema siguiente da respuesta a esta pregunta.

**Teorema 2.12 (Completitud del espacio de operadores lineales continuos)** *Sean $X \neq \{0\}$ e $Y$ espacios normados. El espacio de operadores $\mathscr{B}(X,Y)$ es completo si, y sólo si, $Y$ es completo.*

*Demostración.* Supongamos en primer lugar que $Y$ es completo, y que $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathscr{B}(X,Y)$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\| \, \|x\| < \varepsilon \|x\| \quad (x \in X, \ n,m \geq N). \tag{11}$$

Por tanto, para cada $x \in X$, la sucesión $\{T_n x\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $Y$, y la completitud de $Y$ asegura que existe $\lim_{n\to\infty} T_n x = Tx$ $(x \in X)$. Como la norma es continua, tomando límites cuando $m \to \infty$ en (11) encontramos que

$$\|T_n x - Tx\| \leq \varepsilon \|x\| \quad (x \in X, \ n \geq N);$$

así,

$$\|T_n - T\| \leq \varepsilon \quad (n \geq N).$$

Como

$$\|T\| \leq \|T_N\| + \|T_N - T\|,$$

se concluye que $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ y que $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $T$ en $\mathscr{B}(X,Y)$.

Recíprocamente, suponiendo que $\mathscr{B}(X,Y)$ es completo, veamos que $Y$ también lo es. Dada una sucesión de Cauchy $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $Y$, fijamos $f \in X' \setminus \{0\}$ (Observación 2.8) y definimos

$$T_n x = f(x) y_n \quad (x \in X, \ n \in \mathbb{N}).$$

La sucesión $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $\mathscr{B}(X,Y)$, pues

$$\|T_n - T_m\| = \|f\| \, \|y_n - y_m\| \quad (n,m \in \mathbb{N}).$$

Al ser $\mathscr{B}(X,Y)$ completo, $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergerá en $\mathscr{B}(X,Y)$ a un cierto operador $T$. Como

$$\|T_n x - Tx\| \leq \|T_n - T\| \, \|x\| \quad (x \in X, \ n \in \mathbb{N}),$$

deducimos que la sucesión $\{f(x) y_n\}_{n=1}^{\infty} = \{T_n x\}_{n=1}^{\infty}$ converge en $Y$, cualquiera que sea $x \in X$. Para completar la prueba basta con elegir $x \in X$ tal que $f(x) = 1$. $\square$

Como última aplicación, demostraremos que todo subespacio de dimensión finita de un espacio normado es complementado.

**Definición 2.13** *Sea $M$ un subespacio cerrado de un espacio normado $X$. Se dice que $M$* admite complementario*, o que es un* subespacio complementado*, en $X$ cuando existe otro subespacio cerrado $V$ de $X$ tal que $X = M \oplus V$, esto es, $X = M + V$ y $M \cap V = \{0\}$.*

**Teorema 2.14 (Subespacios complementados)** *Si $M$ es un subespacio de dimensión finita de un espacio normado $X$, entonces $M$ está complementado en $X$.*

*Demostración.* Sea $\{u_1, u_2, \ldots, u_N\}$ una base de $M$. Las coordenadas de cada vector $x \in M$ dependen linealmente de $x$, es decir, existen funcionales lineales $g_1, g_2, \ldots, g_N$ sobre $M$, tales que

$$x = \sum_{k=1}^{N} g_k(x) u_k$$

es la única expresión de cada $x \in M$ como combinación lineal de los elementos de la base. Puesto que $M$ es un espacio normado de dimensión finita, para $k = 1, 2, \ldots, N$ tenemos que $g_k \in M'$, y el Teorema 2.3 proporciona $f_k \in X'$ que extiende a $g_k$. Como

$$f_j\left(x - \sum_{k=1}^{N} f_k(x) u_k\right) = f_j(x) - \sum_{k=1}^{N} f_k(x) f_j(u_k) = f_j(x) - f_j(x) = 0 \quad (x \in X,\ j = 1, \ldots, N),$$

el subespacio cerrado $V = \bigcap_{k=1}^{N} \mathcal{N}(f_k)$ complementa a $M$. □

# 3 Versión geométrica

Al estudiar las consecuencias de las versiones analíticas del teorema de Hahn-Banach, hemos podido observar que de ellas se derivan resultados de separación, en el sentido de que funcionales lineales continuos toman valores distintos sobre conjuntos disjuntos (sección 2.3). En la presente sección veremos que existe una identificación entre núcleos de funcionales lineales continuos e hiperplanos cerrados, de manera que los resultados de separación antedichos se pueden traducir en términos geométricos de separación de conjuntos disjuntos por tales hiperplanos. Además, estudiaremos bajo qué condiciones es posible efectuar separaciones de este tipo.

## 3.1 Espacios cociente, hiperplanos y funcionales lineales

Sean $X$ un espacio vectorial cualquiera y $M$ un subespacio de $X$. El espacio vectorial cociente $X/M$ es el conjunto de todas las clases de equivalencia de $X$ módulo $M$, es decir, la colección de todos los subconjuntos de $X$ de la forma

$$x + M = \{x + m : m \in M\} \quad (x \in X).$$

La aplicación lineal $\pi : X \to X/M$ definida por $\pi(x) = x + M$ se denomina *proyección canónica cociente*.

