Autoevaluación final 2: soluciones

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

1. En el espacio $X = C[-1,1]$ real, provisto de la norma

$$\|x\|_2 = \left\{ \int_{-1}^{1} |x(t)|^2 \, dt \right\}^{1/2} \qquad (x \in X),$$

se considera el conjunto

$$M = \{x \in X : x(t) = 0 \ (t \geq 0)\}.$$

a) Probar que M es un subespacio de $(X, \|\cdot\|_2)$. ¿Es M cerrado?

b) Usar la ley del paralelogramo para demostrar que la norma $\|\cdot\|_2$ proviene de un producto escalar, y la identidad de polarización para determinarlo.

c) Describir $M^\perp$ respecto a este producto escalar.

d) Justificar que $M^\perp$ es un subespacio cerrado de X.

e) Verificar mediante un contraejemplo que no todo $x \in X$ admite una única representación de la forma $x = u + v$, con $u \in M$ y $v \in M^\perp$.

f) Explicar por qué el hecho de que $X \neq M \oplus M^\perp$ no contradice el teorema de la proyección ortogonal.

g) ¿Se puede afirmar que $X = M^\perp \oplus M^{\perp\perp}$?

Resolución.

a) Sean $x, y \in M$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Entonces

$$(\lambda x + \mu y)(t) = \lambda x(t) + \mu y(t) = 0 \quad (t \geq 0),$$

así que $\lambda x + \mu y \in M$.

Por otra parte, supongamos que $x \in \overline{M}$, donde $\overline{M}$ es la clausura de M en X. Existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset M$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ en media cuadrática; luego, alguna subsucesión de $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ converge a x c.p.t. (casi por todo) $t \in [-1,1]$. Sigue que $x(t) = 0$ c.p.t. $t \geq 0$. Como x es continua, necesariamente $x(t) = 0$ $(t \geq 0)$, probando que $x \in M$ y, con ello, que M es cerrado.

b) Por el teorema de Von Neumann-Jordan, $\|\cdot\|_2$ proviene de un producto escalar si, y sólo si, $\|\cdot\|_2$ satisface la ley del paralelogramo. Comprobemos que, efectivamente, la satisface:

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \int_{-1}^{1} |x(t)+y(t)|^2 \, dt + \int_{-1}^{1} |x(t)-y(t)|^2 \, dt \\
&= \int_{-1}^{1} [x^2(t) + 2x(t)y(t) + y^2(t)] \, dt + \int_{-1}^{1} [x^2(t) - 2x(t)y(t) + y^2(t)] \, dt \\
&= 2\int_{-1}^{1} x^2(t) \, dt + 2\int_{-1}^{1} y^2(t) \, dt = 2\|x\|_2^2 + 2\|y\|_2^2.
\end{aligned}$$

El producto escalar vendrá dado por la identidad de polarización:

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle &= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\int_{-1}^{1}[x^2(t)+2x(t)y(t)+y^2(t)]\,dt-\int_{-1}^{1}[x^2(t)-2x(t)y(t)+y^2(t)]\,dt\right)\\ &= \frac{1}{4}4\int_{-1}^{1}x(t)y(t)\,dt=\int_{-1}^{1}x(t)y(t)\,dt.\end{aligned}$$

c) Se tiene que

$$M^{\perp}=\{y\in X:\langle y,x\rangle=0\ (x\in M)\}=\{y\in X:y(t)=0\ (t\leq 0)\}.$$

En efecto, sea $y\in M^{\perp}$ y consideremos las funciones de M dadas por

$$x_n(t)=\begin{cases} y(t), & t<-\dfrac{1}{n}\\ \text{lineal}, & -\dfrac{1}{n}\leq t<0\\ 0, & t\geq 0\end{cases}\qquad (n\in\mathbb{N}).$$

