Autoevaluación final 1: soluciones

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

1. Si $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un espacio de Hilbert y $S = \{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es una base ortonormal en H, la transformación de Fourier sobre H es la función $\widehat{\cdot}: H \to \ell^2(A)$ que aplica x en $\widehat{x}$, donde $\widehat{x}: A \to \mathbb{K}$ está dada por $\widehat{x}(\alpha) = \langle x, e_\alpha\rangle$ $(\alpha \in A)$. Esta aplicación es un isomorfismo de espacios de Hilbert, es decir, está bien definida, es lineal, inyectiva, sobre y preserva el producto escalar.

   a) Describir el espacio de Hilbert $\ell^2(A)$.

   b) Enunciar, respecto de la base S en H, los siguientes resultados: desigualdad de Bessel, teorema de Riesz-Fischer, identidad de Parseval para el producto escalar, identidad de Parseval para la norma.

   c) Cada uno de los resultados del apartado anterior se traduce en una propiedad de la transformación de Fourier $\widehat{\cdot}$. Asociar cada resultado (izquierda) con la propiedad correspondiente (derecha):

Identidad de Parseval para el producto escalar	bien definida
Desigualdad de Bessel	inyectiva
Identidad de Parseval para la norma	sobre
Teorema de Riesz-Fischer	preserva el producto escalar

Resolución.

a) Dado un conjunto arbitrario A, definimos

$$\ell^2(A) = \left\{\varphi : A \to \mathbb{K} \mid \int_A |\varphi(\alpha)|^2 \, d\mu(\alpha) < \infty\right\},$$

siendo μ la medida cardinal sobre A.

Fijada $\varphi \in \ell^2(A)$, el conjunto $B_\varphi = \{\alpha \in A : \varphi(\alpha) \neq 0\}$ es a lo sumo numerable. Si $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ es una enumeración de B_φ entonces

$$\int_A |\varphi(\alpha)|^2 d\mu(\alpha) = \sum_{n=1}^\infty |\varphi(\alpha_n)|^2,$$

donde la serie del segundo miembro es incondicionalmente convergente. Se obtiene una estructura de espacio de Hilbert sobre $\ell^2(A)$ si se define

$$\langle\varphi,\psi\rangle = \int_A \varphi(\alpha)\overline{\psi(\alpha)}\, d\mu(\alpha) = \sum_{n=1}^\infty \varphi(\alpha_n)\overline{\psi(\alpha_n)} \quad (\varphi,\psi \in \ell^2(A)).$$

Aquí, $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ es una enumeración de $B_\varphi \cap B_\psi$.

Una base ortonormal (llamada base ortonormal canónica) de $\ell^2(A)$ está constituida por las funciones s_α $(\alpha \in A)$, donde $s_\alpha(\beta) = 1$ si $\alpha = \beta$ y $s_\alpha(\beta) = 0$ en otro caso $(\beta \in A)$. La serie de Fourier de $\varphi \in \ell^2(A)$ respecto de esta base es $\varphi = \sum_{\alpha\in A} \varphi(\alpha) s_\alpha$:

$$\langle\varphi, s_\alpha\rangle = \int_A \varphi(\beta)\overline{s_\alpha(\beta)}\, d\mu(\beta) = \int_{\{\alpha\}} \varphi(\beta)\, d\mu(\beta) = \varphi(\alpha)\,\mu(\{\alpha\}) = \varphi(\alpha) \quad (\alpha \in A).$$

b) Se sabe que fijado $x \in H$, el conjunto $\{\alpha \in A : \langle x, e_\alpha\rangle \neq 0\}$ es, a lo sumo, numerable. Además, si $\{\alpha_i\}_{i=1}^\infty$ es una enumeración de este conjunto, la serie $\sum_{i=1}^{\infty}\langle x, e_{\alpha_i}\rangle e_{\alpha_i}$ es incondicionalmente convergente, lo que permite dar sentido a la expresión formal $\sum_{\alpha\in A}\langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha$, es decir, a la serie de Fourier de x respecto de S, y a las series tomadas sobre A que comparecen en los enunciados siguientes.