Si $X$ es un espacio normado cualquiera y $M$ un subespacio cerrado de $X$, para cada una de las clases de equivalencia $x+M$ definimos

$$\|x+M\| = \inf\{\|x+m\| : m \in M\} = \inf\{\|x-m\| : m \in M\} = d(x,M) \quad (x \in X).$$

Se comprueba que de esta forma obtenemos una norma en $X/M$, a la que llamamos *norma cociente*. Conviene observar que de la condición $\|x+M\| = d(x,M) = 0$ se deduce que $x \in \overline{M} = M$ y, por tanto, $x+M = 0$, razonamiento que exige que $M$ sea cerrado en $X$. La omisión de este requisito proporcionaría una seminorma en $X/M$, pero no una norma.

La siguiente propiedad resultará útil.

**Proposición 3.1** *Sean $X$ un espacio normado y $M$, $N$ subespacios cerrados de $X$, con $M$ cerrado y $N$ de dimensión finita. Entonces $M+N$ es cerrado.*

*Demostración.* Supongamos que $N = \operatorname{span}\{x_1,\dots,x_n\}$ y consideremos la proyección canónica cociente $\pi : X \to X/M$. Se tiene que $\pi(N) = \operatorname{span}\{\pi(x_1),\dots,\pi(x_n)\}$ es un subespacio de dimensión finita, y por lo tanto cerrado, de $X/M$. Puesto que $\pi$ es continua, $\pi^{-1}(\pi(N)) = M+N$ es también cerrado. □

**Definición 3.2** *Un* hiperplano *en un espacio vectorial $X$ es un subespacio propio maximal de $X$.*

**Proposición 3.3** *Sean $X$ un espacio vectorial y $H$ un subespacio de $X$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

$(i)$ *$H$ es un hiperplano.*

$(ii)$ *Existe $v \in X \setminus H$ tal que $X = H \oplus \operatorname{span}\{v\}$.*

$(iii)$ *El subespacio $H$ tiene codimensión 1 (por definición, la* codimensión *de $H$ es la dimensión de $X/H$).*

$(iv)$ *Se cumple que $H = \mathscr{N}(f)$ para cierto funcional lineal $f \neq 0$ sobre $X$. En tal caso, se dice que $\{f=0\}$ es la* ecuación *de $H$.*

*Demostración.* $(i) \Rightarrow (ii)$ Si $H$ es un hiperplano en $X$ y se toma cualquier $v \in X \setminus H$ (que existe porque $H \subsetneq X$), el subespacio generado por $H$ y $v$ contiene estrictamente a $H$, así que

$$X = \{h + \lambda v : h \in H,\ \lambda \in \mathbb{K}\}. \tag{12}$$

Ahora, si $h = \lambda v$ para ciertos $h \in H$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, necesariamente $\lambda = 0$, pues lo contrario resultaría en la contradicción $v \in H$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Recíprocamente, si se cumple (ii) entonces $H \subsetneq X$ y cualquier otro subespacio $M$ de $X$ que contenga a $H$ coincide con $X$ o con $H$ según que $M$ contenga o no al vector $v$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Sean $H$ y $v$ como en (ii), y sea $\pi : X \to X/H$ la proyección canónica cociente. Escribiendo $x \in X$ en la forma $x = h + \lambda v$, con $h \in H$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, encontramos que $\pi(x) = \lambda\pi(v)$ con $\pi(v) \neq 0$, de modo que $X/H = \operatorname{span}\{\pi(v)\}$.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ Recíprocamente, si $H$ es un subespacio y $v \in X$ es tal que $\pi(v) \neq 0$ genera $X/H$ entonces para todo $x \in X$ existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $\pi(x) = \lambda\pi(v) = \pi(\lambda v)$, es decir, $x - \lambda v = h$ para algún $h \in H$, probando que $X = H + \text{span}\{v\}$. Como $v \in X \setminus H$ esta suma es directa, y se verifica (ii).

$(iv) \Rightarrow (iii)$ Supongamos que $H = \mathscr{N}(f)$ para cierto funcional lineal $f \neq 0$ sobre $X$. Como la dimensión del rango de un funcional lineal sólo puede ser 0 ó 1, necesariamente

$$\dim X/H = \dim X/\mathscr{N}(f) = \dim \mathscr{R}(f) = 1.$$

$(ii) \Rightarrow (iv)$ Por último, si se verifica (12) para algún $v \in X \setminus H$, basta definir el funcional lineal $f$ sobre $X$ por $f(h + \lambda v) = \lambda$ para establecer (iv) y completar la prueba. □

**Definición 3.4** *Sea $X$ un espacio vectorial. El trasladado de un hiperplano se denomina* hiperplano afín. *Si $H = x_0 + H_0$, con $x_0 \in X$, es un hiperplano afín, si $\{f = 0\}$ es la ecuación del hiperplano $H_0$, y si $f(x_0) = \alpha$, entonces $H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$, y se dice que $H$ tiene* ecuación $\{f = \alpha\}$.

