Introducción a la teoría espectral de operadores lineales

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1 Introducción

La teoría espectral es una de las principales ramas del análisis funcional y sus aplicaciones. *Grosso modo*, se ocupa de ciertos operadores inversos, sus propiedades generales y sus relaciones con los operadores originales. Tales operadores inversos surgen de forma natural en relación con el problema de resolver ecuaciones (sistemas de ecuaciones algebraicas lineales, ecuaciones diferenciales, ecuaciones integrales). De hecho, la investigación sobre los problemas de valores de frontera de Sturm-Liouville y la teoría de ecuaciones integrales de Fredholm impulsaron decididamente el desarrollo de este campo. Por otra parte, como veremos, la teoría espectral de operadores es muy importante para la comprensión de los propios operadores.

A modo de introducción al tema, diremos que la teoría espectral en espacios vectoriales de dimensión finita es la teoría de autovalores de matrices. Esta teoría es mucho más simple que la teoría espectral en dimensión infinita, pero reviste una gran importancia práctica, particularmente en análisis numérico. Por otra parte, los problemas de valores propios de matrices también sugieren parte del entorno general y algunos de los conceptos de la teoría espectral en espacios normados de dimensión infinita.

En este capítulo nos centraremos en la teoría espectral de operadores compactos, a la que que dedicamos la sección 4. Un operador $T : X \to Y$ entre dos espacios normados es compacto si la imagen por T de la bola unidad abierta de X es relativamente compacta (es decir, tiene clausura compacta) en Y. En dimensión infinita, la teoría espectral de operadores compactos es la que guarda más similitud con la teoría espectral de matrices entre espacios finito-dimensionales, hasta el punto de que la mayoría de los enunciados pueden ser transcritos literalmente del caso matricial. Previamente, en las secciones 2 y 3 expondremos algunos resultados sobre dualidad en espacios normados que, aparte de guardar estrecha relación con la compacidad y de ser útiles en el desarrollo de la teoría espectral de operadores compactos, revisten un indudable interés en sí mismos.

2 Topologías débil y débil*

La topología de un espacio de Banach posee una gran cantidad de abiertos, lo cual es una ventaja por cuanto proporciona muchas funciones continuas definidas sobre el espacio. En cambio, posee, lógicamente, pocos compactos; de hecho, como sabemos, la bola unidad cerrada de un espacio de Banach de dimensión infinita nunca es compacta. Dotando al espacio de Banach de una topología más débil conseguiríamos más compactos, pero, en principio, perderíamos funciones continuas. El objetivo de esta sección es mostrar cómo podemos debilitar la topología de un espacio de Banach sin perder funcionales lineales continuos y cómo es posible dotar al espacio dual de una topología en la cual la bola unidad cerrada siempre es compacta, destacando el papel que el teorema de Hahn-Banach desempeña en todo el proceso.

2.1 Topología inicial definida por una familia de aplicaciones

Sea I un conjunto de índices arbitrario y, para cada $i \in I$, sea $\varphi_i : X \to Y_i$ una aplicación de un conjunto X en un espacio topológico (Y_i, τ_i). Nos planteamos dos problemas en relación con la familia $\{\varphi_i\}_{i\in I}$.

(*i*) *Dotar a X de una topología que haga continuas a todas las aplicaciones de esta familia. Si es posible, construir la topología menos fina (es decir, con el menor número de abiertos) σ sobre X que las hace continuas.*

Si X está dotado de la topología discreta, en la que todo subconjunto de X es abierto, entonces cada φ_i $(i \in I)$ es continua; pero la discreta no es, desde luego, la topología menos fina con esta propiedad. Por otra parte, dado un abierto $\omega_i \subset Y_i$ se debe tener que $\varphi_i^{-1}(\omega_i) \in \sigma$. Cuando ω_i recorre los abiertos de Y_i y cuando i recorre I, las antiimágenes $\varphi_i^{-1}(\omega_i)$ constituyen una familia de subconjuntos de X que son necesariamente abiertos en la topología σ; designamos esta familia por $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. La topología σ es la topología menos fina en la que los $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ son abiertos. Nos vemos conducidos así al segundo problema:

(ii) *Construir la familia menos fina posible $\mathscr{F}$ de subconjuntos de X que sea estable para intersecciones finitas y uniones arbitrarias, y tal que $U_\lambda \in \mathscr{F}$ para todo $\lambda \in \Lambda$.*

Esto se logra de la siguiente manera. En primer lugar, se consideran las intersecciones finitas de los conjuntos $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, es decir, $\bigcap_{\lambda\in\Gamma} U_\lambda$, $\Gamma \subset \Lambda$, Γ finito. Se obtiene así una familia Φ de subconjuntos de X, estable para intersecciones finitas. Se considera después la familia $\mathscr{F}$ obtenida uniendo arbitrariamente elementos de Φ. La familia $\mathscr{F}$, que evidentemente es estable para uniones arbitrarias, también lo es para intersecciones finitas. En efecto:

$$\bigcup_{j\in J}\left(\bigcap_{\lambda_j\in\Gamma_j} U_{\lambda_j}\right) \cap \bigcup_{k\in K}\left(\bigcap_{\lambda_k\in\Gamma_k} U_{\lambda_k}\right) = \bigcup_{j\in J}\bigcup_{k\in K}\left(\bigcap_{\lambda_j\in\Gamma_j} U_{\lambda_j} \cap \bigcap_{\lambda_k\in\Gamma_k} U_{\lambda_k}\right),$$

donde los conjuntos de índices J, K son arbitrarios y $\Gamma_j, \Gamma_k \subset \Lambda$ son finitos.

Así pues, los abiertos de la topología σ se obtienen al considerar primero las intersecciones finitas de conjuntos de la forma $\varphi_i^{-1}(\omega_i)$, con ω_i abierto de Y_i, y luego las uniones arbitrarias de estas intersecciones. Dicho de otra manera, los conjuntos $\varphi_i^{-1}(\omega_i)$ constituyen una subbase de σ, y las intersecciones finitas de estos conjuntos forman una base de esta topología. Una base local o base de entornos de $x \in X$ para la topología σ está constituida por los conjuntos de la forma $\bigcap_{\text{finita}} \varphi_i^{-1}(V_i)$, donde V_i es un entorno de $\varphi_i(x)$ en Y_i.

En lo que sigue se considerará a X provisto de la topología σ, que recibe el nombre de *topología inicial* generada por la familia de aplicaciones $\{\varphi_i\}_{i\in I}$. A continuación probaremos algunas propiedades elementales de esta topología.

Proposición 2.1 *Sea $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión en X. Entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ si, y sólo si, $\lim_{n\to\infty}\varphi_i(x_n) = \varphi_i(x)$ para todo $i \in I$.*

Demostración. Si $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$ entonces $\varphi_i(x_n) \to \varphi_i(x)$ cuando $n \to \infty$ para todo $i \in I$, ya que cada φ_i es continua.

Recíprocamente, sea U un entorno de x. No se pierde generalidad suponiendo que U es de la forma $U = \bigcap_{i\in J}\varphi_i^{-1}(V_i)$ para algún $J \subset I$, J finito. Para todo $i \in J$ existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N_i$ implica $\varphi_i(x_n) \in V_i$. Si $N = \max_{i\in J} N_i$, entonces $x_n \in U$ para cada $n \geq N$. □

La siguiente propiedad es conocida en la literatura como «propiedad universal de las topologías iniciales».

Proposición 2.2 *Una aplicación $\psi : Z \to X$, donde Z un espacio topológico, es continua si, y sólo si, $\varphi_i \circ \psi : Z \to Y_i$ es continua para cada $i \in I$.*

Demostración. Como la composición de aplicaciones continuas es continua, si ψ es continua también lo es $\varphi_i \circ \psi$ para cada $i \in I$.

Recíprocamente, sea U un abierto de X; veamos que $\psi^{-1}(U)$ es abierto en Z. Se sabe que U es de la forma $U = \bigcup_{\text{arbitraria}} \bigcap_{\text{finita}} \varphi_i^{-1}(\omega_i)$, con ω_i abierto de Y_i. Por tanto,

$$\psi^{-1}(U) = \bigcup_{\text{arbitraria}} \bigcap_{\text{finita}} \psi^{-1}\left[\varphi_i^{-1}(\omega_i)\right] = \bigcup_{\text{arbitraria}} \bigcap_{\text{finita}} (\varphi_i \circ \psi)^{-1}(\omega_i),$$

que es abierto en Z porque cada composición $\varphi_i \circ \psi$ es continua. □

2.2 La topología débil $\sigma(X, X')$

Sea X un espacio normado, y sea $f \in X'$. Escribimos $\langle f, x\rangle = f(x)$ $(x \in X)$ y denotamos por $\varphi_f : X \to \mathbb{K}$ la aplicación definida por $\varphi_f(x) = \langle f, x\rangle$ $(x \in X)$. Cuando f recorre X' obtenemos una familia $\{\varphi_f\}_{f \in X'}$ de aplicaciones de X en $\mathbb{K}$.

Definición 2.3 *La* topología débil $\sigma(X, X')$ *de X es la topología inicial generada por la familia $\{\varphi_f\}_{f \in X'}$, es decir, la topología menos fina sobre X que hace continuos a todos los funcionales de X'.*

Proposición 2.4 *La topología débil $\sigma(X, X')$ es Hausdorff.*

Demostración. Sean $x_1, x_2 \in X$, con $x_1 \neq x_2$. Necesitamos construir conjuntos O_1 y O_2, abiertos en la topología débil $\sigma(X, X')$, de forma que $x_1 \in O_1$, $x_2 \in O_2$ y $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.

Por el teorema de Hahn-Banach , existen $f \in X'$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$\langle \Re f, x_1\rangle < \alpha < \langle \Re f, x_2\rangle.$$

Definimos

$$O_1 = \{x \in X : \langle \Re f, x\rangle < \alpha\} = \varphi_{\Re f}^{-1}(-\infty, \alpha),$$

$$O_2 = \{x \in X : \langle \Re f, x\rangle > \alpha\} = \varphi_{\Re f}^{-1}(\alpha, +\infty).$$

Los conjuntos O_1 y O_2 son $\sigma(X, X')$-abiertos que verifican $x_1 \in O_1$, $x_2 \in O_2$ y $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. □

Proposición 2.5 *Se obtiene una base de entornos de $x_0 \in X$ para la topología $\sigma(X, X')$ considerando todos los conjuntos de la forma*

$$V = \{x \in X : |\langle f_i, x - x_0\rangle| < \varepsilon \ (i \in I)\},$$

donde I es finito, $f_i \in X'$ $(i \in I)$, y $\varepsilon > 0$.