- *Desigualdad de Bessel.* Se tiene:

$$\sum_{\alpha\in A}|\langle x, e_\alpha\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad (x\in H).$$

- *Teorema de Riesz-Fischer.* Si $\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_i|^2<\infty$ y $\{e_{\alpha_i}\}_{i=1}^{\infty}$ es cualquier sucesión ortonormal en H, entonces la serie $x=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i e_{\alpha_i}$ converge en H, y se cumple que $\lambda_i=\langle x, e_{\alpha_i}\rangle$ $(i\in\mathbb{N})$.

- *Identidad de Parseval para el producto escalar.* Se verifica:

$$\langle x,y\rangle=\sum_{\alpha\in A}\langle x, e_\alpha\rangle\overline{\langle y, e_\alpha\rangle} \quad (x,y\in H).$$

- *Identidad de Parseval para la norma.* Se verifica:

$$\|x\|^2=\sum_{\alpha\in A}|\langle x, e_\alpha\rangle|^2 \quad (x\in H).$$

c)
- Identidad de Parseval para el producto escalar: preserva el producto escalar.
- Desigualdad de Bessel: bien definida.
- Identidad de Parseval para la norma: isométrica, luego inyectiva.
- Teorema de Riesz-Fischer: sobre.

Las tres primeras asociaciones son claras; justifiquemos la afirmación sobre la suprayectividad. Si $\varphi\in\ell^2(A)$, existe $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}\subset A$ tal que

$$\varphi=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi(\alpha_i)s_{\alpha_i},$$

con

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\varphi(\alpha_i)|^2<\infty.$$

En virtud del teorema de Riesz-Fischer, la serie

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi(\alpha_i)e_{\alpha_i}$$

converge en H, y $\widehat{x}(\alpha_i)=\langle x,\alpha_i\rangle=\varphi(\alpha_i)$ $(i\in\mathbb{N})$. Por tanto, $\widehat{x}=\varphi$. De la arbitrariedad de $\varphi\in\ell^2(A)$ se concluye que $\widehat{\cdot}$ es sobre.

□

2. Sea $X=c_{00}$ el conjunto de las sucesiones de escalares finitamente no nulas. Sobre c_{00} se consideran las normas p $(1\leq$

$p < \infty$), definidas por

$$\|x\|_p = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right\}^{1/p} \qquad (x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \in c_{00}),$$

y el operador desplazamiento a la izquierda S, dado por $(Sx)(n) = x(n+1)$ ($x \in c_{00}$, $n \in \mathbb{N}$). Demostrar que S es un operador lineal:

a) acotado de $(X, \|\cdot\|_2)$ en $(X, \|\cdot\|_2)$, con norma 1.

b) no acotado de $(X, \|\cdot\|_2)$ en $(X, \|\cdot\|_1)$.

Resolución. Es claro que las normas $\|\cdot\|_p$ ($1 \le p < \infty$) están bien definidas sobre X, y que S está bien definido de X en X. Para ver que S es lineal, tomamos $x, y \in X$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, arbitrarios. Entonces:

$$\begin{aligned} S(\lambda x + \mu y)(n) &= (\lambda x + \mu y)(n+1) = \lambda x(n+1) + \mu y(n+1) \\ &= \lambda (Sx)(n) + \mu (Sy)(n) = (\lambda Sx + \mu Sy)(n) \quad (n \in \mathbb{N}), \end{aligned}$$

así que

$$S(\lambda x + \mu y) = \lambda Sx + \mu Sy.$$

a) Se tiene:

$$\|Sx\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(Sx)(n)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n+1)|^2 = \sum_{n=2}^{\infty} |x(n)|^2 \le \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^2 = \|x\|_2^2 \quad (x \in X),$$

de modo que S es acotado, con $\|S\| \le 1$. Además, para $e_2 \in X$ encontramos que

$$\|Se_2\|_2^2 = \sum_{n=2}^{\infty} |e_2(n)|^2 = 1 = \|e_2\|_2^2.$$

Por tanto, $\|S\| = 1$.