**Proposición 3.5** *Sean $X$ un espacio normado y $H$ un hiperplano afín de ecuación $\{f = \alpha\}$.*

*$(i)$ Si $H$ no es denso en $X$, entonces es cerrado en $X$.*

*$(ii)$ El hiperplano afín $H$ es cerrado en $X$ si, y solamente si, el funcional lineal $f$ es continuo.*

*Demostración.* Como la topología de un espacio normado es invariante por traslaciones, no se pierde generalidad suponiendo que $H$ es un hiperplano. En tal caso, para probar (i) basta tener en cuenta que la clausura de $H$ es un subespacio de $X$ que contiene a $H$ y apelar a la maximalidad de $H$.

Estableceremos ahora (ii). Si el funcional $f$ es continuo, entonces $H$ (la antiimagen del cerrado $\{0\}$ mediante $f$) es también cerrado. Recíprocamente, asumamos que $H$ es cerrado, de modo que su complementario $X \setminus H$ es abierto y no vacío, y que $f$ es real. Sea $x_0 \in X \setminus H$ y supongamos, para fijar ideas, que $f(x_0) > 0$. Existe $r > 0$ tal que $U(x_0, r) \subset X \setminus H$, donde

$$U(x_0, r) = \{x \in X : \|x - x_0\| < r\}.$$

Afirmamos que

$$f(x) > 0 \quad (x \in U(x_0, r)). \tag{13}$$

En efecto, admitamos (para alcanzar una contradicción) que $f(x_1) < 0$ para algún $x_1 \in U(x_0, r)$. El segmento

$$\{x_t = (1-t)x_0 + tx_1 : t \in [0,1]\}$$

está contenido en $U(x_0,r)$ y, siendo esta bola un subconjunto de $X\setminus H$, necesariamente $f(x_t)\neq 0$ ($t\in[0,1]$); pero $f(x_t)=0$ para

$$t=\frac{f(x_0)}{f(x_0)-f(x_1)}\in(0,1),$$

contradicción que prueba (13). De (13) resulta que

$$f(x_0-rz)>0 \quad (z\in U(0,1)).$$

Por tanto, $f$ es continuo, con

$$\|f\|\leq\frac{1}{r}f(x_0).$$

Si el funcional $f$ es complejo entonces $H$ tiene codimensión real 2, así que el hiperplano real $\{\Re f=0\}$ es la suma del subespacio real cerrado $H$ con un subespacio de dimensión real 1, y, consecuentemente, es cerrado (Proposición 3.1). Lo que acabamos de probar obliga a que $\Re f$ sea continuo, y como $f(x)=\Re f(x)-i\Re f(ix)$ $(x\in X)$, se concluye que $f$ es también continuo. $\square$

## 3.2 Problemas de separación

Sea $X$ un espacio vectorial real y consideremos un hiperplano afín $H=\{x\in X : f(x)=\alpha\}$, donde $f\neq 0$ es un funcional lineal y $\alpha\in\mathbb{R}$. Dicho hiperplano determina dos *semiespacios* $H^+=\{x\in X : f(x)\geq\alpha\}$ y $H^-=\{x\in X : f(x)\leq\alpha\}$. Diremos que dos conjuntos no vacíos $A,B\subset X$ están *separados por el hiperplano* $H$, o también que $H$ (o $f$) *separa los conjuntos* $A$ y $B$, si dichos conjuntos están situados en semiespacios distintos de los dos determinados por $H$.

Nótese que, en definitiva, la separación de dos conjuntos no vacíos $A$ y $B$ se traduce en la existencia de un funcional lineal $f\neq 0$ sobre $X$ verificando

$$f(a)\leq f(b) \quad (a\in A,\ b\in B),$$

o, equivalentemente,

$$\sup\{f(a) : a\in A\}\leq\inf\{f(b) : b\in B\}.$$

Recíprocamente, cuando esto ocurre y $\alpha$ es cualquier número real tal que $f(a)\leq\alpha\leq f(b)$ para cualesquiera $a\in A$ y $b\in B$, entonces el hiperplano afín de ecuación $\{f=\alpha\}$ separa $A$ y $B$.

Como los semiespacios son conjuntos convexos, es evidente que si $H$ separa $A$ y $B$ entonces también separa a sus envolventes convexas; así pues, si queremos separar conjuntos por un hiperplano, no se pierde generalidad suponiendo que se trata de conjuntos convexos. Por otra parte, ejemplos elementales en $\mathbb{R}^2$ (cf. fig. 1) muestran que si alguno de los conjuntos no es convexo entonces, aunque sean disjuntos, puede no existir un hiperplano que los separe. Se verá que en espacios de dimensión finita siempre es posible separar dos convexos disjuntos cualesquiera, pero que este resultado no tiene por qué ser cierto en espacios de dimensión infinita, a menos que se impongan condiciones adicionales (como, por ejemplo, que uno de ellos sea

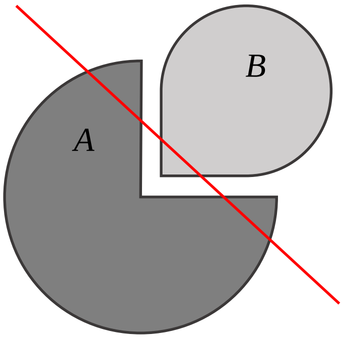


**Figura 1.** El conjunto $A$ no es convexo y no puede ser separado del conjunto $B$ por un hiperplano en $\mathbb{R}^2$, aun cuando $A \cap B = \emptyset$.

abierto, o que uno sea cerrado y el otro, compacto).