El límite puntual de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es la función

$$x(t)=\begin{cases} y(t), & t<0\\ 0, & t\geq 0\end{cases}$$

y se verifica que $|x_n(t)|\leq|y(t)|$ $(-1\leq t\leq 1)$, con $|y|\in L^1[-1,1]$. Por convergencia dominada y la continuidad de y,

$$0=\langle y,x_n\rangle=\int_{-1}^{1}y(t)x_n(t)\,dt\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\int_{-1}^{0}y^2(t)\,dt$$

implica $y=0$ $(t\leq 0)$.

d) Como

$$M^{\perp}=\bigcap_{x\in M}\{y:\langle y,x\rangle=0\}$$

es la intersección de los núcleos de los funcionales lineales continuos asociados a cada $x\in M$ en virtud del teorema de Fréchet-Riesz, que son subespacios cerrados, resulta que $M^{\perp}$ es un subespacio cerrado.

e) No todo $x\in X$ admite una única representación de la forma $x=u+v$, con $u\in M$, $v\in M^{\perp}$. En efecto, nótese que cualquier función de esta forma ha de satisfacer necesariamente que $x(0)=0$, porque $u(0)=v(0)=0$. Encontramos así que, por ejemplo, la función idénticamente 1 está en X, pero no puede ser representada de esta manera.

f) Para la validez del teorema de la proyección ortogonal se requiere que X sea un espacio de Hilbert, y no lo es. De hecho, X es denso y no cerrado en $L^2[-1,1]$.

g) No. Un argumento similar al empleado anteriormente prueba que $M^{\perp\perp} = M$, y ya hemos visto que $X \neq M^{\perp} \oplus M$.

□

2. Sobre el espacio $C[0,1]$, provisto de la norma del supremo, se considera el operador $T : C[0,1] \to C[0,1]$ definido por $(Tx)(t) = t^2 x(0)$ $(0 \leq t \leq 1)$. Demostrar que T es lineal y acotado, y calcular su norma.

Resolución. Por simplicidad, escribiremos $X = C[0,1]$.

El operador T es lineal:

$$\begin{aligned} T(\lambda x + \mu y)(t) &= t^2(\lambda x + \mu y)(0) = \lambda t^2 x(0) + \mu t^2 y(0) \\ &= \lambda (Tx)(t) + \mu (Ty)(t) = (\lambda Tx + \mu Ty)(t) \quad (x, y \in X,\ \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ 0 \leq t \leq 1). \end{aligned}$$

Veamos que T es acotado. Se verifica:

$$\|Tx\|_\infty = \max_{0 \leq t \leq 1} |(Tx)(t)| = \max_{0 \leq t \leq 1} \left| t^2 x(0) \right| \leq \|x\|_\infty \quad (x \in X).$$

Por tanto, T es acotado, con norma $\|T\| \leq 1$. Como esta norma se alcanza en la función $x(t) = 1$ $(0 \leq t \leq 1)$, se concluye que $\|T\| = 1$. □

3. Sea $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de funcionales lineales sobre un espacio de Banach X tales que, para cada $x \in X$, la sucesión $\Phi x = \{\phi_n x\}_{n=1}^\infty$ está en el espacio de Banach ℓ^1. Se consideran también las sucesiones $\Phi_N x = \{\phi_n x\}_{n=1}^N$ $(N \in \mathbb{N})$. De esta manera, las aplicaciones lineales $x \mapsto \Phi x$ y $x \mapsto \Phi_N x$ $(N \in \mathbb{N})$ están bien definidas de X en ℓ^1. Probar que Φ es continua si, y sólo si, todas las ϕ_n $(n \in \mathbb{N})$ son continuas, demostrando para ello las siguientes afirmaciones:

   a) Si Φ es continua, también lo es ϕ_n $(n \in \mathbb{N})$.

   b) Se verifica que $\lim_{N \to \infty} \Phi_N x = \Phi x$ $(x \in X)$.

   c) Si cada ϕ_n $(n \in \mathbb{N})$ es continua entonces también lo es cada Φ_N, con norma

$$\|\Phi_N\| \leq \sum_{n=1}^N \|\phi_n\| \quad (N \in \mathbb{N}),$$

   y combinando b) con el teorema de clausura de Banach-Steinhaus se concluye que Φ es continua.