Demostración. El conjunto

$$V = \bigcap_{i \in I} \{x \in X : |\langle f_i, x\rangle - a_i| < \varepsilon\} = \bigcap_{i \in I} \varphi_{f_i}^{-1}\left[D(a_i, \varepsilon)\right],$$

con $a_i = \langle f_i, x_0 \rangle$ y $D(a_i, \varepsilon) = \{a \in \mathbb{K} : |a - a_i| < \varepsilon\}$, es $\sigma(X, X')$-abierto y contiene a x_0. Sea U un entorno de x_0 en $\sigma(X, X')$. Entonces U contiene a algún entorno W de x_0 de la forma $W = \bigcap_{i \in I} \varphi_{f_i}^{-1}(\omega_i)$, con I finito y ω_i entorno de a_i en $\mathbb{K}$ para cada $i \in I$. Existe $\varepsilon > 0$ tal que $D(a_i, \varepsilon) \subset \omega_i$ para todo $i \in I$. Por tanto, $x_0 \in V \subset W \subset U$. $\square$

Definición 2.6 *Dada una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X, se denota por $x_n \rightharpoonup x$ la convergencia de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a x en la topología débil $\sigma(X, X')$. En ocasiones se insiste diciendo que $x_n \rightharpoonup x$* débilmente en X. *Nos referiremos a la topología generada por la norma como* topología fuerte*; así, se dirá que $x_n \to x$* fuertemente en X *cuando $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$.*

Proposición 2.7 *Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X.*

(i) Se verifica que $x_n \rightharpoonup x$ en $\sigma(X, X')$ si, y sólo si, $\lim_{n\to\infty} \langle f, x_n \rangle = \langle f, x \rangle$ $(f \in X')$.

(ii) Si $x_n \to x$ fuertemente en X, entonces $x_n \rightharpoonup x$ débilmente.

(iii) Si $x_n \rightharpoonup x$ débilmente en X, entonces $\{\|x_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada y $\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$.

(iv) Si $x_n \rightharpoonup x$ débilmente en X y si $f_n \to f$ fuertemente en X' (es decir, $\|f_n - f\| \to 0$ en la norma de funcionales, cuando $n \to \infty$), entonces $\lim_{n\to\infty} \langle f_n, x_n \rangle = \langle f, x \rangle$.

Demostración. El apartado (i) resulta de la Proposición 2.1 y la definición de la topología débil $\sigma(X, X')$.

El apartado (ii) se infiere de (i), ya que $|\langle f, x_n - x \rangle| \leq \|f\| \, \|x_n - x\|$ $(n \in \mathbb{N})$.

En las hipótesis de (iii), pongamos $\Lambda f = \langle f, x \rangle$, $\Lambda_n f = \langle f, x_n \rangle$ $(f \in X', n \in \mathbb{N})$. Se tiene que Λ, Λ_n $(n \in \mathbb{N})$ son funcionales lineales continuos sobre X', con $\|\Lambda\| = \|x\|$ y $\|\Lambda_n\| = \|x_n\|$ $(n \in \mathbb{N})$. Por (i), si $x_n \rightharpoonup x$ débilmente en X entonces, para cada $f \in X'$, la sucesión $\{\Lambda_n f\}_{n=1}^{\infty}$ converge a Λf. Como X' es un espacio de Banach, el teorema de clausura de Banach-Steinhaus permite concluir que $\{\|\Lambda_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada y que

$$\|\Lambda\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|\Lambda_n\|,$$

lo que establece (iii).

Finalmente, para probar (iv) escribimos

$$|\langle f_n, x_n \rangle - \langle f, x \rangle| \leq |\langle f_n - f, x_n \rangle| + |\langle f, x_n - x \rangle| \leq \|f_n - f\| \, \|x_n\| + |\langle f, x_n - x \rangle| \quad (n \in \mathbb{N})$$

y aplicamos (i) y (iii). $\square$

Proposición 2.8 *Cuando X es de dimensión finita, la topología débil $\sigma(X, X')$ y la topología usual coinciden. En particular, una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente si, y solamente si, converge fuertemente.*

Demostración. Por construcción, la topología débil siempre tiene menos abiertos que la topología fuerte.

Inversamente, debemos comprobar que todo abierto fuerte es un abierto débil. Sea $x_0 \in X$ y sea U un entorno de x_0 en la topología fuerte; hemos de construir un $\sigma(X,X')$-entorno V de x_0 tal que $V \subset U$. Por la Proposición 2.5, se trata de encontrar un subconjunto finito $\{f_i\}_{i\in I}$ de X' y un $\varepsilon > 0$ tales que

$$V = \{x \in X : |\langle f_i, x - x_0\rangle| < \varepsilon \ (i \in I)\} \subset U.$$

Supongamos que $U(x_0,r) \subset U$, y elijamos una base $e_1, e_2, \ldots, e_n$ de X con $\|e_i\| = 1$ para cada $i = 1,2,\ldots,n$. Entonces todo $x \in X$ admite una representación $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, donde las aplicaciones $x \mapsto \lambda_i$ definen n funcionales lineales continuos sobre X, que denotaremos f_i $(i = 1,2,\ldots,n)$. Sigue que

$$\|x - x_0\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\langle f_i, x - x_0\rangle| < n\varepsilon$$

cuando $x \in V = \{x \in X : |\langle f_i, x - x_0\rangle| < \varepsilon \ (i = 1,2,\ldots,n)\}$. Sin más que elegir $\varepsilon = r/n$ ya se obtiene $V \subset U$. □

Tal como se acaba de poner de manifiesto en la demostración anterior, los abiertos (respectivamente, cerrados) en la topología débil $\sigma(X,X')$ son también abiertos (respectivamente, cerrados) en la topología fuerte. Si X es de dimensión infinita, la topología débil $\sigma(X,X')$ es estrictamente menos fina que la topología fuerte, es decir, existen abiertos (respectivamente, cerrados) en la topología fuerte que no son abiertos (respectivamente, cerrados) en la topología débil. Se ofrecen a continuación dos ejemplos.

Ejemplo 2.9 *Si X tiene dimensión infinita, la esfera unidad $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ nunca es $\sigma(X,X')$-cerrada.*

Resolución. Demostraremos que

$$\overline{S}^{\sigma(X,X')} = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}, \tag{1}$$

donde $\overline{S}^{\sigma(X,X')}$ denota la clausura débil de S.

Sea $x_0 \in X$, con $\|x_0\| < 1$; comprobemos que $x_0 \in \overline{S}^{\sigma(X,X')}$. Para ello, dado un $\sigma(X,X')$-entorno V de x_0, hemos de asegurar que $V \cap S \neq \emptyset$. En virtud de la Proposición 2.5 se puede suponer que V es de la forma

$$V = \{x \in X : |\langle f_i, x - x_0\rangle| < \varepsilon \ (i = 1,2,\ldots,n)\},$$

con $\varepsilon > 0$ y $f_1, f_2, \ldots, f_n \in X'$. Fijemos $y_0 \in X \setminus \{0\}$ satisfaciendo

$$\langle f_i, y_0\rangle = 0 \quad (i = 1,2,\ldots,n).$$

Un tal y_0 existe ya que, en caso contrario, la aplicación lineal $\varphi : X \to \mathbb{K}^n$ definida por

$$\varphi(z) = (\langle f_1, z\rangle, \langle f_2, z\rangle, \ldots, \langle f_n, z\rangle)$$

sería inyectiva y, por tanto, un isomorfismo de X sobre $\varphi(X)$, obligando a que $\dim X \leq n$. La función $g(t) = \|x_0 + t y_0\|$ es continua en $[0,+\infty)$, con $g(0) < 1$ y $\lim_{t\to+\infty} g(t) = +\infty$; luego, algún $t_0 > 0$ es tal que $\|x_0 + t_0 y_0\| = 1$, así que $x_0 + t_0 y_0 \in V \cap S$.

Hemos probado que

$$S \subset \{x \in X : \|x\| \leq 1\} \subset \overline{S}^{\sigma(X,X')}.$$

Puesto que $\{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ es $\sigma(X,X')$-cerrado (como se verá con el Teorema 2.13), se concluye (1). □

Ejemplo 2.10 *Si X es de dimensión infinita, el conjunto $U = \{x \in X : \|x\| < 1\}$ nunca es $\sigma(X,X')$-abierto. De hecho, el interior débil de U es vacío.*

Resolución. Supongamos, para alcanzar una contradicción, que existen $x_0 \in U$ y un $\sigma(X,X')$-entorno V de x_0 tales que $V \subset U$. Como acabamos de probar, V contiene una recta que pasa por x_0. Pero esto contradice el hecho de que $V \subset U$. □

2.3 Topología débil, conjuntos convexos y operadores lineales

La topología débil $\sigma(X,X')$ es la menos fina sobre X que hace continuos a los elementos de X'; luego, todo funcional lineal fuertemente continuo sobre X es también $\sigma(X,X')$-continuo. Recíprocamente, si f es un funcional lineal $\sigma(X,X')$-continuo entonces $f^{-1}(V)$ es $\sigma(X,X')$-abierto, y por lo tanto fuertemente abierto, en X para cada abierto $V \subset \mathbb{K}$, de manera que $f \in X'$. En otras palabras, la clase de funcionales lineales continuos es la misma para las dos topologías, lo que prueba que al debilitar la topología de un espacio normado mediante $\sigma(X,X')$ no se pierden funcionales lineales continuos. No obstante, por simetría con la Proposición 2.26, daremos ahora otra demostración de este hecho (Proposición 2.12) valiéndonos del Lema 2.11.