La separación de conjuntos convexos adquiere un gran interés práctico en los llamados *problemas de optimización convexa*, cuyo estudio excede los objetivos de este curso.

Observemos finalmente que, en virtud de la Proposición 1.1, el problema de la separación de convexos se puede plantear también cuando $X$ es un espacio vectorial complejo, pero su resolución se reduce siempre al caso real subyacente.

## 3.3 Funcional de Minkowski

Con las Proposiciones 3.3 y 3.5, hemos visto que existe una íntima conexión entre hiperplanos y funcionales lineales. Tal como acabamos de remarcar en la sección precedente, si pretendemos separar conjuntos mediante hiperplanos, hemos de garantizar la existencia de funcionales lineales satisfaciendo propiedades «razonables», y para ello deberemos recurrir al teorema de Hahn-Banach. Introducimos en esta sección el llamado funcional de Minkowski, que será utilizado como funcional mayorante en la aplicación del teorema de extensión mayorada de Hahn-Banach (Teorema 2.2) a la hora de obtener los funcionales necesarios. Para definir esta nueva herramienta necesitamos introducir el siguiente concepto.

**Definición 3.6** *Se dice que un subconjunto $U$ de un espacio vectorial $X$ es* absorbente *cuando para cada vector $x \in X$ existe $\alpha > 0$ tal que $x \in \alpha U$.*

Si $U$ es absorbente entonces $0 \in U$, y $U$ debe contener un punto en cada dirección del espacio: para cada $x \in X$ tenemos un $\alpha > 0$ tal que $\alpha^{-1}x \in U$. Si $U$ es, además, un conjunto convexo, el segmento de extremos 0 y $\alpha^{-1}x$ estará contenido en $U$, luego $U$ contendrá un segmento no trivial en todas las direcciones del espacio $X$, cuya longitud dependerá de la dirección. Por tanto, podemos contemplar 0 como una especie de «punto interior» de $U$.

Cualquier entorno de cero en un espacio normado proporciona un ejemplo de conjunto absorbente, pero no son los únicos: el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ formado por la unión de sendos discos cerrados de radio 1 con centros en los puntos $(-1,0)$ y $(0,1)$, junto con el segmento que une $(0,1)$ con $(0,-1)$, es un conjunto absorbente que no es entorno de cero.

**Definición 3.7** *Sean $X$ un espacio vectorial y $A \subset X$ un conjunto absorbente. El* funcional de Minkowski *de $A$ se define sobre $X$ por*

$$\nu(x) = \nu_A(x) = \inf\{\alpha > 0 : x \in \alpha A\} \quad (x \in X).$$

Nótese que el hecho de que $A$ sea absorbente garantiza que el funcional de Minkowski de $A$ está bien definido.

**Proposición 3.8** *En las condiciones de la Definición 3.7, se verifica:*

*(i)* $\nu(rx) = r\nu(x)$ $(r \geq 0,\ x \in X)$.

*(ii) Si $A$ es convexo, entonces* $\nu(x+y) \leq \nu(x) + \nu(y)$ $(x, y \in X)$.

*(iii) Si $A$ es convexo y equilibrado (esto es, si $\rho A \subset A$ para todo escalar $\rho$ con $|\rho| \leq 1$), entonces $\nu$ es una seminorma.*

*(iv) Si $A$ es convexo y ponemos $B = \{x \in X : \nu(x) < 1\}$, $C = \{x \in X : \nu(x) \leq 1\}$, entonces $B \subset A \subset C$ y $\nu_B = \nu = \nu_C$.*

*Supongamos adicionalmente que el espacio $X$ es normado.*

*(v) Si $A$ es abierto, entonces existe $M > 0$ tal que*

$$0 \leq \nu(x) \leq M\,\|x\| \quad (x \in X). \tag{14}$$

*(vi) Si $A$ es convexo y abierto, entonces $A = \{x \in X : \nu(x) < 1\}$.*

*Demostración.* La homogeneidad positiva (i) se infiere de la definición de $\nu$. En efecto, como $0 \in A$ se tiene que $\nu(0) = 0$, y (i) se verifica trivialmente para $r = 0$, mientras que si $r > 0$, podemos escribir:

$$\begin{aligned}
\nu(rx) &= \inf\{\alpha > 0 : rx \in \alpha A\} = \inf\left\{\alpha > 0 : x \in \frac{\alpha}{r}A\right\} \\
&= \inf\{r\beta > 0 : x \in \beta A\} = r\inf\{\beta > 0 : x \in \beta A\} \\
&= r\nu(x) \quad (x \in X).
\end{aligned}$$