   Estimar la norma de Φ en términos de las de ϕ_n $(n \in \mathbb{N})$.

   Resolución.

a) Supongamos que la aplicación lineal Φ es continua: existe $C > 0$ tal que

$$|\phi_n x| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\phi_k x| = \|\Phi x\|_1 \leq C\|x\| \quad (x \in X,\, n \in \mathbb{N}).$$

Luego, cada ϕ_n $(n \in \mathbb{N})$ es continua.

b) En efecto, claramente:

$$\|\Phi_N x - \Phi x\|_1 = \sum_{n=N+1}^{\infty} |\phi_n x| \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad (x \in X).$$

c) Fijado $N \in \mathbb{N}$, se cumple:

$$\|\Phi_N x\|_1 = \sum_{n=1}^{N} |\phi_n x| \leq \sum_{n=1}^{N} \|\phi_n\|\,\|x\| \quad (x \in X).$$

Por tanto, Φ_N es continua, con norma $\|\Phi_N\| \leq \sum_{n=1}^{N} \|\phi_n\|$. Combinando este resultado con b) y con el teorema de clausura de Banach-Steinhaus se concluye que Φ es continua, con norma

$$\|\Phi\| \leq \liminf_{N\to\infty} \|\Phi_N\| \leq \liminf_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \|\phi_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|\phi_n\|.$$

$\square$

4. Sobre el espacio vectorial $X = \ell^1$ de las sucesiones de escalares absolutamente convergentes se consideran las normas

$$\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|, \quad \|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x(n)| \qquad (x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \in X).$$

Es bien sabido que $(X, \|\cdot\|_1)$ es un espacio de Banach. Demostrar los enunciados siguientes:

a) El funcional $\|\cdot\|_\infty$ es efectivamente una norma sobre X.

b) Se tiene que $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1$ $(x \in X)$. Luego, la aplicación identidad es un operador continuo de $(X, \|\cdot\|_1)$ en $(X, \|\cdot\|_\infty)$.

c) Las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ no son equivalentes, por lo que, en virtud del teorema de la aplicación abierta, el espacio $(X, \|\cdot\|_\infty)$ no es completo.

d) La aplicación identidad de $(X, \|\cdot\|_\infty)$ en $(X, \|\cdot\|_1)$ es un operador lineal con grafo cerrado e inversa continua. Sin embargo, ella misma no es es continua.

e) El resultado del apartado d) no contradice el teorema del grafo cerrado.

Resolución.

a) En virtud de la condición necesaria para la convergencia de series (si una serie converge, su término general tiende a cero), y del hecho de que toda sucesión convergente está acotada, se cumple que $X \subset \ell^\infty$. Como $\|\cdot\|_\infty$ es una norma sobre ℓ^∞, también lo es sobre X.

b) Para cada $x \in X$ se satisface que

$$|x(N)| \leq \sum_{n=1}^{N} |x(n)| \quad (N \in \mathbb{N}).$$

Por tanto,

$$\|x\|_\infty = \sup_{N\in\mathbb{N}} |x(N)| \leq \sup_{N\in\mathbb{N}} \sum_{n=1}^{N} |x(n)| = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} |x(n)| = \|x\|_1 \quad (N \in \mathbb{N}).$$

c) Si existiese $C > 0$ tal que $\|x\|_1 \leq C\|x\|_\infty$ $(x \in X)$, para $x_n = \sum_{k=1}^{n} e_k/k$ $(n \in \mathbb{N})$ resultaría la contradicción

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \|x_n\|_1 \leq C\|x_n\|_\infty = C \quad (n \in \mathbb{N}),$$

la cual prueba que las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ no son equivalentes. Como consecuencia del teorema de la aplicación abierta, se sabe que si dos normas comparables dotan a un mismo espacio vectorial de estructura de espacio de Banach, entonces ambas normas son equivalentes. Se desprende de b) que el espacio $(X, \|\cdot\|_\infty)$ no puede ser completo.