Lema 2.11 *Sea E un espacio vectorial y sean $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ una colección de $n+1$ funcionales lineales sobre E, tales que $\varphi_i(v) = 0$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ implica $\varphi(v) = 0$. Entonces existen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ satisfaciendo $\varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i$.*

Demostración. Definimos $p : X \to \mathbb{K}^n$ por

$$p(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) \quad (x \in X).$$

Si $p(x_1) = p(x_2)$, la hipótesis sobre φ obliga a que $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$. Así pues, $f(p(x)) = \varphi(x)$ $(x \in X)$ define un funcional lineal f sobre $p(X)$. Extendemos f a un funcional lineal F sobre $\mathbb{K}^n$; esto significa que existen $\lambda_i \in \mathbb{K}$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ tales que

$$F(u_1, \ldots, u_n) = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n \quad ((u_1, \ldots, u_n)) \in \mathbb{K}^n).$$

Se concluye que

$$\varphi(x) = F(p(x)) = F(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i(x) \quad (x \in X).$$

□

Proposición 2.12 *Sea $f : X \to \mathbb{K}$ una aplicación lineal y continua para la topología $\sigma(X,X')$. Entonces $f \in X'$.*

Demostración. Como f es $\sigma(X,X')$-continua, existe un entorno V de cero en $\sigma(X,X')$ tal que

$$|\langle f,x\rangle|<1 \quad (x\in V). \tag{2}$$

Podemos suponer que V es de la forma

$$V=\{x\in X:|\langle f_i,x\rangle|<\varepsilon\ (i=1,2,\ldots,n)\},$$

con $f_i\in X'$ $(i=1,2,\ldots,n)$ y $\varepsilon>0$. Si $\langle f_i,x\rangle=0$ $(i=1,2,\ldots,n)$, entonces también $\langle f_i,\lambda x\rangle=0$ $(\lambda>0,\ i=1,2,\ldots,n)$, de manera que $\lambda x\in V$ $(\lambda>0)$. Sigue de (2) que

$$|\langle f,x\rangle|<\frac{1}{\lambda} \quad (\lambda>0),$$

obligando a que $\langle f,x\rangle=0$. Ahora, el Lema 2.11 proporciona $\lambda_i\in\mathbb{K}$ $(i=1,2,\ldots,n)$ tales que $f=\sum_{i=1}^n\lambda_i f_i$. Puesto que $f_i\in X'$ $(i=1,2,\ldots,n)$ y X' es un espacio vectorial, se concluye que $f\in X'$, como se pretendía. $\square$

Todo conjunto $\sigma(X,X')$-cerrado es cerrado en la topología fuerte, aunque sabemos que el recíproco es, en general, falso en dimensión infinita (Ejemplo 2.9). El siguiente resultado muestra que los conjuntos convexos son una excepción.

Teorema 2.13 (Mazur) *Sea C un subconjunto convexo de un espacio normado X. Entonces la $\sigma(X,X')$-clausura de C, $\overline{C}^{\sigma(X,X')}$, coincide con su clausura fuerte, $\overline{C}$.*

Demostración. Como $\overline{C}^{\sigma(X,X')}$ es débilmente cerrado también es fuertemente cerrado, así que $\overline{C}\subset\overline{C}^{\sigma(X,X')}$.

Recíprocamente, dado $x_0\notin\overline{C}$, el teorema de Hahn-Banach proporciona un hiperplano cerrado que separa estrictamente $\{x_0\}$ y $\overline{C}$; es decir, existen $f\in X'$ y $\alpha\in\mathbb{R}$ tales que

$$\langle\Re f,x_0\rangle<\alpha<\langle\Re f,c\rangle \quad (c\in\overline{C}).$$

Poniendo

$$V=\{x\in X:\langle\Re f,x\rangle<\alpha\}$$

encontramos que V es un $\sigma(X,X')$-entorno de x_0 tal que $V\cap C=\emptyset$, lo cual prueba que $x_0\notin\overline{C}^{\sigma(X,X')}$. $\square$

Corolario 2.14 *Un subconjunto convexo de un espacio normado:*

(i) *es fuertemente cerrado si, y sólo si, es débilmente cerrado; y*

(ii) *es fuertemente denso si, y sólo si, es débilmente denso.*

Demostración. Se obtiene como consecuencia inmediata del Teorema 2.13. $\square$

Corolario 2.15 *Si la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ converge débilmente a $x \in X$, entonces existe una sucesión $\{y_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X$ tal que:*

(i) cada y_i $(i \in \mathbb{N})$ es combinación convexa de un número finito de términos de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, es decir, para cada $i \in \mathbb{N}$, existen $\alpha_{in} \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ tales que $\alpha_{in} \neq 0$ tan sólo en número finito, satisfaciendo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{in} = 1 \quad y \quad y_i = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{in} x_n;$$

(ii) $y_i \to x$ fuertemente.

Demostración. Sea H la envolvente convexa (conjunto de todas las combinaciones convexas) de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, y sea K la clausura débil de H. Entonces $x \in K$. Por el Teorema 2.13, x también está en la clausura fuerte de H. Consecuentemente, existe una sucesión $\{y_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H$ que converge fuertemente a x. □

Ejemplo 2.16 *Supongamos que f y f_n $(n \in \mathbb{N})$ son funciones en $C[0,1]$ tales que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ $(0 \leq x \leq 1)$ y $|f_n(x)| \leq 1$ $(0 \leq x \leq 1,\ n \in \mathbb{N})$. Existe una sucesión de combinaciones convexas de la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge uniformemente a f.*

Resolución. Se considera sobre $C[0,1]$ la norma del supremo, de modo que la convergencia fuerte equivale a la convergencia uniforme sobre $[0,1]$. Si μ es cualquier medida de Borel compleja sobre $[0,1]$, el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue implica que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n \, d\mu = \int_0^1 f \, d\mu.$$

Atendiendo a la identificación del dual de $C[0,1]$ con el espacio de todas las medidas de Borel complejas regulares sobre $[0,1]$ (teorema de representación de Riesz), esto significa que $f_n \to f$ débilmente. Ahora basta con aplicar el Corolario 2.15. □

Teorema 2.17 *Sean X e Y dos espacios normados, y sea $T : X \to Y$ un operador lineal y continuo. Entonces T es continuo de X con la topología débil $\sigma(X,X')$ en Y con la topología débil $\sigma(Y,Y')$. También se verifica el recíproco.*

Demostración. Según la Proposición 2.2, basta probar que para toda $f \in Y'$ la aplicación $x \mapsto \langle f, Tx\rangle$ es continua de X con la topología débil $\sigma(X,X')$ en $\mathbb{K}$. Pero la aplicación $x \mapsto \langle f, Tx\rangle$ es un funcional lineal y continuo sobre X, y por tanto es, asimismo, continua al considerar sobre X la topología débil $\sigma(X,X')$.

Recíprocamente, supongamos que T es lineal y continuo de X en Y cuando ambos espacios están provistos de sus respectivas topologías débiles, y que T no está acotado, es decir, para todo $M > 0$ existe $x \in X$ tal que $\|x\| = 1$ y $\|Tx\| > M$. Eligiendo para cada $n \in \mathbb{N}$ un vector unitario $z_n \in X$ con $\|Tz_n\| > n^2$ y poniendo $x_n = z_n/n$ obtenemos una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, convergente en norma (luego, débilmente) a cero, tal que $\lim_{n\to\infty} \|Tx_n\| = \infty$, en contradicción con el hecho de que las sucesiones débilmente convergentes están acotadas (Proposición 2.7). □

Observación 2.18 *Si $T \in \mathscr{B}(X,Y)$, entonces T es fuerte-débil continuo. En efecto, todo $\sigma(Y,Y')$-abierto G es un abierto fuerte en Y, y como $T \in \mathscr{B}(X,Y)$, necesariamente $T^{-1}(G)$ es un abierto fuerte en X. Se probará en el Teorema 2.29 que también vale el recíproco.*

Por otra parte, si $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ entonces T es débil-fuerte continuo: para toda $f \in Y'$ la aplicación $x \mapsto \langle f, Tx \rangle$ está en X', luego (por la propia construcción de $\sigma(X,X')$) es continuo de X con su topología débil en $\mathbb{K}$. Igualmente, se cumple el recíproco, pues si el operador lineal $T : X \to Y$ es débil-fuerte continuo entonces, para cada abierto fuerte $G \subset Y$, $T^{-1}(G)$ es $\sigma(X,X')$-abierto y, por tanto, fuertemente abierto en X, de modo que $T \in \mathscr{B}(X,Y)$.

El siguiente ejemplo muestra una excepción a los resultados anteriores, debida a la ausencia de linealidad.

Ejemplo 2.19 *Como es bien sabido, la norma de un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es continua respecto de la topología fuerte de X que ella misma genera; pero no lo es respecto de la topología débil $\sigma(X,X')$, ya que la antiimagen por la norma de la bola unidad abierta de $\mathbb{K}$ es la bola unidad abierta de X, que nunca es $\sigma(X,X')$-abierta (Ejemplo 2.10).*

2.4 La topología débil* $\sigma(X',X)$

Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio normado, sea X' su dual, dotado de la norma de funcionales

$$\|f\|_{X'} = \sup\{|\langle f,x \rangle| : x \in X,\ \|x\|_X \leq 1\} \quad (f \in X'),$$

y sea X'' su bidual, es decir, el dual de X', provisto de la norma

$$\|F\|_{X''} = \sup\left\{|\langle F,f \rangle| : f \in X',\ \|f\|_{X'} \leq 1\right\} \quad (F \in X'').$$

Existe una *inyección canónica* o *embebimiento canónico* $J : X \to X''$, definida de la siguiente manera. Para cada $x \in X$ fijo, la aplicación $f \mapsto \langle f,x \rangle$ de X' en $\mathbb{K}$ es un funcional lineal continuo sobre X', es decir, un elemento de X'', llamado *funcional evaluación* en x. Ponemos

$$\langle Jx, f \rangle = \langle f,x \rangle \quad (x \in X,\ f \in X').$$

Claramente, J es una isometría lineal, es decir, $\|Jx\|_{X''} = \|x\|_X$ para todo $x \in X$; en efecto:

$$\|Jx\|_{X''} = \sup\left\{|\langle Jx,f \rangle| : f \in X',\ \|f\|_{X'} \leq 1\right\} = \sup\left\{|\langle f,x \rangle| : f \in X',\ \|f\|_{X'} \leq 1\right\} = \|x\|_X.$$

La existencia de una isometría $J : X \to J(X) \subset X''$ permite identificar X con un subespacio de X''. Puede ocurrir que J no sea sobreyectiva; cuando lo es, es decir, cuando $J(X) = X''$, se dice que X es *reflexivo*.

Nótese que sobre el espacio X' están definidas dos topologías:

- la topología fuerte asociada a la norma de X', y
- la topología débil $\sigma(X',X'')$.

Ahora vamos a dotar a X' de una tercera topología, la topología débil* $\sigma(X',X)$, de la siguiente manera. Para cada $x \in X$ consideramos la aplicación $\varphi_x : X' \to \mathbb{K}$ definida por $f \mapsto \varphi_x(f) = \langle f,x \rangle$. Cuando x recorre X obtenemos una familia de aplicaciones $\{\varphi_x\}_{x \in X}$ de X' en $\mathbb{K}$.

Definición 2.20 *La* topología débil*, *denotada por* $\sigma(X',X)$, *es la topología menos fina sobre* X' *que hace continuas a todas las aplicaciones* $\{\varphi_x\}_{x\in X}$. *En otras palabras,* $\sigma(X',X)$ *es la topología menos fina sobre* X' *que hace continuos a todos los funcionales evaluación* $\{Jx\}_{x\in X}$.

Como X se identifica con $J(X) \subset X''$, resulta que la topología $\sigma(X',X)$ es menos fina que la topología $\sigma(X',X'')$. O, lo que es lo mismo: la topología $\sigma(X',X)$ posee menos abiertos (respectivamente, cerrados) que la topología $\sigma(X',X'')$, la cual, a su vez, posee menos abiertos (respectivamente, cerrados) que la topología fuerte.