La subaditividad (ii) se deduce de la convexidad de $A$. Para probarla, dados $x, y \in X$ y $\varepsilon > 0$ usamos la definición de ínfimo para hallar $0 < \alpha < \nu(x) + \varepsilon/2$ y $0 < \beta < \nu(y) + \varepsilon/2$ tales que $x \in \alpha A$, $y \in \beta A$. Obtenemos entonces:

$$x + y \in \alpha A + \beta A = (\alpha+\beta)\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}A + \frac{\beta}{\alpha+\beta}A\right) \subset (\alpha+\beta)A,$$

donde para la inclusión se tiene en cuenta que las combinaciones convexas de elementos de $A$ permanecen en $A$. Consecuentemente

$$\nu(x+y) \leq \alpha + \beta < \nu(x) + \nu(y) + \varepsilon.$$

La arbitrariedad de $\varepsilon$, $x$ e $y$ ya nos permite concluir que

$$\nu(x+y) \leq \nu(x) + \nu(y) \quad (x, y \in X),$$

como queríamos.

Si $A$ es equilibrado, cuando $|\mu| = 1$ se tiene

$$A = \mu(\mu^{-1}A) \subset \mu A \subset A,$$

así que $A = \mu A$. Por tanto, para $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ encontramos que

$$\begin{aligned}
\nu(\lambda x) &= \inf\left\{\alpha > 0 : x \in \frac{\alpha}{\lambda} A\right\} = \inf\left\{\alpha > 0 : x \in \frac{\alpha\overline{\lambda}}{|\lambda|^2} A\right\} \\
&= \inf\left\{\alpha > 0 : x \in \frac{\alpha}{|\lambda|} A\right\} = |\lambda| \inf\{\beta > 0 : x \in \beta A\} \\
&= |\lambda| \nu(x) \quad (x \in X).
\end{aligned}$$

El caso $\lambda = 0$ ya fue contemplado en (i); por tanto, queda probado (iii).

En cuanto a (iv), es obvio que $A \subset C$. Por otra parte, ya que $A$ es absorbente, $0 \in A$. Si $A$ es convexo, $x \in X$ con $\nu(x) < 1$, y (mediante la definición de ínfimo) elegimos $0 < \alpha < 1$ con $\alpha^{-1}x \in A$, entonces $x = \alpha\left(\alpha^{-1}x\right) + (1-\alpha)0 \in A$, de modo que $B \subset A$. Los conjuntos $B$, $C$ son claramente absorbentes (para cada $x \in X$ se tiene que $x \in 2\nu(x)B$ y $x \in \nu(x)C$), y las inclusiones $B \subset A \subset C$ muestran que $\nu_C \leq \nu \leq \nu_B$. Para probar la igualdad, fijemos $x \in X$ y elijamos $s,t > 0$ tales que $\nu_C(x) < s < t$. Por definición de ínfimo, existe $0 < \alpha < s$ tal que $x \in \alpha C$. Puesto que $C$ es absorbente, $0 \in C$; además, por (i) y (ii), $C$ es convexo. Se desprende que

$$\frac{\alpha}{s} C + \left(1 - \frac{\alpha}{s}\right) 0 \subset C,$$

o bien $\alpha C \subset sC$. Así pues, $x \in sC$, o bien $x/s \in C$, de donde $\nu(x/s) \leq 1$; ahora, $\nu(x/t) = (s/t)\nu(x/s) \leq s/t < 1$; luego, $x/t \in B$, de donde $\nu_B(x) \leq t$. Llegado este punto, la arbitrariedad de $t > \nu_C(x)$ permite concluir que $\nu_B(x) \leq \nu_C(x)$.

En lo que resta de demostración, supondremos adicionalmente que $X$ es un espacio normado y que $A$ es abierto en $X$.

Como $0 \in A$, existe $r > 0$ tal que $B(0,r) \subset A$. Reescalando $x$ conseguimos que sea absorbido por $B(0,r)$, luego también por $A$. De este modo, $\nu(x) \leq r^{-1}\|x\|$ $(x \in X)$, y se satisface (14) con $M = r^{-1}$.

Para completar la prueba, sea $B$ como en (iv), y asumamos que $x \in A$. Si $x = 0$, claramente $x \in B$. Si $x \neq 0$ entonces $(1+\varepsilon)x \in A$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, por lo que

$$\nu(x) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1,$$

y $A \subset B$. Apelando a (iv) ya resulta (vi). □

## 3.4 Separación en espacios vectoriales

Comenzamos con un resultado para el que no se requiere la presencia de topología alguna.

**Teorema 3.9 (Hahn-Banach, separación en espacios vectoriales)** *Sean $X$ un espacio vectorial y $A$, $B$ subconjuntos no vacíos,* *convexos y disjuntos de $X$. Supongamos que para algún $a_0 \in A$, el conjunto $A - a_0$ es absorbente. Entonces existe un funcional lineal no nulo $f$ sobre $X$ que separa $A$ y $B$, es decir,*

$$\sup\{\Re f(a) : a \in A\} \leq \inf\{\Re f(b) : b \in B\}.$$

*Demostración.* Basta considerar el caso real, puesto que en el caso complejo se recurre al espacio real subyacente.