d) La identidad $\imath$ de $(X, \|\cdot\|_\infty)$ en $(X, \|\cdot\|_1)$ es, claramente, un operador lineal, y b) muestra que su inversa es continua de $(X, \|\cdot\|_1)$ en $(X, \|\cdot\|_\infty)$. Además, $\imath$ tiene grafo cerrado: si $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ es tal que $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_\infty = 0$ y $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y\|_1 = 0$ entonces, por b), $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y\|_\infty = 0$, y de la unicidad del límite se concluye que $x = y$. Sin embargo, la primera parte de c) impide que $\imath$ sea continua.

e) El resultado en d) no contradice el teorema del grafo cerrado debido a la segunda parte de c), es decir, al hecho de que $(X, \|\cdot\|_\infty)$ no es completo.

□

5. En $\mathbb{R}^2$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$ se considera el subespacio

$$M = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 0\right\},$$

y se define $g : M \to \mathbb{R}$ por $g(x_1, x_2) = x_2$ $((x_1, x_2) \in M)$.

a) Sin hacer ningún cálculo, justificar que el funcional lineal g es continuo. Luego, calcular la norma de g.

b) Enunciar el teorema de Hahn-Banach de extensión continua.

c) Llamaremos extensión de Hahn-Banach de g a todo funcional lineal sobre $\mathbb{R}^2$ que satisfaga la tesis del teorema de extensión continua respecto a g. Decidir cuál de las siguientes afirmaciones es cierta, justificando la respuesta.

i) El funcional g admite una única extensión de Hahn-Banach.

ii) Todo funcional lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que satisfaga $f(-1, 1) = 1$ es una extensión de Hahn-Banach de g. [*Sugerencia:* Para cada $t \in \mathbb{R}$, evaluar el funcional $F_t(x_1, x_2) = -x_1 + t(x_1 + x_2)$ $((x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2)$ en el punto $(1, 1)$.]

iii) Los funcionales $f_1 \neq f_2$ definidos sobre $\mathbb{R}^2$ por $f_1(x_1,x_2) = x_2$ y $f_2(x_1,x_2) = -x_1$ son dos extensiones de Hahn-Banach de g.

Resolución.

a) El funcional lineal g es continuo porque toda aplicación lineal entre espacios de dimensión finita es continua. Para calcular su norma, escribimos

$$|g(x_1,x_2)| = |x_2| \leq \max\{x_1,x_2\} = \|(x_1,x_2)\|_\infty.$$

Luego, $\|g\| \leq 1$. Particularizando $(x_1,x_2) = (0,1)$ encontramos que

$$|g(0,1)| = 1 = \|(0,1)\|_\infty,$$

así que $\|g\| = 1$.

b) *Teorema de Hahn-Banach de extensión continua.* Sean X un espacio normado, M un subespacio de X y $g \in M'$. Entonces existe $f \in X'$ que extiende a g, tal que $\|f\| = \|g\|$.

c) Se probará que el único enunciado cierto es iii).

i) Que esta afirmación es falsa quedará de manifiesto al demostrar la veracidad de iii).

ii) Para cada $t \in \mathbb{R}$ se define el funcional lineal $F_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por $F_t(x_1,x_2) = -x_1 + t(x_1+x_2)$ $((x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2)$. Como $F_t(-1,1) = 1$, si ii) fuese cierta entonces F_t sería, para cada $t \in \mathbb{R}$, una extensión de Hahn-Banach de g, y por definición de una tal extensión deberíamos tener $\|F_t\| = \|g\| = 1$ $(t \in \mathbb{R})$. Sin embargo, puesto que $(1,1)$ es un vector unitario, necesariamente

$$1 = \|g\| = \|F_t\| \geq |F_t(1,1)| \geq 2t - 1 \quad (t \in \mathbb{R}),$$

una contradicción.

