Espacios de Banach: teoremas fundamentales

ISABEL MARRERO
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
imarrero@ull.es

Índice

1 Introducción

Este tema presenta una sucinta introducción a la teoría de espacios de Banach. Como sabemos, un *espacio de Banach* es un espacio vectorial provisto de una norma (lo que permite medir distancias), que como espacio métrico es completo.

En el análisis matemático, la validez de muchos teoremas importantes depende de la completitud de los sistemas que intervienen. Esto explica la insuficiencia del sistema de los números racionales y de la integral de Riemann (por mencionar sólo dos de los ejemplos más conocidos) y el éxito logrado por sus sustitutos, el sistema de los números reales y la integral de Lebesgue.

La herramienta básica en este ámbito es el teorema de categoría de Baire relativo a espacios métricos completos. Del teorema de Baire se derivan tres de los cuatro pilares básicos del análisis funcional: el principio de acotación uniforme, el teorema de la aplicación abierta y el teorema del grafo cerrado, los cuales desarrollaremos en este tema. El cuarto pilar, a saber, el teorema de Hahn-Banach, es independiente del teorema de Baire y será tratado en el tema siguiente.

A continuación, tras exponer las primeras propiedades de los espacios normados y de Banach y antes de centrarnos en establecer los tres resultados fundamentales en cuestión, estudiaremos el teorema de categoría de Baire e ilustraremos sus variadas aplicaciones con algunos ejemplos.

2 Espacios normados

Recordemos la siguiente:

Definición 2.1 *Un* espacio normado *es un par* $(X, \|\cdot\|)$ *formado por un espacio vectorial* X *sobre un cuerpo escalar* $\mathbb{K}$ *(*$\mathbb{R}$ *ó* $\mathbb{C}$*) y una aplicación* $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$*, denominada* norma*, con las siguientes propiedades:*

(i) $\|x\| \geq 0$*;* $\|x\| = 0$ *si, y sólo si,* $x = 0$ $(x \in X)$*;*

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ $(\lambda \in \mathbb{K},\ x \in X)$*;*

(iii) *(desigualdad triangular)* $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $(x, y \in X)$*.*

Si $\|x\| = 0$ *no implica* $x = 0$*, la aplicación* $\|\cdot\|$ *se llama* seminorma*.*

Observación 2.2 (i) *Cualquier espacio normado* $(X, \|\cdot\|)$ *da lugar a un espacio métrico* (X, d)*, donde*

$$d(x,y) = \|x-y\| \quad (x, y \in X). \tag{1}$$

Así, todas las nociones relativas a espacios métricos están definidas también para los espacios normados. En particular, los conjuntos

$$U(0,1) = \{x \in X : \|x\| < 1\}, \qquad B(0,1) = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

son, respectivamente, las bolas unidad abierta y cerrada de X*.*

(*ii*) *No todo espacio métrico proviene de un espacio normado. Por ejemplo, la* métrica discreta *se define en* $\mathbb{R}$ *mediante*

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases} \qquad (x,y \in \mathbb{R}).$$

Esta métrica no proviene de una norma según (1)*, pues la existencia de una tal norma* $\|\cdot\|$ *conduciría a la contradicción*

$$1 = d(2x,0) = \|2x\| = 2\|x\| = 2\,d(x,0) = 2 \qquad (x \neq 0).$$

(*iii*) *La distancia inducida por una norma es invariante por traslaciones y positivamente homogénea de grado 1:*

$$d(x+z,y+z) = d(x,y), \quad d(\lambda x,\lambda y) = |\lambda|\,d(x,y) \qquad (x,y,z \in X,\ \lambda \in \mathbb{K}).$$

Recíprocamente, es obvio que toda métrica sobre un espacio vectorial X *con las dos propiedades anteriores genera una norma en* X*, definida por* $\|x\| = d(x,0)$ $(x \in X)$*.*

Definición 2.3 *Sea* X *un espacio vectorial normado, en el que se induce la métrica* (1)*. Si* (X,d) *es completo,* X *se dice un* espacio de Banach*.*

Ejemplo 2.4 (*i*) *El cuerpo escalar* $\mathbb{K}$*, con la norma del valor absoluto o módulo, es un espacio de Banach.*

(*ii*) *Fijado* $n \in \mathbb{N}$*, el espacio* $\mathbb{K}^n$*, con cada una de las normas*

$$\|x\|_p = \left\{ \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right\}^{1/p} \qquad (x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{K}^n,\ 1 \leq p < \infty),$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad (x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{K}^n)$$

es de Banach.