Separar $A$ y $B$ es lo mismo que separar $A - B$ de $\{0\}$, donde $A - B$ es convexo y $0 \notin A - B$ (si $0 \in A - B$, entonces $A \cap B \neq \emptyset$). Por tanto, separar dos conjuntos convexos es lo mismo que separar un conjunto convexo de un punto. También haremos una traslación del problema: junto con el punto $a_0 \in A$ que, por hipótesis, hace que $A - a_0$ sea absorbente, fijamos un $b_0 \in B$ arbitrario y consideramos $U = (A - a_0) - (B - b_0)$. Se tiene que $U$ es un subconjunto convexo de $X$, y también que es absorbente ya que $A - a_0 \subset U$. Poniendo $x_0 = b_0 - a_0$, de modo que $U = A - B + x_0$, la condición $A \cap B = \emptyset$ indica que $x_0 \notin U$, y nuestro problema se reduce a separar $U$ del punto $x_0$.

Sea

$$\nu(x) = \nu_U(x) = \inf\{\alpha > 0 : x \in \alpha U\} \quad (x \in X)$$

el funcional de Minkowski de $U$. Por la Proposición 3.8, $\nu(x) \leq 1$ para todo $x \in U$ y, como $x_0 \notin U$, necesariamente $\nu(x_0) \geq 1$. Además, $\nu$ verifica las condiciones que permiten usarlo como funcional mayorante en el Teorema 2.2: la homogeneidad positiva

$$\nu(rx) = r\nu(x) \quad (r \geq 0,\ x \in X)$$

y la subaditividad

$$\nu(x+y) \leq \nu(x) + \nu(y) \quad (x, y \in X).$$

Ahora, consideramos el subespacio $\operatorname{span}\{x_0\}$ de $X$ y el funcional lineal $g$ definido en dicho subespacio por

$$g(\lambda x_0) = \lambda \nu(x_0) \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Observamos que $g$ está dominado por $\nu$, pues para $\lambda > 0$ tenemos $g(\lambda x_0) = \nu(\lambda x_0)$, mientras que para $\lambda \leq 0$ es $g(\lambda x_0) \leq 0 \leq \nu(\lambda x_0)$. El Teorema 2.2 proporciona un funcional lineal $f$ sobre $X$ que extiende a $g$ y respeta la mayoración por $\nu$.

Comprobemos que $f$ es el funcional que buscamos. Por una parte, $f(x_0) = \nu(x_0) \geq 1$ (en particular, $f \neq 0$), mientras que para cualquier $x \in U$ será $f(x) \leq \nu(x) \leq 1$. Luego, $f$ separa el conjunto $U$ del punto $x_0$. Finalmente, para todo $a \in A$ y todo $b \in B$, usando que $a - b + x_0 \in U$ obtenemos $f(a) - f(b) + f(x_0) \leq 1 \leq f(x_0)$, de donde $f(a) \leq f(b)$. Así pues, $f$ separa los conjuntos $A$ y $B$, como pretendíamos. □

## 3.5 Separación en espacios normados

Obtenemos ahora consecuencias del teorema general de separación (Teorema 3.9) en espacios normados.

### 3.5.1 Separación estricta

Sean $X$ un espacio normado y $A$ un subconjunto de $X$. Si $a_0$ es un punto interior de $A$, entonces $A - a_0$ es absorbente, por ser entorno de cero. De esta manera, la hipótesis del Teorema 3.9 queda asegurada suponiendo que uno de los conjuntos convexos a separar tiene interior no vacío. Esta hipótesis es un poco más restrictiva de lo necesario, ya que, como sabemos, un conjunto absorbente no tiene por qué ser entorno de cero, pero a cambio de imponer esta restricción se obtienen interesantes mejoras en las conclusiones.

Desarrollaremos esta idea en el Teorema 3.11. A tal fin, denotando por $A^\circ$ el interior del conjunto $A$, probaremos el siguiente resultado preliminar.

**Lema 3.10** *Sean $X$ un espacio normado y $C$ un subconjunto convexo de $X$, con $C^\circ \neq \emptyset$. Entonces $C \subset \overline{C^\circ}$ y, consecuentemente, $\overline{C} = \overline{C^\circ}$.*

*Demostración.* Sea $z \in C^\circ$, y sea $x \in C \setminus C^\circ$; en particular, $\|z - x\| > 0$. Afirmamos que

$$V = \{\lambda z + (1-\lambda)x : 0 < \lambda \leq 1\} \subset C^\circ. \tag{15}$$

Admitiendo esta inclusión como cierta, sean $0 < r \leq \|z - x\|$ y

$$0 < \lambda < \frac{r}{\|z - x\|} \leq 1.$$

Entonces

$$\|[\lambda z + (1-\lambda)x] - x\| = \lambda \, \|z - x\| < r,$$

probando que se tiene

$$\emptyset \neq U(x,r) \cap V \subset U(x,r) \cap C^\circ$$

y, en particular, que $x \in \overline{C^\circ}$. De la arbitrariedad de $x$ se infiere que $C \setminus C^\circ \subset \overline{C^\circ}$. Como, trivialmente, $C^\circ \subset \overline{C^\circ}$, encontramos que

$$C = (C \setminus C^\circ) \cup C^\circ \subset \overline{C^\circ}.$$

Así pues, $\overline{C} \subset \overline{C^\circ}$. La inclusión $\overline{C^\circ} \subset \overline{C}$ es obvia, y se concluye que $\overline{C} = \overline{C^\circ}$, como se pretendía.

