Autoevaluación parcial 1: soluciones

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

1. Definir el concepto de base ortonormal y enunciar el teorema de caracterización de bases ortonormales en espacios de Hilbert.

Resolución.

Sea $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio con producto interior. Se dice que dos vectores $x, y \in X$ son ortogonales, y se escribe $x \perp y$, si $\langle x, y\rangle = 0$. Un conjunto $M \subset X$ se dice ortogonal si sus elementos son ortogonales dos a dos. Un conjunto ortonormal $S = \{e_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset X$ es un conjunto ortogonal de vectores unitarios. Si $x \in X$, el α-ésimo coeficiente de Fourier de x respecto de S es el escalar $\langle x, e_\alpha\rangle$ $(\alpha \in A)$. Una base ortonormal en un espacio de Hilbert H es un conjunto ortonormal maximal.

Teorema de caracterización de bases ortonormales en espacios de Hilbert. Sea $S = \{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un conjunto ortonormal en un espacio de Hilbert H. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) S es base ortonormal.

ii) (Serie de Fourier) Todo $x \in H$ se puede expresar como suma de su serie de Fourier respecto de S: $x = \sum_{\alpha\in A}\langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha$.

iii) (Identidad de Parseval) Para todo $x \in H$, $\|x\|^2 = \sum_{\alpha\in A}|\langle x, e_\alpha\rangle|^2$.

iv) (Identidad de Parseval) Para cualesquiera $x, y \in H$, $\langle x, y\rangle = \sum_{\alpha\in A}\langle x, e_\alpha\rangle\overline{\langle y, e_\alpha\rangle}$.

v) $S^\perp = \{0\}$.

vi) S es total en H.

□

2. Enunciar:

a) el principio de acotación uniforme;

b) el teorema de clausura de Banach-Steinhaus.

Resolución. Dados dos espacios normados X e Y, una familia $\{T_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de operadores lineales acotados de X en Y se dice equicontinua cuando $\sup_{\alpha\in I}\|T_\alpha\| < \infty$.

a) *Principio de acotación uniforme.* Sean X un espacio de Banach, Y un espacio normado, y $\{T_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de operadores lineales acotados de X en Y. Si $\{\|T_\alpha x\|\}_{\alpha\in I}$ está acotada para todo $x \in X$, entonces la familia $\{T_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es equicontinua. En otras palabras, si dado $x \in X$ existe $M_x > 0$ tal que $\|T_\alpha x\| \le M_x$ $(\alpha \in I)$, entonces existe $M > 0$ tal que $\|T_\alpha\| \le M$ $(\alpha \in I)$.

b) *Teorema de clausura de Banach-Steinhaus.* Sean X un espacio de Banach, Y un espacio normado, y $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ una familia de aplicaciones lineales acotadas de X en Y. Si $\{T_n x\}_{n=1}^\infty$ es convergente para todo $x \in X$, entonces $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ es equicontinua. Además, si $\lim_{n\to\infty} T_n x = Tx$ $(x \in X)$, entonces T es lineal y acotada, con $\|T\| \le \liminf_{n\to\infty}\|T_n\|$.

□

3. Sobre $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ se considera el funcional $\Lambda x = \langle x, z\rangle$ $(x \in \ell^2)$, donde $z = \{z(n)\}_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión de término general $z(n) = 1/n$. Sea $c_{00} \subset \ell^2$ el espacio de las sucesiones de escalares finitamente no nulas.

   a) Explicitar la expresión del producto escalar y la norma definidos sobre ℓ^2.

   b) Para cada $k \in \mathbb{N}$ se define $z_k = \sum_{j=1}^{k} e_j/j \in c_{00}$; como habitualmente, e_j denota la j-ésima sucesión unitaria canónica $(j \in \mathbb{N})$. Probar que $z \in \ell^2 \setminus c_{00}$ y $\lim_{k\to\infty} \|z_k - z\|_2 = 0$. Deducir que $(c_{00}, \|\cdot\|_2)$ no es un espacio de Hilbert.

   c) Enunciar el teorema de representación de Fréchet-Riesz para funcionales.

   d) Demostrar que Λ es un funcional lineal continuo sobre $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ y, por tanto, sobre $(c_{00}, \|\cdot\|_2)$. Calcular la norma de Λ en ℓ^2.

   e) Probar que Λ no puede ser representado en c_{00} como un producto interior contra un elemento de c_{00}.

   f) Explicar por qué e) no contradice el teorema c).