b) Se cumple:

$$\|Sx\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |(Sx)(n)| = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n+1)| = \sum_{n=2}^{\infty} |x(n)| \quad (x \in X).$$

Pongamos

$$z_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} e_n \quad (N \in \mathbb{N}).$$

Para cada $N \in \mathbb{N}$ se verifica que $z_N \in X$, con

$$(Sz_N)(n) = z_N(n+1) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}, & 1 \le n \le N-1 \\ 0, & n \ge N \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N});$$

luego,

$$\|Sz_N\|_1 = \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} \quad (N \in \mathbb{N}).$$

Si S fuese acotado de $(X, \|\cdot\|_2)$ en $(X, \|\cdot\|_1)$, para algún $C > 0$ se debería tener

$$\|Sz_N\|_1 \leq C\|z_N\|_2 \quad (N \in \mathbb{N}),$$

es decir,

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} \leq C \left\{ \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \right\}^{1/2} \quad (N \in \mathbb{N}).$$

Pero esto es imposible, ya que, cuando $N \to \infty$, el primer miembro de esta desigualdad no está acotado, mientras que el segundo converge a $\pi/\sqrt{6}$.

□

3. Sea X un espacio normado. Un conjunto $A \subset X$ está acotado si existe $M > 0$ tal que $\|x\| \leq M$ $(x \in A)$.

   a) Probar que si A está acotado en el espacio normado X entonces el conjunto $\{f(a) : a \in A\}$ está acotado en el cuerpo escalar $\mathbb{K}$, para todo $f \in X'$.

   b) Sea $A \subset X$, arbitrario. Demostrar que para cada $a \in A$, el funcional $\Lambda_a : X' \to \mathbb{K}$ definido por $\Lambda_a f = f(a)$ $(f \in X')$ es lineal y continuo sobre X'. Usar el teorema de Hahn-Banach para probar que $\|\Lambda_a\| = \|a\|$.

   c) Enunciar el principio de acotación uniforme.

   d) Demostrar el recíproco de a): si el conjunto $\{f(a) : a \in A\}$ está acotado en $\mathbb{K}$ para todo $f \in X'$, entonces A está acotado en X.

[*Observación:* Este resultado se resume diciendo que un subconjunto de un espacio normado es débilmente acotado si, y sólo si, es fuertemente acotado.]

Resolución.

a) Supongamos que A es acotado en X: existe $M > 0$ tal que $\|x\| \leq M$ $(x \in A)$. Entonces, para cada $f \in X'$,

$$|f(a)| \leq \|f\| \, \|a\| \leq M\|f\| = C,$$

probando que $\{f(a) : a \in A\}$ está acotado en $\mathbb{K}$.

b) Fijado $a \in A$, se tiene que Λ_a es lineal porque las operaciones algebraicas en X' están definidas punto a punto. Además,

$$|\Lambda_a f| = |f(a)| \leq \|f\| \, \|a\| \quad (f \in X'),$$

así que Λ_a es acotado, con norma $\|\Lambda_a\| \leq \|a\|$. Por último, el teorema de Hahn-Banach garantiza la existencia de $g \in X'$ tal que $\|g\| = 1$ y $g(a) = \|a\|$. Consecuentemente,

$$|\Lambda_a g| = \Lambda_a g = g(a) = \|a\| = \|g\| \, \|a\|,$$

con lo que $\|\Lambda_a\| = \|a\|$.

c) *Principio de acotación uniforme.* Sean X un espacio de Banach, Y un espacio normado, y $\{T_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de operadores lineales acotados de X en Y. Si $\{\|T_\alpha x\|\}_{\alpha\in I}$ está acotada para todo $x \in X$, entonces la familia $\{T_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es equicontinua. En otras palabras, si dado $x \in X$ existe $M_x > 0$ tal que $\|T_\alpha x\| \leq M_x$ $(\alpha \in I)$, entonces existe $M > 0$ tal que $\|T_\alpha\| \leq M$ $(\alpha \in I)$.

d) Supongamos que el conjunto $\{f(a) : a \in A\}$ está acotado en $\mathbb{K}$ para todo $f \in X'$. Entonces la familia de funcionales lineales continuos $\{\Lambda_a\}_{a\in A}$ está puntualmente acotada sobre X'. Como X' es un espacio de Banach, el principio de acotación uniforme garantiza la existencia de $M > 0$ tal que

$$\|a\| = \|\Lambda_a\| \leq M \quad (a \in A),$$

de modo que A está acotado en X.