Ahora sólo resta establecer (15). Ya que $z \in C^\circ$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $U(z,\varepsilon) \subset C$. Fijado $0 < \lambda \leq 1$, pongamos $y = \lambda z + (1-\lambda)x$; bastará demostrar que $U(y, \lambda\varepsilon) \subset C$. En efecto, sea $w \in U(y, \lambda\varepsilon)$ y consideremos

$$v = \frac{w - (1-\lambda)x}{\lambda}.$$

Se cumple:

$$\|v - z\| = \left\| \frac{w - (1-\lambda)x}{\lambda} - z \right\| = \frac{1}{\lambda} \, \|w - [\lambda z + (1-\lambda)x]\| = \frac{1}{\lambda} \, \|w - y\| < \frac{\lambda\varepsilon}{\lambda} = \varepsilon,$$

así que $v \in C$. Puesto que $w = \lambda v + (1-\lambda)x$, con $v, x \in C$, y $C$ es convexo, necesariamente $w \in C$, completando la prueba. □

**Teorema 3.11 (Hahn-Banach, separación estricta en espacios normados)** *Sean $X$ un espacio normado y $A$, $B$ subconjuntos convexos de $X$. Supongamos que $A^\circ \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ y $A^\circ \cap B = \emptyset$. Entonces existen $f \in X' \setminus \{0\}$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que*

$$\sup\{\Re f(a) : a \in \overline{A}\} \leq \gamma \leq \inf\{\Re f(b) : b \in B\},$$

*con*

$$\Re f(a) < \gamma \leq \inf\{\Re f(b) : b \in B\} \quad (a \in A^\circ).$$

*Demostración.* Para establecer este resultado aplicaremos el teorema general de separación (Teorema 3.9), junto con algunas observaciones sobre subconjuntos convexos de un espacio normado. Como habitualmente, bastará probar el caso real.

Para cualquier punto $a_0 \in A^\circ$, el conjunto $A^\circ - a_0$ contiene un entorno de cero y, por lo tanto, es absorbente. Se tiene además que, en cualquier espacio normado, el interior de un conjunto convexo es también convexo. Luego, podemos aplicar el teorema de separación a los conjuntos convexos, no vacíos y disjuntos $A^\circ$ y $B$ para obtener un funcional lineal $f \neq 0$ sobre $X$ y un escalar $\gamma \in \mathbb{R}$, satisfaciendo

$$f(a) \leq \gamma \leq f(b) \quad (a \in A^\circ,\ b \in B).$$

Todo funcional lineal no idénticamente nulo sobre un espacio normado es abierto. Por tanto, $f(A^\circ)$ es un subconjunto abierto y convexo de $\mathbb{R}$, es decir, un intervalo abierto, así que

$$f(a) < \sup\{f(x) : x \in A^\circ\} \leq \gamma \leq \inf\{f(b) : b \in B\} \quad (a \in A^\circ).$$

Para ver que $f$ es continuo, observamos que el hiperplano de ecuación $\{f = \gamma\}$ no es denso en $X$, porque no corta al abierto no vacío $A^\circ$; pero entonces es cerrado en $X$, forzando la continuidad de $f$ (Proposición 3.5).

Completamos la demostración viendo que $f$ separa también los conjuntos $\overline{A}$ y $B$. Nótese que $A^\circ \subset f^{-1}(-\infty, \gamma]$. Como el intervalo $(-\infty, \gamma]$ es cerrado y $f$ es continua, el Lema 3.10 obliga a que $\overline{A} = \overline{A^\circ} \subset f^{-1}(-\infty, \gamma]$, así que

$$\sup\{f(a) : a \in \overline{A}\} \leq \gamma \leq \inf\{f(b) : b \in B\}.$$

□

**Observación 3.12** *Comparando el Teorema 3.11 con el Teorema 3.9, advertimos que ahora se tiene una norma en $X$ y, a cambio de fortalecer un poco las hipótesis sobre $A$ exigiendo que $A^\circ \neq \emptyset$, debilitamos el requisito de que $A$ y $B$ sean disjuntos, pidiendo tan sólo que $A^\circ \cap B = \emptyset$. La conclusión es que se consigue separar $\overline{A}$ de $B$ (y, en particular, $A$ de $B$) mediante un funcional lineal continuo de forma que la separación entre $A^\circ$ y $B$ es* estricta*, en el sentido de que los conjuntos $f(A^\circ)$ y $f(B)$ son disjuntos (fig.*