Observación 2.21 *La razón de este interés por empobrecer las topologías radica en que si una topología posee menos abiertos entonces también posee más compactos, y los conjuntos compactos desempeñan un papel importante cuando se trata de establecer teoremas de existencia (máximos y mínimos de funciones continuas, puntos fijos, subsucesiones convergentes, etc.). Por ejemplo, la bola unidad de* X' *tiene la notable propiedad de ser* $\sigma(X',X)$*-compacta, es decir, compacta para la topología débil*. Este resultado se conoce como teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki (Teorema 2.30).*

Proposición 2.22 *La topología débil** $\sigma(X',X)$ *es Hausdorff.*

Demostración. Sean f_1 y f_2 en X', con $f_1 \neq f_2$. Algún $x \in X$ es tal que $\langle f_1,x\rangle \neq \langle f_2,x\rangle$. Como $\mathbb{K}$ es Hausdorff, existen abiertos $U_1,U_2 \subset \mathbb{K}$ tales que $\langle f_1,x\rangle \in U_1$, $\langle f_2,x\rangle \in U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Poniendo

$$O_1 = \left\{f \in X' : \langle f,x\rangle \in U_1\right\} = \varphi_x^{-1}(U_1),$$

$$O_2 = \left\{f \in X' : \langle f,x\rangle \in U_2\right\} = \varphi_x^{-1}(U_2),$$

encontramos que O_1 y O_2 son abiertos en $\sigma(X',X)$ verificando $f_1 \in O_1$, $f_2 \in O_2$, y $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. □

Proposición 2.23 *Se obtiene una base de entornos de un punto* $f_0 \in X'$ *para la topología* $\sigma(X',X)$ *considerando todos los conjuntos de la forma*

$$V = \left\{f \in X' : |\langle f-f_0,x_i\rangle| < \varepsilon\ (i \in I)\right\},$$

donde I *es finito,* $x_i \in X$ $(i \in I)$, *y* $\varepsilon > 0$.

Demostración. Es idéntica a la de la Proposición 2.5. □

Dada una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X', se designa por $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ la convergencia de $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ a f en la topología débil* $\sigma(X',X)$. Para evitar confusiones, a menudo se precisa que $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ en $\sigma(X',X)$, que $f_n \rightharpoonup f$ en $\sigma(X',X'')$, o que $f_n \to f$ fuertemente.

Proposición 2.24 *Sea* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión en* X'.

(i) *Se verifica que* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *en* $\sigma(X',X)$ *si, y sólo si,* $\lim_{n\to\infty}\langle f_n,x\rangle = \langle f,x\rangle$ $(x \in X)$.

(ii) *Si* $f_n \to f$ *fuertemente, entonces* $f_n \rightharpoonup f$ *en* $\sigma(X',X'')$.

(*iii*) *Si* $f_n \rightharpoonup f$ *en* $\sigma(X',X'')$, *entonces* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *en* $\sigma(X',X)$.

(*iv*) *Si* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *en* $\sigma(X',X)$, *entonces el conjunto* $\{\|f_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ *está acotado y* $\|f\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|$.

(*v*) *Si* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *en* $\sigma(X',X)$ *y si* $x_n \to x$ *fuertemente en* X, *entonces* $\lim_{n\to\infty} \langle f_n, x_n\rangle = \langle f, x\rangle$.

Demostración. Es similar a la de la Proposición 2.7. □

Observación 2.25 *Cuando* X *es de dimensión finita, las tres topologías: fuerte, débil* $\sigma(X',X'')$, *y débil** $\sigma(X',X)$, *coinciden sobre* X'. *En efecto,* J *es entonces sobreyectiva de* X *sobre* X'', *pues* $\dim X = \dim X' = \dim X''$, *y, por tanto,* $\sigma(X',X) = \sigma(X',X'')$.

Proposición 2.26 *Sea* $\varphi : X' \to \mathbb{K}$ *una aplicación lineal y continua para la topología* $\sigma(X',X)$. *Entonces existe* $x \in X$ *tal que*

$$\varphi(f) = \langle f, x\rangle = \varphi_x(f) \quad (f \in X').$$

Demostración. Es análoga a la de la Proposición 2.12. Como φ es lineal y continua respecto de $\sigma(X',X)$, para algún entorno V de cero en $\sigma(X',X)$ se tiene

$$|\varphi(f)| < 1 \quad (f \in V). \tag{3}$$

Podemos suponer que V es de la forma

$$V = \left\{ f \in X' : |\langle f, x_i\rangle| < \varepsilon \ (i = 1,2,\ldots,n) \right\},$$

con $x_i \in X$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ y $\varepsilon > 0$. Si $\langle f, x_i\rangle = 0$ $(i = 1,2,\ldots,n)$, entonces también $\langle \lambda f, x_i\rangle = 0$ $(\lambda > 0,\ i = 1,2,\ldots,n)$, de manera que $\lambda f \in V$ $(\lambda > 0)$. Sigue de (3) que

$$|\varphi(f)| < \frac{1}{\lambda} \quad (\lambda > 0),$$

obligando a que $\varphi(f) = 0$. Ahora, el Lema 2.11 proporciona $\lambda_i \in \mathbb{K}$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ tales que

$$\varphi(f) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle f, x_i\rangle = \left\langle f, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right\rangle \quad (f \in X'),$$

como se pretendía. □

Abordamos ahora el resultado al que aludíamos en la Observación 2.18. Para su demostración necesitaremos un lema previo.

Lema 2.27 *Sea* B *un subconjunto del espacio normado* X. *Son equivalentes:*

(*i*) *Para todo* $f \in X'$, $\sup\{|\langle f, x\rangle| : x \in B\} < \infty$;

(*ii*) $\sup\{\|x\| : x \in B\} < \infty$.

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$ Para cada $x \in B$ se considera el funcional evaluación $\langle Jx, f \rangle = \langle f, x \rangle$ $(f \in X')$, que es continuo, con norma $\|Jx\| = \|x\|$. La familia de funcionales $\{Jx\}_{x \in B}$ está puntualmente acotada sobre el espacio de Banach X':

$$\sup\{|\langle Jx, f \rangle| : x \in B\} = \sup\{|\langle f, x \rangle| : x \in B\} < \infty \quad (f \in X').$$

El principio de acotación uniforme garantiza entonces que dicha familia es equicontinua:

$$\sup\{\|x\| : x \in B\} = \sup\{\|Jx\| : x \in B\} < \infty.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Sea $M = \sup\{\|x\| : x \in B\}$. Para cada $f \in X'$ se tiene

$$|\langle f, x \rangle| \leq \|f\| \, \|x\| \leq M \, \|f\| \quad (x \in B),$$

de modo que

$$\sup\{|\langle f, x \rangle| : x \in B\} \leq M \, \|f\| < \infty.$$

□

Definición 2.28 *Se dice que un subconjunto B de un espacio normado X es* débilmente acotado *(respectivamente,* fuertemente acotado*) si verifica la condición (i) (respectivamente, (ii)) del Lema 2.27.*

Así, el Lema 2.27 expresa que un conjunto en un espacio normado es débilmente acotado si, y sólo si, es fuertemente acotado.

Teorema 2.29 *Supongamos que X e Y son espacios normados y que $T : X \to Y$ es un operador lineal. Si T es continuo de X con la topología fuerte en Y con la topología débil $\sigma(Y, Y')$, entonces $T \in \mathscr{B}(X, Y)$.*

Demostración. Sea B un subconjunto fuertemente acotado de X; se quiere ver que $T(B)$ es fuertemente acotado en Y. En virtud del Lema 2.27, bastará probar que $T(B)$ es débilmente acotado en Y. Pero esto se sigue de la estimación

$$\sup\{|\langle f, Tx \rangle| : x \in B\} = \sup\{|\langle f \circ T, x \rangle| : x \in B\} \leq \|f \circ T\| \sup\{\|x\| : x \in B\} < \infty \quad (f \in Y'),$$

válida porque $f \circ T \in X'$ para cada $f \in Y'$. □

Concluimos enunciando el siguiente resultado central de la teoría de la dualidad, para cuya demostración remitimos a cualquier manual sobre análisis funcional en espacios normados. Se comprende la importancia fundamental de la topología débil* y del Teorema 2.30 recordando el hecho de que la bola unidad cerrada de un espacio normado de dimensión infinita nunca es compacta en la topología fuerte.

Teorema 2.30 (Banach-Alaoglu-Bourbaki) *Sea X un espacio normado. La bola unidad cerrada de X',*

$$B_{X'} = \left\{ f \in X' : \|f\| \leq 1 \right\},$$

es $\sigma(X', X)$-compacta.

3 Operadores adjuntos

Sean X, Y espacios normados. A cada $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ le asociamos su *adjunto*, un operador $T' \in \mathscr{B}(Y', X')$. Veremos cómo ciertas propiedades de T se reflejan en el comportamiento de T'.

Cuando X e Y tienen dimensión finita, cada $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ puede ser representado por una matriz $[T]$; en tal caso, $[T']$ es la transpuesta de $[T]$, si se eligen adecuadamente las bases del espacio vectorial. No prestaremos una atención particular al caso finito-dimensional en lo que sigue, pero es justo señalar que, históricamente, el álgebra lineal proporcionó el soporte y buena parte de la motivación que condujo a la construcción de lo que hoy conocemos como *teoría de operadores*.

Muchas de las propiedades no triviales de los adjuntos dependen de la completitud de X e Y: el teorema de la aplicación abierta desempeñará un papel importante. Por esta razón, salvo en el siguiente teorema (donde se define T') supondremos que X e Y son espacios de Banach.

Teorema 3.1 *Sean X e Y espacios normados. A cada $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ le corresponde un único $T' \in \mathscr{B}(Y', X')$ que verifica*

$$\langle Tx, y' \rangle = \langle x, T'y' \rangle \quad (x \in X,\ y' \in Y'). \tag{4}$$

Además,

$$\|T'\| = \|T\|. \tag{5}$$

Demostración. Si $y' \in Y'$ y $T \in \mathscr{B}(X,Y)$, definimos

$$T'y' = y' \circ T. \tag{6}$$

Al ser composición de dos aplicaciones lineales continuas, $T'y' \in X'$. Además,

$$\langle x, T'y' \rangle = \left(T'y'\right)(x) = y'(Tx) = \langle Tx, y' \rangle \quad (x \in X),$$

que es (4). El hecho de que se verifique (4) para cada $x \in X$ determina unívocamente $T'y'$.