(*iii*) *Para* $1 \leq p < \infty$*, el espacio de las sucesiones de escalares con potencia p-ésima absolutamente sumable,*

$$\ell^p = \left\{ x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} : x(n) \in \mathbb{K}\ (n \in \mathbb{N}),\ \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty \right\},$$

provisto de la norma

$$\|x\|_p = \left\{ \sum_{n-1}^{\infty} |x(n)|^p \right\}^{1/p} \qquad (x \in \ell^p),$$

es un espacio de Banach.

(*iv*) *También lo es el espacio de las sucesiones acotadas de escalares,*

$$\ell^\infty = \{x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} : x(n) \in \mathbb{K}\ (n \in \mathbb{N}),\ x \text{ acotada}\},$$

con la norma del supremo

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x(n)| \quad (x \in \ell^\infty).$$

(v) *El espacio $C[a,b]$ de las funciones continuas en un intervalo real compacto $[a,b]$, con la norma del supremo*

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)| \quad (f \in C[a,b]),$$

es de Banach.

(vi) *No lo es el espacio $C[a,b]$ con la norma heredada de $L^2[a,b]$,*

$$\|f\|_2 = \left\{ \int_a^b |f(x)|^2\, dx \right\}^{1/2} \quad (f \in C[a,b]).$$

Sin embargo, este espacio puede ser completado (Teorema 3.6), y su compleción es precisamente el espacio $L^2[a,b]$.

(vii) *Si $B(A)$ es el espacio de las funciones, reales o complejas, que están acotadas en un conjunto A, la norma*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in A} |f(x)| \quad (f \in B(A))$$

también da lugar a un espacio de Banach.

3 Propiedades de los espacios normados

Reuniremos en esta sección algunas propiedades fundamentales de los espacios normados y de Banach.

Proposición 3.1 *Sea X un espacio vectorial normado. Se verifica:*

(i) $|\|x\| - \|y\|| \le \|x - y\|$ $(x, y \in X)$.

(ii) $U(x,r) = x + rU(0,1)$, $B(x,r) = x + rB(0,1)$ $(x \in X,\ r > 0)$.

Proposición 3.2 *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Si consideramos en $X \times X$ y $\mathbb{K} \times X$ las normas producto $|(x,y)| = \|x\| + \|y\|$ y $|(\lambda, x)| = |\lambda| + \|x\|$, respectivamente, entonces las operaciones algebraicas suma $+ : X \times X \to X$, definida por $(x,y) \mapsto x + y$, y producto por escalares $\cdot_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \times X \to X$, definida por $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$, son continuas, de modo que la topología inducida por la norma en X es vectorial. Además, la aplicación $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua respecto de esta topología.*

Demostración. Que la topología inducida por la norma es vectorial ya fue establecido en el Tema 1.

Para probar que la norma es uniformemente continua, dado $\varepsilon > 0$, debemos encontrar $\delta > 0$ tal que $x, y \in X$ con $\|x - y\| < \delta$ implique $|\|x\| - \|y\|| < \varepsilon$. Como $|\|x\| - \|y\|| \le \|x - y\|$ (Proposición 3.1), basta elegir $\delta = \varepsilon$. □

Corolario 3.3 *Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado, $x \in X$ y $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, las aplicaciones $T_z : X \to X$ (traslación de vector z) y $M_\lambda : X \to X$ (homotecia de razón λ), definidas, respectivamente, por $T_z x = x + z$ y $M_\lambda x = \lambda x$ $(x \in X)$, son homeomorfismos.*

Ejemplo 3.4 *En un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ se cumple que $\overline{U(x,r)} = B(x,r)$ $(x \in X,\ r > 0)$.*

Es claro que en cualquier espacio métrico se verifica $\overline{U(x,r)} \subset B(x,r)$; veamos que en un espacio normado también se tiene la inclusión opuesta, siendo suficiente para ello, en virtud de la Proposición 3.1 y el Corolario 3.3, probar que $B(0,1) \subset \overline{U(0,1)}$.

Sea, pues, $x \in B(0,1)$.

