Autoevaluación final 2

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

1. En el espacio $X = C[-1,1]$ real, provisto de la norma

$$\|x\|_2 = \left\{ \int_{-1}^{1} |x(t)|^2 \, dt \right\}^{1/2} \qquad (x \in X),$$

se considera el conjunto

$$M = \{x \in X : x(t) = 0 \; (t \geq 0)\}.$$

   a) Probar que M es un subespacio de $(X, \|\cdot\|_2)$. ¿Es M cerrado?

   b) Usar la ley del paralelogramo para demostrar que la norma $\|\cdot\|_2$ proviene de un producto escalar, y la identidad de polarización para determinarlo.

   c) Describir $M^{\perp}$ respecto a este producto escalar.

   d) Justificar que $M^{\perp}$ es un subespacio cerrado de X.

   e) Verificar mediante un contraejemplo que no todo $x \in X$ admite una única representación de la forma $x = u + v$, con $u \in M$ y $v \in M^{\perp}$.

   f) Explicar por qué el hecho de que $X \neq M \oplus M^{\perp}$ no contradice el teorema de la proyección ortogonal.

   g) ¿Se puede afirmar que $X = M^{\perp} \oplus M^{\perp\perp}$?

2. Sobre el espacio $C[0,1]$, provisto de la norma del supremo, se considera el operador $T : C[0,1] \to C[0,1]$ definido por $(Tx)(t) = t^2 x(0)$ $(0 \leq t \leq 1)$. Demostrar que T es lineal y acotado, y calcular su norma.

3. Sea $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funcionales lineales sobre un espacio de Banach X tales que, para cada $x \in X$, la sucesión $\Phi x = \{\phi_n x\}_{n=1}^{\infty}$ está en el espacio de Banach ℓ^1. Se consideran también las sucesiones $\Phi_N x = \{\phi_n x\}_{n=1}^{N}$ $(N \in \mathbb{N})$. De esta manera, las aplicaciones lineales $x \mapsto \Phi x$ y $x \mapsto \Phi_N x$ $(N \in \mathbb{N})$ están bien definidas de X en ℓ^1. Probar que Φ es continua si, y sólo si, todas las ϕ_n $(n \in \mathbb{N})$ son continuas, demostrando para ello las siguientes afirmaciones:

   a) Si Φ es continua, también lo es ϕ_n $(n \in \mathbb{N})$.

   b) Se verifica que $\lim_{N\to\infty} \Phi_N x = \Phi x$ $(x \in X)$.

   c) Si cada ϕ_n $(n \in \mathbb{N})$ es continua entonces también lo es cada Φ_N, con norma

$$\|\Phi_N\| \leq \sum_{n=1}^{N} \|\phi_n\| \quad (N \in \mathbb{N}),$$

   y combinando b) con el teorema de clausura de Banach-Steinhaus se concluye que Φ es continua.

   Estimar la norma de Φ en términos de las de ϕ_n $(n \in \mathbb{N})$.

4. Sobre el espacio vectorial $X = \ell^1$ de las sucesiones de escalares absolutamente convergentes se consideran las normas

$$\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|, \quad \|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x(n)| \qquad (x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \in X).$$

Es bien sabido que $(X, \|\cdot\|_1)$ es un espacio de Banach. Demostrar los enunciados siguientes:

a) El funcional $\|\cdot\|_\infty$ es efectivamente una norma sobre X.

b) Se tiene que $\|x\|_\infty \le \|x\|_1$ $(x \in X)$. Luego, la aplicación identidad es un operador continuo de $(X, \|\cdot\|_1)$ en $(X, \|\cdot\|_\infty)$.

c) Las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ no son equivalentes, por lo que, en virtud del teorema de la aplicación abierta, el espacio $(X, \|\cdot\|_\infty)$ no es completo.

d) La aplicación identidad de $(X, \|\cdot\|_\infty)$ en $(X, \|\cdot\|_1)$ es un operador lineal con grafo cerrado e inversa continua. Sin embargo, ella misma no es es continua.

e) El resultado del apartado d) no contradice el teorema del grafo cerrado.

5. En $\mathbb{R}^2$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$ se considera el subespacio

$$M = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 0\right\},$$

y se define $g : M \to \mathbb{R}$ por $g(x_1, x_2) = x_2$ $((x_1, x_2) \in M)$.

a) Sin hacer ningún cálculo, justificar que el funcional lineal g es continuo. Luego, calcular la norma de g.

b) Enunciar el teorema de Hahn-Banach de extensión continua.

c) Llamaremos extensión de Hahn-Banach de g a todo funcional lineal sobre $\mathbb{R}^2$ que satisfaga la tesis del teorema de extensión continua respecto a g. Decidir cuál de las siguientes afirmaciones es cierta, justificando la respuesta.

i) El funcional g admite una única extensión de Hahn-Banach.

ii) Todo funcional lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que satisfaga $f(-1,1) = 1$ es una extensión de Hahn-Banach de g. [*Sugerencia:* Para cada $t \in \mathbb{R}$, evaluar el funcional $F_t(x_1, x_2) = -x_1 + t(x_1 + x_2)$ $((x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2)$ en el punto $(1,1)$.]

iii) Los funcionales $f_1 \neq f_2$ definidos sobre $\mathbb{R}^2$ por $f_1(x_1, x_2) = x_2$ y $f_2(x_1, x_2) = -x_1$ son dos extensiones de Hahn-Banach de g.

6. Sea X un espacio normado separable.

a) Demostrar que la topología débil* de la bola unidad cerrada de X' es metrizable.

b) Probar que la bola unidad cerrada de X' es débilmente* secuencialmente compacta; es decir, toda sucesión $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset X'$ con $\|f_n\| \le 1$ $(n \in \mathbb{N})$ admite una subsucesión $\{f_{n_i}\}_{i=1}^\infty$ que converge débilmente* a algún $f \in X'$.

Supongamos ahora que X es, además, reflexivo.

c) Deducir que la bola unidad cerrada de X' es débilmente secuencialmente compacta.

d) Demostrar que todo operador lineal acotado $T : X' \to \ell^1$ es compacto. [*Sugerencia:* ℓ^1 tiene la propiedad de Schur: una sucesión de elementos de ℓ^1 converge débilmente si, y sólo si, converge fuertemente.]

e) Concluir que todo $T \in \mathscr{B}(X, \ell^1)$ es compacto. En particular, si H es un espacio de Hilbert separable, cualquier $T \in \mathscr{B}(H, \ell^1)$ es compacto.