Resolución.

a) En el espacio vectorial ℓ^2 de las sucesiones de cuadrado absolutamente sumable,

$$\ell^2 = \left\{ x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} : x(n) \in \mathbb{K}\ (n \in \mathbb{N}),\ \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty \right\},$$

donde las operaciones algebraicas están definidas término a término, se obtiene un producto interior poniendo

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\overline{y(n)} \quad (x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty},\ y = \{y(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2).$$

La norma asociada es

$$\|x\|_2 = \langle x, x\rangle^{1/2} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^2 \right\}^{1/2} \qquad (x \in \ell^2).$$

Con el producto escalar así definido, ℓ^2 es un espacio de Hilbert. Este producto escalar se induce sobre c_{00}, dotándolo de estructura de espacio pre-Hilbert.

b) Recordemos que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $e_k = \{e_k(n)\}_{n=1}^{\infty}$, donde

$$e_k(n) = \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & n \neq k. \end{cases}$$

Por tanto, fijado $k \in \mathbb{N}$,

$$z_k(n) = \sum_{j=1}^{k} \frac{e_j(n)}{j} = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & 1 \leq n \leq k \\ 0, & n > k \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Es claro entonces que $z_k \in c_{00}$. De otra parte, $z = \{1/n\}_{n=1}^{\infty} \notin c_{00}$ aunque $z \in \ell^2$, por cuanto

$$\|z\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |z(n)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty.$$

Finalmente, la convergencia de la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ también permite concluir que

$$\|z_k - z\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |z_k(n) - z(n)|^2 = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

Hemos probado así que la sucesión $\{z_k\}_{k=1}^{\infty} \subset c_{00}$ converge en ℓ^2 a $z \in \ell^2 \setminus c_{00}$. Por tanto, c_{00} no es cerrado en ℓ^2, y consecuentemente no es completo; es decir, $(c_{00}, \|\cdot\|_2)$ no es un espacio de Hilbert.

c) *Teorema de representación de Fréchet-Riesz.* Un funcional lineal f sobre un espacio de Hilbert H es continuo si, y sólo si, existe un único vector $y \in H$ que representa a f, en el sentido de que $f(x) = \langle x, y\rangle$ $(x \in H)$. En tal caso, la norma del funcional f es la norma en H del vector representante y.

d) Puesto que $z \in \ell^2$, el teorema de Fréchet-Riesz prueba que $\Lambda x = \langle x, z\rangle$ $(x \in \ell^2)$ define un funcional lineal continuo sobre el espacio de Hilbert $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$, con

$$\|\Lambda\| = \|z\|_2 = \frac{\pi}{\sqrt{6}}.$$

Evidentemente, la restricción de Λ a c_{00} continúa siendo un funcional lineal continuo sobre $(c_{00}, \|\cdot\|_2)$.

e) Supongamos, para alcanzar una contradicción, que algún $w \in c_{00}$ es tal que $\Lambda x = \langle x, w\rangle$ $(x \in c_{00})$. Entonces $\langle x, z\rangle = \langle x, w\rangle$ $(x \in c_{00})$, y particularizando $x = e_k \in c_{00}$ encontramos que $z(k) = w(k)$ $(k \in \mathbb{N})$. De aquí, $z = w \in c_{00}$, que es la contradicción esperada.

f) El resultado de e) no contradice c) porque no se satisfacen las hipótesis del teorema: como se probó en b), el espacio $(c_{00}, \|\cdot\|_2)$ no es completo.

$\square$

4. *a*) Demostrar que un espacio vectorial con una base de Hamel infinita numerable se puede escribir como unión numerable de subespacios de dimensión finita.

   b) Probar que los subespacios propios de espacios normados carecen de interior.

   c) ¿De qué categoría es un espacio de Banach en sí mismo?

   d) Concluir de todo lo anterior que no existen espacios de Banach de dimensión infinita numerable.

Resolución.

a) Un espacio vectorial X que admite una base de Hamel $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es expresable en la forma $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, donde $X_n = \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$.

b) Estableceremos el enunciado contrarrecíproco. Supongamos que el subespacio Y del espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ tiene un punto interior x_0: existe $r > 0$ tal que $V = x_0 + rU \subset Y$, siendo $U = \{x \in X : \|x\| < 1\}$ la bola unidad abierta de X. Como Y es subespacio, $0 \in Y$. Por otra parte, si $x \in X \setminus \{0\}$ entonces $x_0 + (rx/2\|x\|) \in V$, y aplicando de nuevo el hecho de que Y es subespacio se infiere que $x \in 2\|x\|(V - x_0)/r \subset Y$. De la arbitrariedad de $x \in X$ ya se concluye que $X \subset Y$, es decir, que $Y = X$.

c) Un espacio de Banach es un espacio métrico completo; luego, por el teorema de categoría de Baire, es de segunda categoría en sí mismo.

d) Si X es un espacio de Banach de dimensión infinita numerable entonces, por a), $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, donde cada subespacio X_n $(n \in \mathbb{N})$ tiene dimensión finita; en particular, es propio; luego, es cerrado y, por b), carece de interior. El espacio X queda entonces expresado como unión numerable de conjuntos diseminados, es decir, es de primera categoría, contradiciendo c).

$\square$