- *Si $\|x\| < 1$, entonces $x \in U(0,1) \subset \overline{U(0,1)}$.*
- *Si $\|x\| = 1$, sea $0 < \varepsilon < 1$ y consideremos*
$$z = \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) x.$$
Se tiene:
$$\|z\| = \left\| \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) x \right\| = \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \|x\| = 1 - \frac{\varepsilon}{2} < 1,$$
así que $z \in U(0,1)$. Por otra parte,
$$\|z - x\| = \left\| \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) x - x \right\| = \left\| \frac{\varepsilon}{2} x \right\| = \frac{\varepsilon}{2} \|x\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$
probando que $z \in U(x,\varepsilon)$. Luego, $U(x,\varepsilon) \cap U(0,1) \neq \emptyset$, y de la arbitrariedad de $\varepsilon > 0$ se concluye que $x \in \overline{U(0,1)}$.

Sin embargo, en espacios métricos cualesquiera, la clausura de una bola abierta no tiene por qué ser la bola cerrada correspondiente. Por ejemplo, en un conjunto X dotado de la métrica trivial, $U(x,1) = \{x\} = \overline{U(x,1)}$, mientras que $B(x,1) = X$. □

Proposición 3.5 *Un subespacio Y de un espacio de Banach X es completo si, y sólo si, Y es cerrado en X.*

Teorema 3.6 (Compleción de un espacio normado) *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Existen un espacio de Banach $\widetilde{X}$ y una isometría $T : X \to T(X) \subset \widetilde{X}$ tal que $T(X)$ es un subespacio denso de $\widetilde{X}$. El espacio $\widetilde{X}$ es único salvo isometrías.*

Teorema 3.7 *Sea X un espacio vectorial normado. Son equivalentes:*

(i) *X es un espacio de Banach.*

(ii) *Toda serie absolutamente convergente de elementos de X es convergente en X: si $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ y $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\| < \infty$, entonces $\sum_{n=1}^\infty x_n$ converge en X.*

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$ Sea $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$ $(n \in \mathbb{N})$ la n-ésima suma parcial de la serie $\sum_{n=1}^\infty x_k$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $m > n \geq N$ implica
$$\|s_m - s_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^m x_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^m \|x_k\| \leq \sum_{k=n+1}^\infty \|x_k\| < \varepsilon.$$

Esto significa que la sucesión $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en X y, al ser X completo, converge.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en X. Construimos una subsucesión $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ de esta sucesión haciendo $x_{n_0} = 0$ y eligiendo

$$\begin{aligned}
n_1 \in \mathbb{N} : &\quad \|x_{n_1} - x_m\| < \frac{1}{2} \quad (m > n_1) \\
n_2 > n_1 : &\quad \|x_{n_2} - x_m\| < \frac{1}{2^2} \quad (m > n_2) \\
&\vdots \\
n_k > n_{k-1} : &\quad \left\|x_{n_k} - x_m\right\| < \frac{1}{2^k} \quad (m > n_k).
\end{aligned}$$

Entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\|x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\right\| \leq \|x_{n_1}\| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty.$$

Como, por hipótesis, $\sum_{k=1}^{\infty} \left(x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\right)$ es convergente, sigue que

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \left(x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\right) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \left(x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\right) = \lim_{m\to\infty} x_{n_m},$$

probando que $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ converge. Por tanto, la sucesión de Cauchy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ también converge, y X es completo. $\square$

Observación 3.8 *En relación con el Teorema 3.7, es falso que toda serie convergente en un espacio de Banach también converja absolutamente. Recordemos que en el espacio de Banach más simple, $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, la serie alternada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$$

(cuya suma se obtiene evaluando el desarrollo de Maclaurin de la función $y = \ln(x+1)$ en $x = 1$) no es absolutamente convergente, ya que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Ejemplo 3.9 *Sea c_{00} el subespacio de ℓ^1 formado por las sucesiones eventualmente nulas, es decir, $x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \in c_{00}$ si existe $N = N(x) \in \mathbb{N}$ tal que $x(n) = 0$ $(n \geq N)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ pongamos $x_k = e_k/k^2 \in c_{00}$, donde $e_k = \{e_k(n)\}_{n=1}^{\infty}$, con*

$$e_k(n) = \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & n \neq k. \end{cases}$$

