Autoevaluación parcial 2: soluciones

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

1. Enunciar las siguientes versiones del teorema de Hahn-Banach:

   a) extensión mayorada;

   b) extensión continua;

   c) separación en espacios vectoriales;

   d) separación estricta en espacios normados;

   e) separación fuerte en espacios normados.

Resolución.

a) *Teorema de Hahn-Banach de extensión mayorada.* Sea X un espacio vectorial, sobre el que está definido un funcional $\nu : X \to \mathbb{R}$ que verifica las siguientes propiedades:

$$\nu(x+y) \leq \nu(x) + \nu(y) \quad (x, y \in X);$$

$$\nu(rx) = r\nu(x) \quad (r \geq 0,\, x \in X).$$

Sean M un subespacio vectorial de X y g un funcional lineal definido sobre M, satisfaciendo:

$$\Re g(m) \leq \nu(m) \quad (m \in M).$$

Entonces existe un funcional lineal f en X que extiende a g, es decir, $f(m) = g(m)$ $(m \in M)$, y cumple que

$$-\nu(-x) \leq \Re f(x) \leq \nu(x) \quad (x \in X).$$

Si, además, ν es una seminorma, se tiene

$$|f(x)| \leq \nu(x) \quad (x \in X).$$

b) *Teorema de Hahn-Banach de extensión continua.* Sean X un espacio normado, M un subespacio de X y $g \in M'$. Entonces existe $f \in X'$ que extiende a g, tal que $\|f\| = \|g\|$.

c) *Teorema de Hahn-Banach de separación en espacios vectoriales.* Sean X un espacio vectorial y A, B subconjuntos no vacíos, convexos y disjuntos de X. Supongamos que para algún $a_0 \in A$, el conjunto $A - a_0$ es absorbente. Entonces existe un funcional lineal no nulo f sobre X que separa A y B, es decir,

$$\sup\{\Re f(a) : a \in A\} \leq \inf\{\Re f(b) : b \in B\}.$$

d) *Teorema de Hahn-Banach de separación estricta en espacios normados.* Sean X un espacio normado y A, B

subconjuntos convexos de X. Supongamos que $A^\circ \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ y $A^\circ \cap B = \emptyset$. Entonces existen $f \in X' \setminus \{0\}$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$\sup\{\Re f(a) : a \in \overline{A}\} \leq \gamma \leq \inf\{\Re f(b) : b \in B\},$$

con

$$\Re f(a) < \gamma \leq \inf\{\Re f(b) : b \in B\} \quad (a \in A^\circ).$$

e) *Teorema de Hahn-Banach de separación fuerte en espacios normados.* Sean A y B subconjuntos convexos no vacíos de un espacio normado X, y supongamos que $d(A,B) = \rho > 0$. Entonces existen $f \in X'$, con $\|f\| = 1$, y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$\sup\{\Re f(a) : a \in A\} = \gamma < \gamma + \rho \leq \inf\{\Re f(b) : b \in B\}.$$

□

2. Sean X un espacio de Banach y $T \in \mathscr{B}(X)$ un operador biyectivo. Supongamos que $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión en X tal que $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \infty$. Demostrar que $\lim_{n\to\infty} \|Tx_n\| = \infty$. [*Sugerencia:* Usar el teorema de la aplicación abierta.]

   Resolución. Por el teorema de la aplicación abierta, T es un isomorfismo topológico (es decir, su inversa es continua), y existe una constante $C > 0$ tal que $\|Tx\| \geq C\|x\|$ para todo $x \in X$. Si $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión en X con $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \infty$, dado $M > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq n_0$ se tiene que $\|x_n\| \geq M/C$. Entonces $\|Tx_n\| \geq C\|x_n\| \geq CM/C = M$ para cada $n \geq n_0$, con lo que $\lim_{n\to\infty} \|Tx_n\| = \infty$. □

3. Sean X un espacio de Banach y M, N subespacios cerrados de X tales que $X = M \oplus N$. Se considera el operador $P : X \to M$ de proyección sobre M en la dirección paralela a N, dado por $Px = u$ $(x \in X)$, donde $x \in X$ se escribe como $x = u + v$, con $u \in M$ y $v \in N$. Probar que P está bien definido y es lineal y continuo. [*Sugerencia:* Usar el teorema del grafo cerrado.]

   Resolución. La proyección P está bien definida, ya que para cada $x \in X$ la descomposición $x = u + v$, con $u \in M$ y $v \in N$, es única.

   Veamos ahora la linealidad. Sean $x = u_1 + v_1$ e $y = u_2 + v_2$, donde $u_i \in M$, $v_i \in N$ $(i = 1,2)$, y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Entonces,

$$\alpha x + \beta y = (\alpha u_1 + \beta u_2) + (\alpha v_1 + \beta v_2),$$

   donde, por ser M y N subespacios, se tiene que $\alpha u_1 + \beta u_2 \in M$ y $\alpha v_1 + \beta v_2 \in N$. La unicidad de la descomposición permite concluir que

$$P(\alpha x + \beta y) = \alpha u_1 + \beta u_2 = \alpha Px + \beta Py.$$

   Dado que X es completo y M es cerrado en X, M también es completo, y la aplicación $P : X \to M$ es lineal entre espacios de Banach. Si probamos que su grafo es cerrado, el teorema del grafo cerrado garantizará que P es continua. Sean

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ de modo que $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X$ y $\lim_{n\to\infty} Px_n = u \in M$. Poniendo $x_n = u_n + v_n$, con $u_n \in M$ y $v_n \in N$ $(n \in \mathbb{N})$, al ser N cerrado encontramos que

$$v_n = x_n - u_n = x_n - Px_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x - u = v \in N.$$

La descomposición de $x \in X = M \oplus N$ es entonces $x = u + v$, de modo que $Px = u$ y el grafo de P es, efectivamente, cerrado.

Conviene advertir que el grafo de P no es $X \times M$, aunque P sea sobreyectiva: el grafo de P contiene, para cada $x \in X$, un único elemento de la forma (x,u) con $u \in M$, precisamente el par (x,Px). □

4. Sean a, b números reales positivos, y sea x un vector del espacio normado X tal que para cada $f \in X'$ con $\|f\| \leq b$, se tiene que $|f(x)| \leq a$. Probar que $\|x\| \leq a/b$. [*Sugerencia:* Usar alguna consecuencia del teorema de Hahn-Banach.]

   Resolución. Se sabe que

$$\|x\| = \sup\left\{|f(x)| : f \in X',\ \|f\| \leq 1\right\}.$$

   Si $f \in X'$ y $\|f\| \leq 1$, el funcional bf verifica la hipótesis del enunciado, por lo que ha de ser $|(bf)(x)| \leq a$, es decir, $|f(x)| \leq a/b$. De la expresión anterior para $\|x\|$ se deduce que $\|x\| \leq a/b$. □