Si $y_1' \in Y'$ e $y_2' \in Y'$, entonces

$$\begin{aligned}
\langle x, T'\left(y_1' + y_2'\right) \rangle &= \langle Tx, y_1' + y_2' \rangle \\
&= \langle Tx, y_1' \rangle + \langle Tx, y_2' \rangle \\
&= \langle x, T'y_1' \rangle + \langle x, T'y_2' \rangle
\end{aligned}$$

$$= \langle x, T'y'_1 + T'y'_2 \rangle \quad (x \in X),$$

de modo que

$$T'\left(y'_1 + y'_2\right) = T'y'_1 + T'y'_2. \tag{7}$$

Similarmente, $T'(\alpha y') = \alpha T'y'$ $(\alpha \in \mathbb{K},\ y' \in Y')$. Así, $T' : Y' \to X'$ es lineal. Por último,

$$\begin{aligned}
\|T\| &= \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\} \\
&= \sup\left\{\left|\langle Tx, y' \rangle\right| : \|x\| \leq 1,\ \|y'\| \leq 1\right\} \\
&= \sup\left\{\left|\langle x, T'y' \rangle\right| : \|x\| \leq 1,\ \|y'\| \leq 1\right\} \\
&= \sup\left\{\|T'y'\| : \|y'\| \leq 1\right\} = \|T'\|.
\end{aligned}$$

□

3.1 Anuladores

Supongamos que X es un espacio de Banach, M un subespacio de X, y N un subespacio de X'; ni M ni N se suponen cerrados. Recordemos que los anuladores $M^\perp$ y ${}^\perp N$ se definen como sigue:

$$\begin{aligned}
M^\perp &= \left\{x' \in X' : \langle x, x' \rangle = 0\ (x \in M)\right\}, \\
{}^\perp N &= \left\{x \in X : \langle x, x' \rangle = 0\ (x' \in N)\right\}.
\end{aligned}$$

Es decir, $M^\perp$ consiste en todos los funcionales lineales acotados sobre X que se anulan sobre M, mientras que ${}^\perp N$ es el subconjunto de X sobre el que se anula cualquier elemento de N.

Es claro que $M^\perp$ y ${}^\perp N$ son espacios vectoriales. Además, ya que $M^\perp$ es la intersección de los núcleos de los funcionales evaluación Jx cuando x recorre M, resulta que $M^\perp$ es un subespacio débilmente* cerrado de X'. La demostración de que ${}^\perp N$ es cerrado en la norma de X es más directa aún.

El siguiente teorema describe la dualidad entre ambos tipos de anuladores. En relación con el apartado (i) recuérdese que, puesto que todo subespacio es un conjunto convexo, la clausura fuerte de M es igual a su clausura débil.

Teorema 3.2 *Bajo las hipótesis anteriores:*

(*i*) ${}^\perp(M^\perp)$ *es la clausura fuerte (y débil) de* M *en* X*; y*

(*ii*) $({}^\perp N)^\perp$ *es la clausura débil* de* N *en* X'.

Demostración. Si $x \in M$ entonces $\langle x, x' \rangle = 0$ para cada $x' \in M^\perp$, así que $x \in {}^\perp(M^\perp)$. Como ${}^\perp(M^\perp)$ es cerrado en norma, contiene a la clausura fuerte $\overline{M}$ de M. Por otra parte, si $x \notin \overline{M}$, el teorema de Hahn-Banach proporciona $x' \in M^\perp$ tal que $\langle x, x' \rangle \neq 0$. Así,

$x \notin {}^{\perp}(M^{\perp})$, y queda probado (i).

Similarmente, si $x' \in N$ entonces $\langle x, x' \rangle = 0$ para cada $x \in {}^{\perp}N$, por lo que $x' \in ({}^{\perp}N)^{\perp}$. Este subespacio débilmente* cerrado de X' contiene la clausura débil* $\overline{N}^{\sigma(X',X)}$ de N. Si $x' \notin \overline{N}^{\sigma(X',X)}$, el teorema de Hahn-Banach (aplicado al espacio X' con su topología débil*) implica la existencia de $x \in {}^{\perp}N$ tal que $\langle x, x' \rangle \neq 0$; sigue que $x' \notin ({}^{\perp}N)^{\perp}$, probando (ii).

Corolario 3.3 *Todo subespacio fuertemente cerrado de X es el anulador de su anulador. Lo mismo cabe afirmar de todo subespacio débilmente* cerrado de X'.*

Recordemos que si T es un operador lineal de X en Y, denotamos por $\mathscr{N}(T)$ y $\mathscr{R}(T)$ el núcleo y el rango de T, respectivamente:

$$\mathscr{N}(T) = \{x \in X : Tx = 0\},$$
$$\mathscr{R}(T) = \{Tx \in Y : x \in X\}.$$

Teorema 3.4 *Supongamos que X e Y son espacios de Banach, y que $T \in \mathscr{B}(X,Y)$. Entonces*

$$\mathscr{N}(T') = \mathscr{R}(T)^{\perp} \quad y \quad \mathscr{N}(T) = {}^{\perp}\mathscr{R}(T').$$

Demostración. En cada una de las dos columnas siguientes, cada afirmación es obviamente equivalente a la que le sigue y/o la precede.

$$\begin{array}{ll}
y' \in \mathscr{N}(T'). & x \in \mathscr{N}(T). \\
T'y' = 0. & Tx = 0. \\
\langle x, T'y' \rangle = 0 \quad (x \in X). & \langle Tx, y' \rangle = 0 \quad (y' \in Y'). \\
\langle Tx, y' \rangle = 0 \quad (x \in X). & \langle x, T'y' \rangle = 0 \quad (y' \in Y'). \\
y' \in \mathscr{R}(T)^{\perp}. & x \in {}^{\perp}\mathscr{R}(T').
\end{array}$$

□

Corolario 3.5 *En las hipótesis del Teorema 3.4:*

(i) $\mathscr{N}(T')$ es débilmente cerrado en Y'.*

(ii) $\mathscr{R}(T)$ es denso en Y si, y sólo si, T' es inyectivo.

(iii) T es inyectivo si, y sólo si, $\mathscr{R}(T')$ es débilmente denso en X'.*

Demostración. Para cada subespacio M de Y se tiene que $M^{\perp}$ es débilmente* cerrado en Y'; en particular, esto es cierto para $\mathscr{R}(T)^{\perp}$. Por tanto, (i) sigue del Teorema 3.4.

En cuanto a (ii), $\mathscr{R}(T)$ es denso en Y si, y sólo si, $\mathscr{R}(T)^{\perp} = \{0\}$; en tal caso, $\mathscr{N}(T') = \{0\}$, y T' es inyectivo.

Similarmente, ${}^{\perp}\mathscr{R}(T') = \{0\}$ si, y sólo si, $\mathscr{R}(T')$ no es anulado por ningún $x \in X$ distinto de $x = 0$; esto significa que $\mathscr{R}(T')$ es débilmente*-denso en X'.

Nótese que en la demostración de (ii) y (iii) se usó tácitamente el teorema de Hahn-Banach. □

3.2 El teorema del rango cerrado

La unión de los tres teoremas que siguen es conocida como el *teorema del rango cerrado*.

Teorema 3.6 *Sean U y V las bolas unidad abiertas de los espacios de Banach X e Y, respectivamente. Si $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ y $\delta > 0$, se verifican las implicaciones*

$$(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$$

entre los enunciados siguientes:

(i) $\|T'y'\| \geq \delta \|y'\|$ $(y' \in Y')$.

(ii) $\overline{T(U)} \supset \delta V$.

(iii) $T(U) \supset \delta V$.

(iv) $T(X) = Y$.

Además, si se verifica (iv) entonces también se verifica (i) para algún $\delta > 0$.

Demostración. Supongamos cierto (i), y elijamos $y_0 \notin \overline{T(U)}$. Como $\overline{T(U)}$ es convexo, cerrado y equilibrado, el teorema de Hahn-Banach proporciona $y' \in Y'$ tal que $|\langle y, y'\rangle| \leq 1$ para cada $y \in \overline{T(U)}$, pero $\langle y_0, y'\rangle > 1$. Si $x \in U$, entonces

$$\left|\left\langle x, T'y'\right\rangle\right| = \left|\left\langle Tx, y'\right\rangle\right| \leq 1.$$

Así, $\|T'y'\| \leq 1$, y (i) entraña

$$\delta < \delta\left\langle y_0, y'\right\rangle \leq \delta \|y_0\| \|y'\| \leq \|y_0\| \|T'y'\| \leq \|y_0\|.$$

Sigue que $y \in \overline{T(U)}$ cuando $\|y\| \leq \delta$. Por tanto, (i) $\Rightarrow$ (ii).

Supongamos ahora que vale (ii). Sin pérdida de generalidad, tomamos $\delta = 1$. Entonces $\overline{T(U)} \supset \overline{V}$, de modo que a cada $y \in Y$ y cada $\varepsilon > 0$ le corresponde $x \in X$ tal que $\|x\| \leq \|y\|$ y $\|y - Tx\| < \varepsilon$.

Elegimos $y_1 \in V$ y $\varepsilon_n > 0$ tales que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < 1 - \|y_1\|.$$

Asumamos que $n \geq 1$ y se ha elegido y_n. Existe x_n tal que $\|x_n\| \leq \|y_n\|$ y $\|y_n - Tx_n\| < \varepsilon_n$. Pongamos

$$y_{n+1} = y_n - Tx_n.$$

Este proceso inductivo define dos sucesiones, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$. Nótese que

$$\|x_{n+1}\| \le \|y_{n+1}\| = \|y_n - Tx_n\| < \varepsilon_n.$$

Por tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \le \|x_1\| + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \le \|y_1\| + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < 1.$$

Se concluye que $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \in U$ y que

$$Tx = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} Tx_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} (y_n - y_{n+1}) = y_1,$$

por cuanto $y_{N+1} \to 0$ cuando $N \to \infty$. Así, $y_1 = Tx \in T(U)$, probando (iii). Nótese que el argumento precedente no es más que una versión particular de una parte de la demostración del teorema de la aplicación abierta.

Resulta obvio que (iii) implica (iv).

Finalmente, supongamos cierto (iv). El teorema de la aplicación abierta proporciona $\delta > 0$ tal que $T(U) \supset \delta V$. Entonces

$$\begin{aligned}\|T'y'\| &= \sup\{|\langle x, T'y'\rangle| : x \in U\}\\ &= \sup\{|\langle Tx, y'\rangle| : x \in U\}\\ &\ge \sup\{|\langle y, y'\rangle| : y \in \delta V\} = \delta\,\|y'\| \quad (y' \in Y'),\end{aligned}$$

probando (i). $\square$

Teorema 3.7 *Sean X, Y espacios de Banach y $T \in \mathscr{B}(X,Y)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *$\mathscr{R}(T)$ es cerrado en Y.*

(ii) *$\mathscr{R}(T')$ es débilmente* cerrado en X'.*

(iii) *$\mathscr{R}(T')$ es fuertemente cerrado en X'.*

Demostración. Es claro que (ii) implica (iii). Probaremos que (i) implica (ii) y que (iii) implica (i).