iii) Cualquier extensión f de g queda unívocamente determinada por su valor en $(1,1)$. En efecto, para $x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ podemos escribir

$$\begin{aligned}
f(x_1,x_2) &= f\left(\frac{x_1+x_2}{2} + \frac{x_1-x_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2} - \frac{x_1-x_2}{2}\right) \\
&= f\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2}\right) + f\left(\frac{x_1-x_2}{2}, -\frac{x_1-x_2}{2}\right) \\
&= \frac{x_1+x_2}{2} f(1,1) + g\left(\frac{x_1-x_2}{2}, -\frac{x_1-x_2}{2}\right) \\
&= \frac{x_1+x_2}{2} f(1,1) - \frac{x_1-x_2}{2} \\
&= \left[\frac{1}{2} f(1,1) - \frac{1}{2}\right] x_1 + \left[\frac{1}{2} f(1,1) + \frac{1}{2}\right] x_2 \\
&= \frac{1}{2}[f(1,1)-1]x_1 + \frac{1}{2}[f(1,1)+1]x_2.
\end{aligned}$$

Sigue que

$$\begin{aligned}|f(x_1,x_2)| &\leq \frac{1}{2}|f(1,1)-1|\,|x_1| + \frac{1}{2}|f(1,1)+1|\,|x_2| \\ &\leq \left(\frac{1}{2}|f(1,1)-1| + \frac{1}{2}|f(1,1)+1|\right)\|x\|_\infty \quad \left((x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\right).\end{aligned}$$

Además, tomando $x_1 = \text{signo}[f(1,1)-1]$ y $x_2 = \text{signo}[f(1,1)+1]$ encontramos que el vector (x_1,x_2) es unitario y satisface

$$|f(x_1,x_2)| = \frac{1}{2}|f(1,1)-1| + \frac{1}{2}|f(1,1)+1|.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\|f\| &= \frac{1}{2}|f(1,1)-1| + \frac{1}{2}|f(1,1)+1| \\ &\geq \frac{1}{2}|f(1,1)-1-f(1,1)-1| \\ &= 1,\end{aligned}$$

con igualdad si, y sólo si, $1-f(1,1)$ y $f(1,1)+1$ tienen el mismo signo, es decir, si, y sólo si, $|f(1,1)|\leq 1$. Se concluye que todas y las únicas extensiones de Hahn-Banach de g son de la forma

$$g_\alpha(x) = \frac{x_1}{2}(\alpha-1) + \frac{x_2}{2}(\alpha+1) \quad (\alpha\in[-1,1]).$$

En particular, vale iii), ya que $f_1 = g_1$ y $f_2 = g_{-1}$.

□

6. Sea X un espacio normado separable.

   a) Demostrar que la topología débil* de la bola unidad cerrada de X' es metrizable.

   b) Probar que la bola unidad cerrada de X' es débilmente* secuencialmente compacta; es decir, toda sucesión $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset X'$ con $\|f_n\|\leq 1$ $(n\in\mathbb{N})$ admite una subsucesión $\{f_{n_i}\}_{i=1}^\infty$ que converge débilmente* a algún $f\in X'$.

   Supongamos ahora que X es, además, reflexivo.

   c) Deducir que la bola unidad cerrada de X' es débilmente secuencialmente compacta.

   d) Demostrar que todo operador lineal acotado $T : X' \to \ell^1$ es compacto. [*Sugerencia:* ℓ^1 tiene la propiedad de Schur: una sucesión de elementos de ℓ^1 converge débilmente si, y sólo si, converge fuertemente.]

   e) Concluir que todo $T\in\mathscr{B}(X,\ell^1)$ es compacto. En particular, si H es un espacio de Hilbert separable, cualquier $T\in\mathscr{B}(H,\ell^1)$ es compacto.

Resolución.

a) Puesto que X es separable, su bola unidad cerrada B_X también lo es: existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B_X$, densa en B_X. Sobre la bola unidad cerrada $B_{X'}$ de X' definimos la métrica

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\langle f-g, x_n\rangle|}{2^n} \quad (f,g \in B_{X'}).$$

