Autoevaluación final 1

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

1. Si $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un espacio de Hilbert y $S = \{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es una base ortonormal en H, la transformación de Fourier sobre H es la función $\widehat{\cdot}: H \to \ell^2(A)$ que aplica x en $\widehat{x}$, donde $\widehat{x}: A \to \mathbb{K}$ está dada por $\widehat{x}(\alpha) = \langle x, e_\alpha\rangle$ $(\alpha \in A)$. Esta aplicación es un isomorfismo de espacios de Hilbert, es decir, está bien definida, es lineal, inyectiva, sobre y preserva el producto escalar.

   a) Describir el espacio de Hilbert $\ell^2(A)$.

   b) Enunciar, respecto de la base S en H, los siguientes resultados: desigualdad de Bessel, teorema de Riesz-Fischer, identidad de Parseval para el producto escalar, identidad de Parseval para la norma.

   c) Cada uno de los resultados del apartado anterior se traduce en una propiedad de la transformación de Fourier $\widehat{\cdot}$. Asociar cada resultado (izquierda) con la propiedad correspondiente (derecha):

Identidad de Parseval para el producto escalar	bien definida
Desigualdad de Bessel	inyectiva
Identidad de Parseval para la norma	sobre
Teorema de Riesz-Fischer	preserva el producto escalar

2. Sea $X = c_{00}$ el conjunto de las sucesiones de escalares finitamente no nulas. Sobre c_{00} se consideran las normas p $(1 \le p < \infty)$, definidas por

$$\|x\|_p = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p\right\}^{1/p} \qquad (x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \in c_{00}),$$

   y el operador desplazamiento a la izquierda S, dado por $(Sx)(n) = x(n+1)$ $(x \in c_{00},\ n \in \mathbb{N})$. Demostrar que S es un operador lineal:

   a) acotado de $(X, \|\cdot\|_2)$ en $(X, \|\cdot\|_2)$, con norma 1.

   b) no acotado de $(X, \|\cdot\|_2)$ en $(X, \|\cdot\|_1)$.

3. Sea X un espacio normado. Un conjunto $A \subset X$ está acotado si existe $M > 0$ tal que $\|x\| \le M$ $(x \in A)$.

   a) Probar que si A está acotado en el espacio normado X entonces el conjunto $\{f(a) : a \in A\}$ está acotado en el cuerpo escalar $\mathbb{K}$, para todo $f \in X'$.

   b) Sea $A \subset X$, arbitrario. Demostrar que para cada $a \in A$, el funcional $\Lambda_a : X' \to \mathbb{K}$ definido por $\Lambda_a f = f(a)$ $(f \in X')$ es lineal y continuo sobre X'. Usar el teorema de Hahn-Banach para probar que $\|\Lambda_a\| = \|a\|$.

   c) Enunciar el principio de acotación uniforme.

   d) Demostrar el recíproco de a): si el conjunto $\{f(a) : a \in A\}$ está acotado en $\mathbb{K}$ para todo $f \in X'$, entonces A está acotado en X.

   [*Observación:* Este resultado se resume diciendo que un subconjunto de un espacio normado es débilmente acotado si, y sólo si, es fuertemente acotado.]

4. Sea X un espacio vectorial. Con el siguiente guion se pretende probar que dos normas cualesquiera que hagan de X un espacio de Banach son equivalentes. Lamentablemente, parte del argumento es falaz. Demostrar los apartados que sean ciertos e indicar cuáles son falsos, explicando el motivo.

a) Dadas dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ sobre X, se considera $\|\cdot\|_3 = \|\cdot\|_1 + \|\cdot\|_2$. Entonces $\|\cdot\|_3$ es una norma sobre X.

b) Una sucesión de elementos de X es de Cauchy respecto de $\|\cdot\|_3$ si, y sólo si, es simultáneamente de Cauchy respecto de $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$.

c) Una sucesión converge en $\|\cdot\|_3$ si, y sólo si, converge simultáneamente en $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ al mismo límite.

d) De lo anterior se deduce que si $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son completas, entonces $\|\cdot\|_3$ también es completa.

e) En virtud del teorema de la aplicación abierta, se concluye que si $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ hacen de X un espacio de Banach entonces $\|\cdot\|_3$ es equivalente a $\|\cdot\|_1$ y a $\|\cdot\|_2$. Por tanto, las tres normas son equivalentes.

5. Sea T un operador lineal sobre un espacio de Hilbert H tal que

$$\langle Tx, y\rangle = i\langle x, Ty\rangle \quad (x, y \in H),$$

donde $i = \sqrt{-1}$ representa la unidad imaginaria. Aplicando el teorema del grafo cerrado, probar que T es acotado.

6. Sea X un espacio de Banach complejo. Sean también R el operador desplazamiento a la derecha, definido sobre ℓ^2 por

$$(Rx)(n) = \begin{cases} 0, & n = 1 \\ x(n-1), & n \geq 2 \end{cases} \qquad (x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2),$$

y L el operador desplazamiento a la izquierda, dado por

$$(Lx)(n) = x(n+1) \qquad (n \in \mathbb{N},\ x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2).$$

a) Definir el espectro de $T \in \mathscr{B}(X)$.

b) Dados $S, T \in \mathscr{B}(X)$ y un escalar λ, demostrar que $(S+T)' = S' + T'$, $(\lambda S)' = \lambda S'$, y $(ST)' = T'S'$. Además, probar que el adjunto de $I \in \mathscr{B}(X)$ es la identidad de $\mathscr{B}(X')$.

c) Demostrar que para todo $T \in \mathscr{B}(X)$ se tiene $\sigma(T') = \sigma(T)$.

d) Probar que $R' = L$.

e) Si $T \in \mathscr{B}(X)$, entonces $\sigma(T)$ es compacto y está contenido en el disco cerrado de centro 0 y radio $\|T\|$. Admitiendo este resultado, hallar $\sigma(L)$ y $\sigma(R)$.