$\square$

4. Sea X un espacio vectorial. Con el siguiente guion se pretende probar que dos normas cualesquiera que hagan de X un espacio de Banach son equivalentes. Lamentablemente, parte del argumento es falaz. Demostrar los apartados que sean ciertos e indicar cuáles son falsos, explicando el motivo.

a) Dadas dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ sobre X, se considera $\|\cdot\|_3 = \|\cdot\|_1 + \|\cdot\|_2$. Entonces $\|\cdot\|_3$ es una norma sobre X.

b) Una sucesión de elementos de X es de Cauchy respecto de $\|\cdot\|_3$ si, y sólo si, es simultáneamente de Cauchy respecto de $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$.

c) Una sucesión converge en $\|\cdot\|_3$ si, y sólo si, converge simultáneamente en $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ al mismo límite.

d) De lo anterior se deduce que si $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son completas, entonces $\|\cdot\|_3$ también es completa.

e) En virtud del teorema de la aplicación abierta, se concluye que si $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ hacen de X un espacio de Banach entonces $\|\cdot\|_3$ es equivalente a $\|\cdot\|_1$ y a $\|\cdot\|_2$. Por tanto, las tres normas son equivalentes.

Resolución.

a) Se tiene, en efecto:

i) $\|x\|_3 \geq 0$; $\|x\|_1 + \|x\|_2 = \|x\|_3 = 0$ si, y sólo si, $\|x\|_1 = \|x\|_2 = 0$, lo que ocurre si, y sólo si, $x = 0$ $(x \in X)$.

ii) $\|\lambda x\|_3 = \|\lambda x\|_1 + \|\lambda x\|_2 = |\lambda|\,\|x\|_1 + |\lambda|\,\|x\|_2 = |\lambda|\,(\|x\|_1 + \|x\|_2) = |\lambda|\,\|x\|_3$ $(x \in X,\ \lambda \in \mathbb{K})$.

iii) $\|x+y\|_3 = \|x+y\|_1 + \|x+y\|_2 \leq (\|x\|_1 + \|y\|_1) + (\|x\|_2 + \|y\|_2) = (\|x\|_1 + \|x\|_2) + (\|y\|_1 + \|y\|_2) = \|x\|_3 + \|y\|_3$ $(x, y \in X)$.

b) Esta afirmación también es cierta. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$. Supongamos que dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n, m \geq N$ implica $\|x_n - x_m\|_1 + \|x_n - x_m\|_2 = \|x_n - x_m\|_3 < \varepsilon$; entonces $\|x_n - x_m\|_1 < \varepsilon$ y $\|x_n - x_m\|_2 < \varepsilon$ $(n, m \geq N)$. Recíprocamente, supongamos que dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n, m \geq N$ implica $\|x_n - x_m\|_1 < \varepsilon/2$ y $\|x_n - x_m\|_2 < \varepsilon/2$; entonces $\|x_n - x_m\|_3 = \|x_n - x_m\|_1 + \|x_n - x_m\|_2 < \varepsilon$ $(n, m \geq N)$.

c) Sean $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ y $x \in X$. Supongamos que dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ implica $\|x_n - x\|_1 + \|x_n - x\|_2 = \|x_n - x\|_3 < \varepsilon$; entonces $\|x_n - x\|_1 < \varepsilon$ y $\|x_n - x\|_2 < \varepsilon$ $(n \geq N)$. Recíprocamente, si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge simultáneamente en $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ a x, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ implica $\|x_n - x\|_1 < \varepsilon/2$ y $\|x_n - x\|_2 < \varepsilon/2$, de donde $\|x_n - x\|_3 = \|x_n - x\|_1 + \|x_n - x\|_2 < \varepsilon$ $(n \geq N)$. Por tanto, este enunciado es, igualmente, verdadero.