Supongamos cierto (i). Aplicando los Teoremas 3.2 y 3.4, vemos que $\mathscr{N}(T)^{\perp}$ es la clausura débil* de $\mathscr{R}(T')$. Por tanto, para probar (ii) basta ver que $\mathscr{N}(T)^{\perp} \subset \mathscr{R}(T')$. A tal fin, elijamos $x' \in \mathscr{N}(T)^{\perp}$ y definamos un funcional lineal Λ sobre $\mathscr{R}(T)$ poniendo

$$\Lambda Tx = \langle x, x'\rangle \quad (x \in X).$$

Nótese que Λ está bien definido, por cuanto $Tx_1 = Tx_2$ implica $x_1 - x_2 \in \mathscr{N}(T)$, de donde $\langle x_1 - x_2, x'\rangle = 0$. Podemos aplicar el teorema de la aplicación abierta a $T : X \to \mathscr{R}(T)$, puesto que el subespacio $\mathscr{R}(T)$ se supone cerrado en el espacio de Banach Y, y por lo tanto es completo. Sigue que existe $K>0$ y, para cada $y \in \mathscr{R}(T)$, un $x \in X$ tal que $Tx = y$, $\|x\| \le K\|y\|$, y

$$|\Lambda y| = |\Lambda Tx| = |\langle x, x' \rangle| \le K\|y\| \, \|x'\|.$$

Así, Λ es continuo. El teorema de Hahn-Banach proporciona $y' \in Y'$ que extiende a Λ. Luego,

$$\left\langle x, T'y' \right\rangle = \left\langle Tx, y' \right\rangle = \Lambda Tx = \left\langle x, x' \right\rangle \quad (x \in X).$$

De aquí, $x' = T'y'$. Como x' era un elemento arbitrario de $\mathscr{N}(T)^{\perp}$, hemos probado que $\mathscr{N}(T)^{\perp} \subset \mathscr{R}(T')$ y, con ello, que (i) implica (ii).

Supongamos, finalmente, que se verifica (iii). Sea Z la clausura de $\mathscr{R}(T)$ en Y, y definamos $S \in \mathscr{B}(X,Z)$ poniendo $Sx = Tx$. Ya que $\mathscr{R}(S)$ es denso en Z, el Corolario 3.5 implica que $S' : Z' \to X'$ es uno a uno. Si $z' \in Z'$, por el teorema de Hahn-Banach existe una extensión y' de z'; para cada $x \in X$,

$$\left\langle x, T'y' \right\rangle = \left\langle Tx, y' \right\rangle = \left\langle Sx, z' \right\rangle = \left\langle x, S'z' \right\rangle.$$

Así, $S'z' = T'y'$. Se infiere que S' y T' tienen rangos idénticos. Como asumimos que se cumple (iii), $\mathscr{R}(S')$ es cerrado, luego completo, y es lícito aplicar el teorema de la aplicación abierta al operador inyectivo $S' : Z' \to \mathscr{R}(S')$ para obtener una constante $c > 0$ satisfaciendo

$$c\|z'\| \le \|S'z'\| \quad (z' \in Z').$$

El Teorema 3.6 garantiza ahora que la aplicación $S : X \to Z$ es abierta; en particular, $S(X) = Z$. Pero $\mathscr{R}(T) = \mathscr{R}(S)$, por la definición de S. Se concluye que $\mathscr{R}(T) = Z$ es un subespacio cerrado de Y, lo cual completa la prueba de que (iii) implica (i). □

Observación 3.8 *Puesto que todo subespacio es un conjunto convexo, se verifica (i) si, y sólo si, $\mathscr{R}(T)$ es débilmente cerrado en Y. Sin embargo, los subespacios fuertemente cerrados de X' no siempre son débilmente* cerrados. Considérese, por ejemplo, c_0, que es un subespacio fuertemente cerrado de $\ell^\infty = (\ell_1)'$, y sea $e = \{e(n)\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $e(n) = 1$ $(n \in \mathbb{N})$: la sucesión*

$$x_n = \sum_{n=1}^{n} e_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

de elementos de c_0 converge débilmente a $e \in \ell^\infty \setminus c_0$, así que c_0 no es débilmente* cerrado.*

La siguiente consecuencia es útil en las aplicaciones.

Teorema 3.9 *Supongamos que X e Y son espacios de Banach, y sea $T \in \mathscr{B}(X,Y)$. Son equivalentes:*

(i) $\mathscr{R}(T) = Y$;

(ii) T' *es inyectivo y* $\mathscr{R}(T')$ *es cerrado en norma.*

Demostración. Si se verifica (i) entonces, por el Teorema 3.4, T' es inyectivo. La implicación (iv) $\Rightarrow$ (i) del Teorema 3.6 muestra que T' está acotado inferiormente; por tanto, $\mathscr{R}(T')$ es cerrado.

Recíprocamente, si se verifica (ii) entonces, de nuevo por el Teorema 3.4, $\mathscr{R}(T)$ es denso en Y, y el Teorema 3.7 obliga a que $\mathscr{R}(T)$ sea cerrado. □

Corolario 3.10 *Sean X, Y espacios de Banach y $T \in \mathscr{B}(X,Y)$. Son equivalentes:*

(i) $\mathscr{R}(T) = Y$.

(ii) *T' está acotado inferiormente, es decir, existe $\delta > 0$ tal que $\|T'y'\| \geq \delta\|y'\|$ $(y' \in Y')$.*

(iii) *T' es inyectivo y su inverso (que aplica $\mathscr{R}(T')$ sobre Y') está acotado.*

Demostración. La equivalencia entre (i) y (ii) está contenida en el Teorema 3.6.

Para ver que (ii) implica (iii) observamos que si T' está acotado inferiormente entonces $\mathscr{N}(T') = \{0\}$, de modo que T' es inyectivo, existe $(T')^{-1} : \mathscr{R}(T') \to Y'$, y la condición de acotación inferior proporciona la acotación de $(T')^{-1}$: $\|T'y'\| \geq \delta\|y'\|$ $(y' \in Y')$ para algún $\delta > 0$ si, y sólo si, $\|(T')^{-1}x'\| \leq M\|x'\|$ $(x' \in \mathscr{R}(T'))$ para algún $M > 0$. Que (iii) implica (ii) es, igualmente, consecuencia de esta reformulación. □

4 Teoría espectral de operadores compactos

Definición 4.1 *Supongamos que X e Y son espacios de Banach, y sea U la bola unidad abierta de X. Un operador lineal $T : X \to Y$ se dice* compacto *si la clausura de $T(U)$ es compacta en Y.*

Claramente, si T es compacto entonces está acotado, es decir, $T \in \mathscr{B}(X,Y)$.

Puesto que Y es un espacio métrico completo, los subconjuntos de Y cuya clausura es compacta son, precisamente, los totalmente acotados. Así, $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ es compacto si, y sólo si, $T(U)$ es totalmente acotado. Además, T es compacto si, y sólo si, toda sucesión acotada $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ contiene una subsucesión $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $\{Tx_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ converge a un punto de Y.

Muchos de los operadores que comparecen en el estudio de las ecuaciones integrales son compactos, lo que explica la importancia de esta clase de operadores desde el punto de vista de las aplicaciones. Tal como ya adelantamos, los operadores compactos son los operadores lineales entre espacios de dimensión infinita con un comportamiento más parecido al de los operadores entre espacios finito-dimensionales, similitudes que se manifiestan con especial intensidad en relación con sus propiedades espectrales.

Si X es un espacio de Banach, entonces $\mathscr{B}(X) = \mathscr{B}(X,X)$ no es simplemente un espacio de Banach, sino también un álgebra: dados $S,T \in \mathscr{B}(X)$, se define $ST \in B(X)$ por

$$(ST)(x) = S(Tx) \quad (x \in X).$$

Se comprueba inmediatamente la desigualdad

$$\|ST\| \leq \|S\| \, \|T\|.$$

En particular, es posible definir potencias de $T \in \mathscr{B}(X)$: $T^0 = I$, la identidad en X, dada por $Ix = x$, y $T^n = TT^{n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Definición 4.2 *Sea X un espacio de Banach.*

(i) *Un operador $T \in \mathscr{B}(X)$ se dice* inversible *si existe $S \in \mathscr{B}(X)$ tal que $ST = I = TS$. En tal caso, escribimos $S = T^{-1}$. Por el teorema de la aplicación abierta, T es inversible si, y sólo si, $\mathscr{N}(T) = \{0\}$ y $\mathscr{R}(T) = X$.*

(ii) *El* espectro *$\sigma(T)$ de un operador $T \in \mathscr{B}(X)$ es el conjunto de todos los escalares λ tales que $T - \lambda I$ no es inversible. Así, $\lambda \in \sigma(T)$ si, y sólo si, se cumple, al menos, uno de los dos enunciados siguientes:*

(a) *$T - \lambda I$ no es sobre: $\mathscr{R}(T - \lambda I) \neq X$.*

(b) *$T - \lambda I$ no es inyectivo: $\mathscr{N}(T - \lambda I) \neq \{0\}$.*

Si se verifica (b), se dice que λ es un autovalor *o* valor propio *de T; el correspondiente* autoespacio *o* espacio propio *es $\mathscr{N}(T - \lambda I)$; cada $x \in \mathscr{N}(T - \lambda I)$ (excepto $x = 0$) es un* autovector *o* vector propio *de T, y satisface la ecuación $Tx = \lambda x$.*

Lema 4.3 *En un espacio normado de dimensión infinita, ningún conjunto que contenga una bola abierta puede ser compacto.*

Demostración. Sea X un espacio normado de dimensión infinita. Dado $\theta \in (0,1)$, el lema de Riesz permite encontrar una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ tal que $\|x_n\| = 1$ y $\|x_n - x_m\| \geq \theta$ $(n \neq m)$. Para cualesquiera $r > 0$ y $x \in X$ se tiene que $\{x + rx_n/2\}_{n=1}^{\infty} \subset U(x,r)$, impidiendo que los conjuntos que contengan bolas abiertas sean compactos. □

Teorema 4.4 *Sean X e Y espacios de Banach.*

(i) *Si $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ y $\dim \mathscr{R}(T) < \infty$, entonces T es compacto.*

(ii) *Si $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ es compacto y $\mathscr{R}(T)$ es cerrado, entonces $\dim \mathscr{R}(T) < \infty$.*

(iii) *Los operadores compactos forman un subespacio cerrado de $\mathscr{B}(X,Y)$ en su topología nórmica.*

(iv) *Si $T \in \mathscr{B}(X)$ es compacto y $\lambda \neq 0$, entonces $\dim \mathscr{N}(T - \lambda I) < \infty$.*

(v) *Si $T \in \mathscr{B}(X)$ es compacto y $\dim X = \infty$, entonces $0 \in \sigma(T)$.*

(vi) *Si $S, T \in \mathscr{B}(X)$ y T es compacto, también lo son ST y TS.*

Demostración. El apartado (i) es obvio.