Entonces

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right\|_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

así que $\sum_{k=1}^{\infty} x_k \in \ell^1$. *Pero* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *no es eventualmente nula, aunque sus sumas parciales* $s_k = \sum_{i=1}^{k} x_i$ $(k \in \mathbb{N})$ *sí lo son. Por tanto,* $(c_{00}, \|\cdot\|_1)$ *no es completo, y tenemos un ejemplo de una serie en* $(c_{00}, \|\cdot\|_1)$ *que es absolutamente convergente pero no converge en este espacio.*

4 El teorema de la categoría de Baire

La completitud de ciertos espacios suele ser fundamental en muchos teoremas del análisis matemático. Como tendremos ocasión de comprobar inmediatamente, un instrumento muy útil en el contexto de espacios métricos es el llamado *teorema de la categoría*, al que dedicamos esta sección.

4.1 Categorías de Baire

Definición 4.1 *Sean* X *un espacio métrico y* $A \subset X$. *Diremos que:*

(i) *A es* diseminado *en X si su clausura carece de interior:* $\overset{\circ}{\overline{A}} = \emptyset$.

(ii) *A es de* primera categoría *en X si es unión numerable de conjuntos diseminados.*

(iii) *A es de* segunda categoría *en X si no es de primera categoría.*

Ejemplo 4.2 (i) *Si d es la métrica trivial, todo conjunto es abierto y cerrado a la vez; luego, el único diseminado es el vacío.*

(ii) *Un conjunto* $M \subset X$ *es diseminado en* X *si, y sólo si,* $X \setminus \overline{M}$ *es denso en* X. *Por tanto, si M es cerrado entonces M es diseminado si, y sólo si,* $X \setminus M$ *es denso en* X.

(iii) *Todo conjunto cerrado diseminado M es su propia frontera:* $\partial M = M \cap \overline{X \setminus M} = M \cap X = M$.

(iv) *El conjunto vacío es de primera categoría; por tanto, no puede ser de segunda categoría.*

(v) *Si los conjuntos* $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ *son de primera categoría, también lo es* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

(vi) *Todo subconjunto de un conjunto de primera categoría es de primera categoría.*

Lema 4.3 (Teorema de las intersecciones de Cantor) *Sean* (X,d) *un espacio métrico completo y* $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados no vacíos de X tales que* $\lim_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0$, *donde*

$$\delta(M) = \sup\{d(x,y) : x,y \in M\}$$

es el diámetro *de M. Entonces,* $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ *contiene exactamente un punto.*

Demostración. Sea $x_n \in F_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Puesto que $\lim_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0$, la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy. Al ser X completo, existe $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Fijado $N \in \mathbb{N}$, se tiene que $x_n \in F_N$ $(n \geq N)$. Como F_N es cerrado, $x \in F_N$; y como N es arbitrario, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Además, puesto que $\delta\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) \leq \delta(F_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ y $\lim_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0$, necesariamente $\delta\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = 0$, probando que

$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x\}$. □

Teorema 4.4 (Teorema de la categoría de Baire) *Sea X un espacio métrico completo. La intersección de cualquier colección numerable de abiertos densos en X es densa en X.*

Demostración. Sea $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de abiertos densos en X. Probaremos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es denso en X, es decir, que para cualquier otro abierto no vacío $G \subset X$, se tiene que $(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n) \cap G \neq \emptyset$.

Puesto que G_1 es un abierto denso en X, $G \cap G_1$ es un abierto no vacío que contendrá una bola cerrada B_1 de radio $r > 0$, digamos $r < 1/2$, con lo que el diámetro de B_1 será menor que 1. Así, B_1 es una bola cerrada de radio estrictamente positivo, que verifica:

$$B_1 \subset G \cap G_1, \quad \delta(B_1) < 1.$$

La correspondiente bola abierta tendrá intersección no vacía con el abierto denso G_2; luego, dicha intersección es un abierto no vacío que contendrá una bola cerrada B_2 de radio estrictamente positivo, que podemos tomar menor que $1/4$, con lo que B_2 tendrá diámetro menor que $1/2$:

$$B_2 \subset B_1 \cap G_2, \quad \delta(B_2) < \frac{1}{2}.$$

Por inducción, podemos construir una sucesión $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ de bolas cerradas en X, que verifican:

$$B_1 \subset G \cap G_1, \quad B_{n+1} \subset B_n \cap G_{n+1}, \quad \delta(B_n) < \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Apelamos ahora a la completitud de X. Ya que $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados de X con diámetros tendiendo a cero, el Lema 4.3 asegura que su intersección es un único punto: $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \{x\}$. Como $x \in B_1$, necesariamente $x \in G$ y $x \in G_1$. Además, para $n \in \mathbb{N}$ tenemos $x \in B_{n+1} \subset G_{n+1}$, luego $x \in (\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n) \cap G \neq \emptyset$, como se pretendía. □

