Autoevaluación parcial 2

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

1. Enunciar las siguientes versiones del teorema de Hahn-Banach:

   a) extensión mayorada;

   b) extensión continua;

   c) separación en espacios vectoriales;

   d) separación estricta en espacios normados;

   e) separación fuerte en espacios normados.

2. Sean X un espacio de Banach y $T \in \mathscr{B}(X)$ un operador biyectivo. Supongamos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en X tal que $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \infty$. Demostrar que $\lim_{n\to\infty} \|Tx_n\| = \infty$. [*Sugerencia:* Usar el teorema de la aplicación abierta.]

3. Sean X un espacio de Banach y M, N subespacios cerrados de X tales que $X = M \oplus N$. Se considera el operador $P : X \to M$ de proyección sobre M en la dirección paralela a N, dado por $Px = u$ $(x \in X)$, donde $x \in X$ se escribe como $x = u + v$, con $u \in M$ y $v \in N$. Probar que P está bien definido y es lineal y continuo. [*Sugerencia:* Usar el teorema del grafo cerrado.]

4. Sean a, b números reales positivos, y sea x un vector del espacio normado X tal que para cada $f \in X'$ con $\|f\| \leq b$, se tiene que $|f(x)| \leq a$. Probar que $\|x\| \leq a/b$. [*Sugerencia:* Usar alguna consecuencia del teorema de Hahn-Banach.]