d) Sin embargo, no se puede afirmar que $\|\cdot\|_3$ es completa cuando $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ lo son. Supongamos que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son completas, y sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ una sucesión de Cauchy respecto a $\|\cdot\|_3$. Por lo visto en b), $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy respecto a $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$, luego existirán $x, y \in X$ tales que $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_1 = 0$ y $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y\|_2 = 0$. Como, en general, $x \neq y$, c) impide que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converja respecto de $\|\cdot\|_3$.

e) Del teorema de la aplicación abierta se deduce que si sobre un espacio normado X están definidas dos normas comparables que dotan a X de estructura de espacio de Banach, entonces ambas normas son equivalentes. Sean $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ dos normas cualesquiera que hacen de X un espacio de Banach, y definamos $\|\cdot\|_3$ como en a). Si d) fuese cierto, entonces $\|\cdot\|_3$ sería completa. Como las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_3$ son comparables, y también lo son las normas $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_3$, resultaría que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son ambas equivalentes a $\|\cdot\|_3$, y por lo tanto serían equivalentes entre sí, que es la conclusión deseada.

$\square$

5. Sea T un operador lineal sobre un espacio de Hilbert H tal que

$$\langle Tx, y\rangle = i\langle x, Ty\rangle \quad (x, y \in H),$$

donde $i = \sqrt{-1}$ representa la unidad imaginaria. Aplicando el teorema del grafo cerrado, probar que T es acotado.

Resolución. Necesitamos probar que T tiene grafo cerrado, esto es, que si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ es tal que existen $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ y $\lim_{n\to\infty} Tx_n = y$, entonces $y = 0$. Ahora bien, combinando las hipótesis sobre T con la continuidad del producto interior, encontramos que

$$\|y\|^2 = \langle y, y\rangle = \langle \lim_{n\to\infty} Tx_n, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Tx_n, y\rangle$$

$$= \lim_{n\to\infty} i\langle x_n, Ty\rangle = i\langle \lim_{n\to\infty} x_n, Ty\rangle = i\langle 0, Ty\rangle = 0,$$

como se pretendía. □

6. Sea X un espacio de Banach complejo. Sean también R el operador desplazamiento a la derecha, definido sobre ℓ^2 por

$$(Rx)(n) = \begin{cases} 0, & n = 1 \\ x(n-1), & n \geq 2 \end{cases} \qquad (x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2),$$

y L el operador desplazamiento a la izquierda, dado por

$$(Lx)(n) = x(n+1) \qquad (n \in \mathbb{N},\, x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2).$$

a) Definir el espectro de $T \in \mathscr{B}(X)$.

b) Dados $S, T \in \mathscr{B}(X)$ y un escalar λ, demostrar que $(S+T)' = S' + T'$, $(\lambda S)' = \lambda S'$, y $(ST)' = T'S'$. Además, probar que el adjunto de $I \in \mathscr{B}(X)$ es la identidad de $\mathscr{B}(X')$.

c) Demostrar que para todo $T \in \mathscr{B}(X)$ se tiene $\sigma(T') = \sigma(T)$.

d) Probar que $R' = L$.

e) Si $T \in \mathscr{B}(X)$, entonces $\sigma(T)$ es compacto y está contenido en el disco cerrado de centro 0 y radio $\|T\|$. Admitiendo este resultado, hallar $\sigma(L)$ y $\sigma(R)$.

Resolución.

a) Un operador $T \in \mathscr{B}(X)$ se dice inversible si existe $S \in \mathscr{B}(X)$ tal que $ST = I = TS$. En tal caso, escribimos $S = T^{-1}$. El espectro $\sigma(T)$ de un operador $T \in \mathscr{B}(X)$ es el conjunto de todos los escalares λ tales que $T - \lambda I$ no es inversible. Por el teorema de la aplicación abierta, $\lambda \in \sigma(T)$ si, y sólo si, se cumple, al menos, uno de los dos enunciados siguientes:

i) $T - \lambda I$ no es sobre: $\mathscr{R}(T - \lambda I) \neq X$.

ii) $T - \lambda I$ no es inyectivo: $\mathscr{N}(T - \lambda I) \neq \{0\}$.