La tesis del Teorema 4.4 admite las siguientes reformulaciones:

Proposición 4.5 *En un espacio métrico X son equivalentes los siguientes enunciados:*

(i) *Si $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de abiertos densos en X, entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es densa en X.*

(ii) *Si $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de subconjuntos cerrados de X tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ tiene interior, entonces algún F_n tiene interior.*

(iii) *Ningún conjunto de primera categoría tiene interior.*

(iv) *Todo conjunto de primera categoría tiene complementario denso.*

(v) *Todo abierto no vacío es de segunda categoría.*

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$ Suponiendo cierto (i), probaremos el contrarrecíproco de (ii). Sea $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos cerrados de X. Si ningún F_n tiene interior, entonces todos los abiertos $G_n = X \setminus F_n$ son densos $(n \in \mathbb{N})$. Sigue de (i) que $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es densa en X, y, por tanto,

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right)^{\circ} = \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus G_n)\right]^{\circ} = \left(X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\right)^{\circ} = X \setminus \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n} = \emptyset.$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Sea $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, con $\mathring{\overline{A}}_n = \emptyset$ $(n \in \mathbb{N})$. Entonces

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

donde cada $F_n = \overline{A}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ es cerrado y sin interior. En virtud de (ii), $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ tampoco tiene interior, impidiendo que A lo tenga.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Supongamos que A es de primera categoría, de modo que $\mathring{A} = \emptyset$. Entonces $\overline{X \setminus A} = X \setminus \mathring{A} = X$.

$(iv) \Rightarrow (v)$ Sea A un abierto de primera categoría. Por (iv), su complementario $X \setminus A$ es cerrado y denso: $X \setminus A = \overline{X \setminus A} = X$. Consecuentemente, $A = \emptyset$.

$(v) \Rightarrow (iii)$ Sea A un conjunto de primera categoría. Como $\mathring{A} \subset A$ resulta que $\mathring{A}$ es un abierto de primera categoría, y, por (v), debe ser vacío.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Sea $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de abiertos densos en X. Entonces cada $X \setminus G_n$ $(n \in \mathbb{N})$ es un subconjunto diseminado de X. Por (iii), $\bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus G_n) = X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ tiene interior vacío, y así

$$X \setminus \left(X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$$

es denso en X. □

Definición 4.6 *Se dice que un espacio métrico $X \neq \emptyset$ es un* espacio de Baire *o que tiene la* propiedad de Baire *si X satisface una cualquiera de las condiciones equivalentes de la Proposición 4.5.*

Corolario 4.7 (i) *Todo espacio de Baire es de segunda categoría.*

(ii) **(Forma débil del teorema de Baire)** *Todo espacio métrico completo no vacío es de Baire y, por lo tanto, de segunda categoría.*

Demostración. Teorema 4.4 y Proposición 4.5. □

Ejemplo 4.8 *De lo anterior se pueden extraer algunas consecuencias sencillas.*

(i) *En $\mathbb{R}$ con la métrica usual, $\mathbb{Q}$ es de primera categoría. En efecto, $\mathbb{Q} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{x_i\}$, con $\overline{\{x_i\}} = \{x_i\}$ y $\mathring{\overline{\{x_i\}}} = \emptyset$ $(i \in \mathbb{N})$.*

(*ii*) *Si A es de primera categoría y $C = A \cup B$ es de segunda, necesariamente B ha de ser de segunda. Por ejemplo, como $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ y $\mathbb{R}$ es de segunda categoría (Corolario 4.7), (i) obliga a que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ también sea de segunda.*

Observación 4.9 *En general, no es cierto que todo espacio métrico de segunda categoría es de Baire: dado cualquier espacio métrico completo Y, consideremos la unión disjunta $X = Y \sqcup \mathbb{Q}$, donde $\mathbb{Q}$ está provisto de su topología usual, heredada de $\mathbb{R}$. Este X es un espacio métrico de segunda categoría que no es de Baire.*