Si $\mathscr{R}(T)$ es cerrado, entonces $\mathscr{R}(T)$ es completo (puesto que Y lo es), así que la aplicación sobreyectiva $T : X \to \mathscr{R}(T)$ es abierta, es decir, $T(U)$ es abierto en $\mathscr{R}(T)$; y si T es compacto, entonces $\overline{T(U)}$ es compacta. El Lema 4.3 obliga entonces a que $\dim \mathscr{R}(T) < \infty$, probando (ii).

Pongamos $Z = \mathscr{N}(T - \lambda I)$ en (iv). La restricción de T a Z es un operador compacto con rango Z. Consecuentemente, (iv) se infiere de (ii), y lo mismo sucede con (v), porque si $0 \notin \sigma(T)$, entonces $\mathscr{R}(T) = X$.

La prueba de (vi) es directa. En efecto, sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ una sucesión acotada. Existe una subsucesión $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $\{Tx_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ converge; por continuidad, $\{STx_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ también converge. De otra parte, $\{Sx_n\}_{n=1}^{\infty}$ es, a su vez, una sucesión acotada, luego admite una subsucesión $\{Sx_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $\{TSx_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ converge. Así pues, tanto ST como TS son compactos.

Si S y T son operadores compactos de X en Y, también lo son $S+T$ (porque la suma de dos subconjuntos compactos cualesquiera de Y es compacta) y αT para cualquier escalar α. Se deduce que los operadores compactos forman un subespacio Σ de $\mathscr{B}(X,Y)$. Para completar la demostración de (iii), vamos a ver que Σ es cerrado. Sean $T \in \mathscr{B}(X,Y)$ en la clausura de Σ, $r > 0$, y U la bola unidad abierta de X. Algún $S \in \Sigma$ es tal que $\|S - T\| < r$. Como $S(U)$ es totalmente acotado, existen $x_1, \ldots, x_n \in U$ tales que las bolas de radio r centradas en los puntos $\{Sx_i\}_{i=1}^{n}$ recubren $S(U)$. Ya que $\|Sx - Tx\| < r$ para cada $x \in U$, se infiere que $T(U)$ está recubierto por las bolas de radio $3r$ con centros en los puntos $\{Tx_i\}_{i=1}^{n}$. Por tanto, $T(U)$ está totalmente acotado, lo que prueba que $T \in \Sigma$. $\square$

En el resto de esta sección analizaremos el espectro de un operador compacto $T \in \mathscr{B}(X)$. Los principales resultados quedan recogidos en el Teorema 4.11. Los adjuntos desempeñarán un papel importante.

Teorema 4.5 (Schauder) *Supongamos que X e Y son espacios de Banach y $T \in \mathscr{B}(X,Y)$. Entonces T es compacto si, y sólo si, T' es compacto.*

Demostración. Sea B un subconjunto acotado de Y', de modo que $\|y'\| \leq M$ $(y' \in B)$; se quiere probar que $T'(B) \subset X'$ es totalmente acotado.

Sea $\varepsilon > 0$. Como T es compacto, la bola unidad U de X contiene puntos $x_1, \ldots, x_n$ tales que para todo $x \in U$, algún x_j es tal que

$$\|Tx - Tx_j\| < \frac{\varepsilon}{3M}. \tag{8}$$

Definimos un operador lineal $\Lambda : Y' \to \mathbb{R}^n$ poniendo

$$\Lambda y' = (y'(Tx_1), y'(Tx_2), \ldots, y'(Tx_n)).$$

Como la dimensión del rango de Λ es finita, Λ es compacto (Teorema 4.4). Se sigue que $\Lambda(B)$ es totalmente acotado: existen $\{y'_1, \ldots, y'_m\} \subset B$ tales que, para todo $y' \in B$, algún y'_k satisface

$$\|\Lambda y' - \Lambda y'_k\|_n < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{9}$$

donde $\|\cdot\|_n$ es la norma euclídea de $\mathbb{R}^n$. Ahora, para todo $j = 1, \ldots, n$ y cada $y' \in B$, existe $k = 1, \ldots, m$ tal que

$$|y'(Tx_j) - y'_k(Tx_j)|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} |y'(Tx_i) - y'_k(Tx_i)|^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \|\Lambda(y'-y'_k)\|_n^2 \\
&< \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^2. \qquad (10)
\end{aligned}
$$

Sea $x \in U$ e $y' \in B$, arbitrarios; existen j y k para los que se verifican (8) y (9), respectivamente, y (10) vale para todo j y ese k. Obtenemos así:

$$
\begin{aligned}
|y'(Tx) - y'_k(Tx)| &\le |y'(Tx) - y'(Tx_j)| + |y'(Tx_j) - y'_k(Tx_j)| + |y'_k(Tx_j) - y'_k(Tx)| \\
&< \|y'\|\,\|Tx - Tx_j\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|y'_k\|\,\|Tx_j - Tx\| \\
&< M\,\frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3} + M\,\frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Como esto vale para todo $x \in U$, de la definición de T' se concluye que

$$
\begin{aligned}
\|T'y' - T'y'_k\| &= \sup\{|T'(y'-y'_k)(x)| : \|x\| < 1\} \\
&= \sup\{|y'(Tx) - y'_k(Tx)| : \|x\| < 1\} < \varepsilon.
\end{aligned}
$$

La arbitrariedad de ε ya prueba que $T'(B)$ es totalmente acotado, y como B es un subconjunto acotado igualmente arbitrario de Y', queda establecida la compacidad de T'.

Deduciremos la segunda parte de la primera que acabamos de probar. Sean $\Phi : X \to X''$ y $\Psi : Y \to Y''$ los embebimientos canónicos, dados por

$$
\langle x, x' \rangle = \langle x', \Phi x \rangle \quad \text{y} \quad \langle y, y' \rangle = \langle y', \Psi y \rangle.
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
\langle y', \Psi T x \rangle &= \langle Tx, y' \rangle = \langle x, T'y' \rangle = \langle T'y', \Phi x \rangle \\
&= \langle y', T''\Phi x \rangle \quad (x \in X,\ y' \in Y'),
\end{aligned}
$$

así que $\Psi T = T''\Phi$. Si $x \in U$, entonces Φx está en la bola unidad U'' de X''. Luego, $\Psi T(U) \subset T''(U'')$.

Supongamos ahora que T' es compacto. La primera parte del teorema muestra que $T'' : X'' \to Y''$ es compacto. Por consiguiente, $T''(U'')$ es totalmente acotado, y lo mismo ocurre con su subconjunto $\Psi T(U)$. Puesto que Ψ es una isometría, $T(U)$ también es totalmente acotado. Se concluye que T es compacto. □

Recordemos la siguiente:

Definición 4.6 *Supongamos que M es un subespacio cerrado de un espacio vectorial topológico X.*

(i) *Si existe un subespacio cerrado N de X tal que*

$$X = M + N \quad y \quad M \cap N = \{0\},$$

entonces se dice que M es complementado *en X y que X es la* suma directa *de M y N, y se escribe $X = M \oplus N$.*

(ii) *La dimensión de X/M se llama* codimensión *de M en X.*

Lema 4.7 *Sea M un subespacio cerrado de un espacio normado X.*

(i) *Si* $\dim M < \infty$*, entonces M es complementado en X.*

(ii) *Si* $\dim X/M < \infty$*, entonces M es complementado en X.*

Demostración.

(i) Sea $\{x_1, \ldots, x_n\}$ una base de M, de modo que cada $x \in M$ tiene una única representación

$$x = \alpha_1(x)x_1 + \cdots + \alpha_n(x)x_n.$$

Los coeficientes α_i $(1 \leq i \leq n)$ son funcionales lineales continuos sobre M que, por el teorema de Hahn-Banach, se extienden como elementos de X', a los que denotamos de igual modo. Si N es la intersección de los núcleos de estas extensiones, entonces $X = M \oplus N$.

(ii) Sea $\pi : X \to X/M$ la proyección canónica cociente, sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base de X/M, elíjanse $x_i \in X$ de modo que $\pi(x_i) = e_i$ $(1 \leq i \leq n)$, y sea N el subespacio vectorial generado por $\{x_1, \ldots, x_n\}$; entonces, $X = M \oplus N$. Pues si $x \in X$ y escribimos

$$\pi(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j$$

para ciertos escalares λ_j $(1 \leq j \leq n)$, es claro que $y = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j$ satisface $\pi(x - y) = 0$, o bien $x - y \in M$. Además, $M \cap N = \{0\}$. Para verlo, sea $x \in M \cap N$. Como $x \in N$, se tiene que $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j$ para escalares λ_j apropiados. Por otra parte, $\pi(x) = 0$, porque $x \in M$. Ahora,

$$0 = \pi(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \pi(x_j) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j.$$

Dado que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ son linealmente independientes, necesariamente $\lambda_j = 0$ $(1 \leq j \leq n)$, obligando a que $x = 0$.

$\square$

Lema 4.8 *Si M es un subespacio de un espacio normado X, si M no es denso en X, y si $r > 1$, entonces existe $x \in X$ tal que $\|x\| < r$ pero $\|x - y\| \geq 1$ $(y \in M)$.*

Demostración. Como M no es denso en X, existe $x_1 \in X$ cuya distancia a M es 1, es decir, $\inf\{\|x_1 - y\| : y \in M\} = 1$. Elíjase $y_1 \in M$ tal que $\|x_1 - y_1\| < r$, y póngase $x = x_1 - y_1$. □

Teorema 4.9 *Si X es un espacio de Banach, $T \in \mathscr{B}(X)$ es compacto, y $\lambda \neq 0$, entonces $T - \lambda I$ tiene rango cerrado.*

Demostración. Por el Teorema 4.4, $\dim \mathscr{N}(T - \lambda I) < \infty$. Por el Lema 4.7, X es suma directa de $\mathscr{N}(T - \lambda I)$ y un subespacio cerrado M. Definamos $S \in \mathscr{B}(M, X)$ poniendo

$$Sx = Tx - \lambda x \quad (x \in M). \tag{11}$$

Entonces S es uno a uno sobre M. Además, $\mathscr{R}(S) = \mathscr{R}(T - \lambda I)$. Para ver que $\mathscr{R}(S)$ es cerrado basta probar que S está acotado inferiormente, es decir, que algún $r > 0$ es tal que

$$r\|x\| \leq \|Sx\| \quad (x \in M). \tag{12}$$

Si no se verifica (12) para ningún $r > 0$, existe $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ tal que $\|x_n\| = 1$ $(n \in \mathbb{N})$, $Sx_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, y (pasando a una subsucesión en caso necesario) $Tx_n \to x_0$ cuando $n \to \infty$ para cierto $x_0 \in X$; aquí es donde se usa la compacidad de T. Se sigue que $\lambda x_n \to x_0$ cuando $n \to \infty$. Así, $x_0 \in M$, y

$$Sx_0 = \lim_{n\to\infty} (\lambda S x_n) = 0.$$

Puesto que S es inyectivo, $x_0 = 0$. Pero $\|x_n\| = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $x_0 = \lim_{n\to\infty} \lambda x_n$, de modo que $\|x_0\| = |\lambda| > 0$. Esta contradicción prueba que se verifica (12) para algún $r > 0$. □

Teorema 4.10 *Sean X un espacio de Banach, $T \in \mathscr{B}(X)$ un operador compacto, $r > 0$, y E un conjunto de autovalores λ de T tales que $|\lambda| > r$. Entonces:*

(i) para cada $\lambda \in E$, $\mathscr{R}(T - \lambda I) \neq X$; y

(ii) el conjunto E es finito.