Si se verifica ii), se dice que λ es un autovalor o valor propio de T; el correspondiente autoespacio o espacio propio es $\mathscr{N}(T - \lambda I)$; cada $x \in \mathscr{N}(T - \lambda I)$ (excepto $x = 0$) se llama un autovector o vector propio de T, y satisface la ecuación $Tx = \lambda x$.

b) Sea $\bar{I}$ la identidad de X'. Se tiene:

$$\langle Ix, x'\rangle = \langle x, x'\rangle = \langle x, \bar{I}x'\rangle \quad (x \in X,\, x' \in X').$$

Por unicidad, $\bar{I} = I'$.

Sean ahora $S,T \in \mathscr{B}(X)$. Para cualesquiera $x \in X$ y $x' \in X'$, se cumple:

$$\begin{aligned}
&\langle (S+T)x, x'\rangle = \langle Sx + Tx, x'\rangle = \langle Sx, x'\rangle + \langle Tx, x'\rangle = \langle x, S'x'\rangle + \langle x, T'x'\rangle = \langle x, S'x' + T'x'\rangle = \langle x, (S'+T')x'\rangle,\\
&\langle \lambda Sx, x'\rangle = \lambda \langle Sx, x'\rangle = \lambda \langle x, S'x'\rangle = \langle x, \lambda S'x'\rangle,\\
&\langle STx, x'\rangle = \langle Tx, S'x'\rangle = \langle x, T'S'x'\rangle.
\end{aligned}$$

Luego, $(S+T)' = S' + T'$, $(\lambda S)' = \lambda S'$, y $(ST)' = T'S'$.

c) Supongamos que $\lambda \in \mathbb{C}$ es tal que $T - \lambda I$ tiene un inverso acotado S. Entonces $S(T-\lambda I) = (T-\lambda I)S = I$. Sigue de b) que $(T-\lambda I)'S' = S'(T-\lambda I)' = I'$, o bien $(T' - \lambda I')S' = S'(T' - \lambda I') = I'$, con $S' \in \mathscr{B}(X')$; así, $T' - \lambda I'$ tiene un inverso acotado. Este argumento es reversible y prueba, por complementación, que T y T' tienen el mismo espectro.

d) Sabemos que los funcionales lineales continuos sobre ℓ^2 vienen representados como productos escalares contra vectores de ese espacio. Por tanto, si $x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$ e identificamos $x' \in (\ell^2)'$ con su representante, podemos escribir:

$$\langle Rx, x'\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} (Rx)(n)\overline{x'(n)} = \sum_{n=2}^{\infty} x(n-1)\overline{x'(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\overline{x'(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\overline{Lx'(n)} = \langle x, Lx'\rangle.$$

La arbitrariedad de x y x' muestra que $R' = L$.

e) Afirmamos que $\|L\| = 1$. En efecto: por d), $\|L\| = \|R'\| = \|R\|$, y

$$\|Rx\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^2 = \|x\|_2^2 \quad (x \in \ell^2),$$

así que

$$\|R\| = \sup\left\{ \frac{\|Rx\|_2}{\|x\|_2} : x \in \ell^2 \setminus \{0\} \right\} = 1.$$

Por tanto, $\sigma(L) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le 1\}$. Si $|\lambda| < 1$ y $z = \left\{1, \lambda, \lambda^2, \ldots\right\}$, entonces $z \in \ell^2$ y $Lz = \lambda z$, de modo que $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\} \subset \sigma(L)$. Como $\sigma(L)$ es cerrado, necesariamente $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le 1\} \subset \sigma(L)$. La doble inclusión proporciona la igualdad $\sigma(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le 1\} = \mathbb{D}$. De c) y d) se concluye que $\sigma(R) = \mathbb{D}$.

$\square$