Autoevaluación parcial 1

Isabel Marrero
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

1. Definir el concepto de base ortonormal y enunciar el teorema de caracterización de bases ortonormales en espacios de Hilbert.

2. Enunciar:

   a) el principio de acotación uniforme;

   b) el teorema de clausura de Banach-Steinhaus.

3. Sobre $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ se considera el funcional $\Lambda x = \langle x, z \rangle$ $(x \in \ell^2)$, donde $z = \{z(n)\}_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión de término general $z(n) = 1/n$. Sea $c_{00} \subset \ell^2$ el espacio de las sucesiones de escalares finitamente no nulas.

   a) Explicitar la expresión del producto escalar y la norma definidos sobre ℓ^2.

   b) Para cada $k \in \mathbb{N}$ se define $z_k = \sum_{j=1}^{k} e_j / j \in c_{00}$; como habitualmente, e_j denota la j-ésima sucesión unitaria canónica $(j \in \mathbb{N})$. Probar que $z \in \ell^2 \setminus c_{00}$ y $\lim_{k \to \infty} \|z_k - z\|_2 = 0$. Deducir que $(c_{00}, \|\cdot\|_2)$ no es un espacio de Hilbert.

   c) Enunciar el teorema de representación de Fréchet-Riesz para funcionales.

   d) Demostrar que Λ es un funcional lineal continuo sobre $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ y, por tanto, sobre $(c_{00}, \|\cdot\|_2)$. Calcular la norma de Λ en ℓ^2.

   e) Probar que Λ no puede ser representado en c_{00} como un producto interior contra un elemento de c_{00}.

   f) Explicar por qué e) no contradice el teorema c).

4. *a*) Demostrar que un espacio vectorial con una base de Hamel infinita numerable se puede escribir como unión numerable de subespacios de dimensión finita.

   b) Probar que los subespacios propios de espacios normados carecen de interior.

   c) ¿De qué categoría es un espacio de Banach en sí mismo?

   d) Concluir de todo lo anterior que no existen espacios de Banach de dimensión infinita numerable.