Demostración. Veremos en primer lugar que si (i) o (ii) son falsos entonces existen subespacios cerrados M_n de X y escalares $\lambda_n \in E$ tales que

$$M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \ldots, \qquad M_n \neq M_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}), \tag{13}$$

$$T(M_n) \subset M_n \quad (n \geq 1), \tag{14}$$

y

$$(T - \lambda_n I)(M_n) \subset M_{n-1} \quad (n \geq 2). \tag{15}$$

Completaremos la demostración probando que esto contradice la compacidad de T.

Supongamos que (i) es falso, de modo que $\mathscr{R}(T-\lambda_0 I) = X$ para algún $\lambda_0 \in E$. Escribamos $S = T - \lambda_0 I$, y definamos $M_n = \mathscr{N}(S^n)$. Como λ_0 es un valor propio de T, el subespacio M_1 contiene un vector $x_1 \neq 0$. Puesto que $\mathscr{R}(S) = X$, existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ tal que $Sx_{n+1} = x_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Entonces

$$S^n x_{n+1} = x_1 \neq 0, \quad \text{pero} \quad S^{n+1} x_{n+1} = Sx_1 = 0. \tag{16}$$

Por tanto, M_n es un subespacio cerrado propio de M_{n+1} y se verifican (13) a (15), con $\lambda_n = \lambda_0$. En particular, (14) se verifica porque $ST = TS$.

Supongamos ahora que (ii) es falso. Entonces E contiene una sucesión $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ de autovalores de T distintos. Sean $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ vectores propios correspondientes a estos autovalores, y sea M_n el subespacio (finito-dimensional, por tanto cerrado) de X generado por $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Como los λ_j son distintos, el conjunto $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es linealmente independiente, de modo que M_{n-1} es un subespacio propio de M_n, y se verifica (13). Además, si $x \in M_n$ entonces

$$x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n,$$

así que $Tx \in M_n$ y

$$(T - \lambda_n I)x = \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_n)e_1 + \cdots + \alpha_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)e_{n-1} \in M_{n-1};$$

luego, también se verifican (14) y (15).

Una vez conseguidos los subespacios cerrados M_n satisfaciendo (13) a (15), el Lema 4.8 proporciona vectores $y_n \in M_n$ $(n \geq 2)$ tales que

$$\|y_n\| \leq 2 \quad \text{y} \quad \|y_n - x\| \geq 1 \quad (x \in M_{n-1}). \tag{17}$$

Si $2 \leq m < n$, definimos

$$z = Ty_m - (T - \lambda_n I)y_n. \tag{18}$$

Por (14) y (15), $z \in M_{n-1}$. Así, (17) muestra que

$$\|Ty_n - Ty_m\| = \|\lambda_n y_n - z\| = |\lambda_n| \, \|y_n - \lambda_n^{-1} z\| \geq |\lambda_n| > r.$$

Esto impide que la sucesión $\{Ty_n\}_{n=1}^{\infty}$ tenga subsucesiones convergentes, aunque $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada, contradiciendo la compacidad de T. $\square$

En el siguiente teorema, la dimensión de un espacio vectorial puede ser un entero no negativo o el símbolo ∞. Se denotará por I el operador identidad, tanto en X como en X':

$$(T - \lambda I)' = T' - \lambda I' = T' - \lambda I,$$

puesto que el adjunto de la identidad en X es la identidad en X'.

Teorema 4.11 *Sean X un espacio de Banach y $T \in \mathscr{B}(X)$ un operador compacto.*

(*i*) *Si $\lambda \neq 0$, los cuatro números*

$$\alpha = \dim \mathscr{N}(T - \lambda I) \qquad \beta = \dim X/\mathscr{R}(T - \lambda I)$$
$$\alpha' = \dim \mathscr{N}(T' - \lambda I) \qquad \beta' = \dim X'/\mathscr{R}(T' - \lambda I)$$

son finitos e iguales.

(*ii*) *Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \in \sigma(T)$, entonces λ es un autovalor de T y de T'.*

(*iii*) *$\sigma(T)$ es compacto, a lo sumo numerable, y tiene a lo sumo un punto de acumulación: 0, en su caso.*

Demostración. Por simplicidad, pongamos $S = T - \lambda I$.

Comenzamos con una observación elemental sobre espacios cociente. Supongamos que M_0 es un subespacio cerrado de un espacio normado Y, y sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \leq \dim Y/M_0$. Existen vectores $y_1, \ldots, y_k \in Y$ tales que las respectivas clases de equivalencia módulo M_0 son linealmente independientes. El espacio vectorial M_i generado por M_0 e $y_1, \ldots, y_i$ contiene a M_{i-1} como subespacio propio. Puesto que la suma de un subespacio cerrado con otro de dimensión finita es cerrado, cada M_i es cerrado. El teorema de Hahn-Banach sobre caracterización de puntos adherentes proporciona funcionales lineales continuos $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k$ sobre Y tales que $\Lambda_i y_i = 1$ pero $\Lambda_i y = 0$ para todo $y \in M_{i-1}$; estos funcionales son linealmente independientes. Se alcanza así la siguiente conclusión: si Σ denota el espacio de todos los funcionales lineales continuos sobre Y que anulan a M_0, entonces

$$\dim Y/M_0 \leq \dim \Sigma. \tag{19}$$

Particularizamos este resultado con $Y = X$, $M_0 = \mathscr{R}(S)$. Por el Teorema 4.9, $\mathscr{R}(S)$ es cerrado. Además, por el Teorema 3.4, $\Sigma = \mathscr{R}(S)^{\perp} = \mathscr{N}(S')$, así que (19) se convierte en

$$\beta \leq \alpha'. \tag{20}$$

Consideremos ahora $Y = X'$ con su topología débil* y pongamos $M_0 = \mathscr{R}(S')$. Por el Teorema 3.7, $\mathscr{R}(S')$ es débilmente* cerrado. Como Σ consiste ahora en todos los funcionales lineales débilmente* continuos sobre X' que anulan a $\mathscr{R}(S')$, Σ es isomorfo a ${}^{\perp}\mathscr{R}(S') = \mathscr{N}(S)$ (Teorema 3.4), y (19) se convierte en

$$\beta' \leq \alpha. \tag{21}$$

Nuestro siguiente objetivo es probar

$$\alpha \leq \beta. \tag{22}$$

Una vez establecido (22), la desigualdad

$$\alpha' \leq \beta' \tag{23}$$

también será válida, porque T' es compacto (Teorema 4.5). Puesto que $\alpha < \infty$ en virtud del Teorema 4.4, (i) sigue de las desigualdades (20) a (23).

Supongamos que no se verifica (22). Entonces $\alpha > \beta$. Como $\alpha < \infty$, el Lema 4.7 muestra que X contiene subespacios cerrados E y F tales que $\dim F = \beta$ y

$$X = \mathscr{N}(S) \oplus E = \mathscr{R}(S) \oplus F. \tag{24}$$

Luego, todo $x \in X$ admite una única representación $x = x_1 + x_2$, con $x_1 \in \mathscr{N}(S)$, $x_2 \in E$. Definimos $p : X \to \mathscr{N}(S)$ poniendo $p(x) = x_1$. Mediante el teorema del grafo cerrado, es fácil ver que p es continuo.

Como suponemos que $\dim \mathscr{N}(S) > \dim F$, debe existir una aplicación lineal $\varphi : \mathscr{N}(S) \to F$ sobre pero no inyectiva, es decir, tal que $\varphi x_0 = 0$ para algún $x_0 \neq 0$. Definimos $\Phi \in \mathscr{B}(X)$ por

$$\Phi x = Tx + \varphi p(x) \quad (x \in X). \tag{25}$$

Ya que $\dim \mathscr{R}(\varphi) < \infty$, el operador φp es compacto; luego, Φ también lo es (Teorema 4.4).

Obsérvese que

$$\Phi - \lambda I = S + \varphi p. \tag{26}$$

Si $x \in E$, entonces $p(x) = 0$ y $(\Phi - \lambda I)x = Sx$; por tanto,

$$(\Phi - \lambda I)(E) = \mathscr{R}(S). \tag{27}$$

Si $x \in \mathscr{N}(S)$, entonces $p(x) = x$ y

$$(\Phi - \lambda I)x = \varphi x; \tag{28}$$

por tanto,

$$(\Phi - \lambda I)(\mathscr{N}(S)) = \varphi(\mathscr{N}(S)) = F. \tag{29}$$

Sigue de (27) y (29) que

$$\mathscr{R}(\Phi - \lambda I) \supset \mathscr{R}(S) + F = X. \tag{30}$$

Pero si se aplica (28) con $x = x_0$, vemos que λ es un autovalor de Φ; y como Φ es compacto, el Teorema 4.10 impide que el rango de $\Phi - \lambda I$ sea todo X, contradiciendo (30). Consecuentemente, vale (22) y queda probado (i).

El apartado (ii) se sigue de (i), pues si λ no es un autovalor de T entonces $\alpha = 0$ y (i) implica que $\beta = 0$, esto es, que $\mathscr{R}(T - \lambda I) = X$. Así, $T - \lambda I$ es inversible, de modo que $\lambda \notin \sigma(T)$.

El Teorema 4.10 muestra que 0 es el único punto de acumulación posible de $\sigma(T)$, que $\sigma(T)$ es a lo sumo numerable, y que $\sigma(T) \cup \{0\}$ es compacto. Si $\dim X < \infty$, entonces $\sigma(T)$ es finito; si $\dim X = \infty$, entonces $0 \in \sigma(T)$, por el Teorema 4.4. Se prueba así que $\sigma(T)$ es compacto, y con ello (iii). $\square$