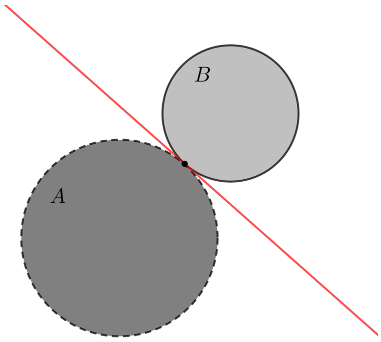


**Figura 2.** Separación estricta.

*2).*

### 3.5.2 Funcionales y puntos de soporte

Interpretemos geométricamente un interesante caso particular del Teorema 3.11. Sean $X$ un espacio normado y $A$ un subconjunto convexo de $X$, con interior no vacío. Dado cualquier punto $x_0$ en la frontera de $A$, podemos aplicar el Teorema 3.11 con $B = \{x_0\}$ para obtener un funcional lineal continuo $f$ sobre $X$ que verifica:

$$\Re f(a) \leq \Re f(x_0) \quad (a \in A).$$

La interpretación geométrica de esta desigualdad es la siguiente: el hiperplano afín real de ecuación $\{\Re f = \Re f(x_0)\}$ pasa por el punto $x_0$ y deja el conjunto $A$ a un lado: dicho hiperplano «soporta» al conjunto $A$ en el punto $x_0$. Como consecuencia, decimos que $f$ es un *funcional de soporte* del conjunto $A$, y también que $x_0$ es un *punto de soporte* de $A$ (fig. 3). Hemos probado así el siguiente:

**Corolario 3.13 (Puntos de soporte)** *Si $X$ es un espacio normado y $A$ un subconjunto convexo de $X$ con interior no vacío, entonces todo punto de la frontera de $A$ es un punto de soporte de $A$.*

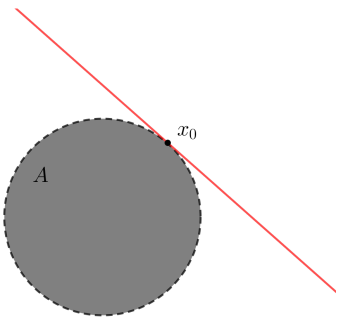


**Figura 3.** Punto de soporte.

### 3.5.3 Separación fuerte

En algunos casos es posible cuantificar la separación entre subconjuntos de un espacio normado $X$. Supongamos que dos subconjuntos convexos no vacíos $A$ y $B$ de $X$, no sólo son disjuntos, sino que están a distancia positiva, esto es:

$$d(A,B) = \inf\{\|a-b\| : a \in A,\ b \in B\} = \rho > 0.$$

Si $U$ es la bola unidad abierta de $X$, consideramos los conjuntos $A+\rho U$ y $B$, que son convexos, no vacíos y disjuntos, con $A+\rho U$ abierto. El Teorema 3.11 proporciona $f \in X' \setminus \{0\}$ tal que

$$\sup\{\Re f(a+\rho u) : a \in A,\ u \in U\} \leq \inf\{\Re f(b) : b \in B\}.$$

Esta desigualdad no se altera si la dividimos por $\|f\|$, así que podemos suponer $\|f\| = 1$; pero entonces $\Re f(U) = (-1,1)$, con lo cual

$$\sup\{\Re f(a+\rho u) : a \in A,\ u \in U\} = \sup\{\Re f(a) + \rho \Re f(u) : a \in A,\ u \in U\} = \sup\{\Re f(a) : a \in A\} + \rho.$$

Poniendo

$$\gamma = \sup\{\Re f(a) : a \in A\},$$

hemos demostrado:

**Teorema 3.14 (Hahn-Banach, separación fuerte en espacios normados)** *Sean $A$ y $B$ subconjuntos convexos no vacíos de un espacio normado $X$, y supongamos que $d(A,B) = \rho > 0$. Entonces existen $f \in X'$, con $\|f\| = 1$, y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que*

$$\sup\{\Re f(a) : a \in A\} = \gamma < \gamma + \rho \leq \inf\{\Re f(b) : b \in B\}.$$

**Observación 3.15** *La tesis del Teorema 3.14 se resume diciendo que el funcional $f$* separa fuertemente *los conjuntos $A$ y $B$. Tenemos dos hiperplanos afines reales, los de ecuaciones $\{\Re f = \gamma\}$ y $\{\Re f = \gamma + \rho\}$, tales que el conjunto $A$ queda a un lado de ambos y $B$ al otro, de tal manera que la distancia entre estos hiperplanos es $\rho$, la máxima posible (fig. 4).*

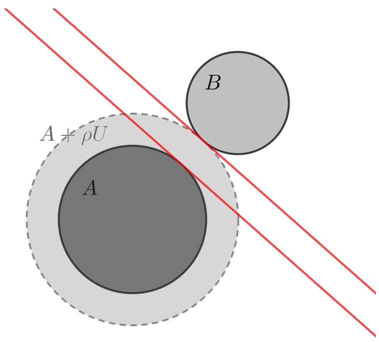


**Figura 4.** Separación fuerte.

**Observación 3.16** *Las condiciones paradigmáticas para aplicar el Teorema 3.14 se presentan cuando uno de los conjuntos convexos, digamos A, es compacto y el otro, B, es cerrado, con $A \cap B = \emptyset$. En efecto, la función continua $x \mapsto d(x,B)$ alcanza su valor mínimo en el compacto A, luego $d(A,B) > 0$.*