Se comprueba rutinariamente que d está bien definida y es, efectivamente, una métrica. Necesitamos demostrar que $\tau = \sigma$, donde τ denota la topología inducida por d y σ es la topología débil* de $B_{X'}$. Ahora bien, por el teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki, σ es compacta; además, τ es Hausdorff; y toda aplicación biyectiva y continua de un compacto en un Hausdorff es un homeomorfismo. Así pues, basta demostrar que la identidad es continua de $(B_{X'}, \sigma)$ en $(B_{X'}, \tau)$. A tal fin, fijemos $f_0 \in B_{X'}$ y $\varepsilon > 0$, consideremos la bola $V = \{f \in B_{X'} : d(f, f_0) < \varepsilon\}$, y elijamos $k \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-k} < \varepsilon/2$. Entonces

$$U = \left\{ f \in B_{X'} : |\langle f - f_0, x_j\rangle| < \frac{\varepsilon}{2} \; (1 \le j \le k) \right\}$$

es un σ-entorno de f_0 en $B_{X'}$, que satisface

$$\begin{aligned} d(f, f_0) &= \sum_{j=1}^{k} \frac{|\langle f-f_0, x_j\rangle|}{2^j} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{|\langle f-f_0, x_n\rangle|}{2^n} \le \frac{\varepsilon}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} + 2 \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2^k} < \varepsilon \quad (f \in U). \end{aligned}$$

Luego, $U \subset V$, y la arbitrariedad de V prueba la continuidad deseada.

No es difícil dar una demostración directa de que la identidad de $(B_{X'}, \tau)$ en $(B_{X'}, \sigma)$ también es continua. En efecto, sea ahora

$$U = \left\{ f \in B_{X'} : |\langle f - f_0, z_j\rangle| < \varepsilon \; (1 \le j \le k) \right\},$$

con $\varepsilon > 0$ y $z_j \in X$ $(1 \le j \le k)$, un entorno débil* de $f_0 \in B_{X'}$, y pongamos $M = \max\left\{\|z_j\| : 1 \le j \le k\right\}$. Dado $\delta > 0$, existen enteros n_j tales que $\left\|z_j/M - x_{n_j}\right\| < \delta$, y existe $r > 0$ tal que $2^{n_j} M r < \varepsilon/2$ $(1 \le j \le k)$. Si $d(f, f_0) < r$, es decir, si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\langle f - f_0, x_n\rangle|}{2^n} < r,$$

entonces, para cada $1 \le j \le k$, es $|\langle f - f_0, x_{n_j}\rangle| < 2^{n_j} r$ y, por tanto,

$$\begin{aligned} |\langle f - f_0, z_j\rangle| &= M \left| \left\langle f - f_0, \frac{z_j}{M} \right\rangle \right| \le M \left| \left\langle f - f_0, \frac{z_j}{M} - x_{n_j} \right\rangle \right| + M |\langle f - f_0, x_{n_j}\rangle| \\ &< M(2\delta + 2^{n_j} r) < 2M\delta + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

En consecuencia, para $\delta > 0$ suficientemente pequeño encontramos que $f \in U$.

b) Por el teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki, la bola unidad cerrada $B_{X'}$ de X' es débilmente* compacta. Puesto que X es separable, a) entraña que la topología débil* de $B_{X'}$ es metrizable. Finalmente, como $B_{X'}$ es débilmente* compacta y metrizable, también es débilmente* secuencialmente compacta.

c) En el dual de un espacio reflexivo, las topologías débil y débil* coinciden; basta aplicar b).

d) Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en la bola unidad cerrada de X'; necesitamos probar que la sucesión $\{Tf_n\}_{n=1}^{\infty}$ contiene una subsucesión fuertemente (equivalentemente, débilmente) convergente en ℓ^1. Por c), $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ admite una subsucesión $\{f_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ que converge débilmente en X'. Como $T \in \mathscr{B}(X', \ell^1)$, T también es continuo cuando sobre X' y ℓ^1 se consideran las respectivas topologías débiles. Se concluye que $\{Tf_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ converge débilmente en ℓ^1, como se pretendía.

e) Como el dual de un espacio de Banach reflexivo y separable también es reflexivo y separable, aplicando d) y la reflexividad de X encontramos que todo $T \in \mathscr{B}(X'', \ell^1) = \mathscr{B}(X, \ell^1)$ es compacto. Los espacios de Hilbert son reflexivos.

$\square$