Corolario 4.10 *Un espacio normado es de Baire si, y sólo si, es de segunda categoría.*

Demostración. En virtud del Corolario 4.7, basta probar que todo espacio normado de segunda categoría es de Baire. Sea A un abierto no vacío del espacio normado X, que suponemos de segunda categoría; apelando a la Proposición 4.5, queremos ver que A es de segunda categoría. Dado $x \in A$, algún $r > 0$ es tal que $U(x,r) = x + rU(0,1) \subset A$. Como $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nU(0,1)$ y X es de segunda categoría, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $mU(0,1)$ es de segunda categoría. Entonces $U(x,r)$ es de segunda categoría (Corolario 3.3), obligando a que A también lo sea. □

Observación 4.11 *Existen espacios métricos no completos que son de segunda categoría. Por ejemplo, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ con la distancia usual, heredada de $\mathbb{R}$, no es completo –se trata de un subconjunto denso propio de $\mathbb{R}$, luego no puede ser cerrado en $\mathbb{R}$–, pero es de segunda categoría (Ejemplo 4.8). Se demuestra que las propiedades «completo» y «de segunda categoría» tampoco son equivalentes en espacios normados.*

4.2 Aplicaciones del teorema de la categoría

Pese a su enunciado sencillo y su breve demostración, el teorema de la categoría proporciona una herramienta muy potente para establecer teoremas de existencia en campos muy variados (entre ellos la topología, el cálculo, la teoría de números, el análisis funcional, el análisis armónico, las ecuaciones diferenciales o la teoría de probabilidades), relativos a objetos matemáticos que, por lo general, resultan difíciles de construir explícitamente.

El método de la categoría consiste, esencialmente, en lo siguiente. Supongamos que queremos probar la existencia de algún elemento satisfaciendo una cierta propiedad P. Se busca entonces un adecuado espacio métrico completo X donde enmarcar el problema y se aplica el teorema de la categoría para mostrar que el conjunto $\{x \in X : P(x)\}$ no es vacío. De hecho, el teorema de la categoría permite afirmar que este conjunto no sólo no es vacío, sino que es «topológicamente grande» en X; de manera que, en realidad, se establece la existencia de numerosos objetos que verifican la propiedad en cuestión.

Un ejemplo sencillo de la utilización del método de la categoría es la existencia de irracionales: como $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es de segunda categoría (Ejemplo 4.8), es «topológicamente grande» y, en particular, no vacío. Se dan otros ejemplos a continuación.

4.2.1 Conjuntos F_σ y G_δ

Definición 4.12 *Sea X un espacio métrico. Se dice que un conjunto $A \subset X$ es un F_σ si puede ser escrito como unión contable de conjuntos cerrados, y que es un G_δ si puede ser escrito como intersección contable de conjuntos abiertos.*

Claramente, un conjunto es un F_σ si, y sólo si, su complementario es un G_δ. Además, en un espacio métrico (aunque no en un espacio topológico arbitrario), todo cerrado es un G_δ: basta observar que si A es cerrado, entonces

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x : d(x,A) < 1/n\},$$

donde los conjuntos que se intersectan son abiertos. Por complementación, entonces, todo abierto es un F_σ.

Sea ahora $X = \mathbb{R}$. Los racionales $\mathbb{Q}$ son un F_σ, así que los irracionales $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ son un G_δ. ¿Qué se puede decir del recíproco? ¿Son los racionales (respectivamente, irracionales) un G_δ (respectivamente, un F_σ)?

El teorema de la categoría de Baire permite responder negativamente a la cuestión. Es sabido que $\mathbb{Q}$ es un F_σ. Si también lo fuera $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, entonces toda la recta real podría ser expresada como una unión contable de cerrados, cada uno enteramente contenido o bien en $\mathbb{Q}$, o bien en $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, por lo que ninguno de tales cerrados tendría interior. De esta manera, $\mathbb{R}$ sería de primera categoría, contraviniendo el Corolario 4.7. Hemos probado así la

Proposición 4.13 *$\mathbb{Q}$ no es un G_δ, ni $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ un F_σ.*

El resultado siguiente también puede ser útil:

Proposición 4.14 *Sea X un espacio métrico. Cualquier $A \subset X$ que sea un F_σ, o bien es de primera categoría, o bien tiene interior.*

Demostración. Por hipótesis, A puede ser escrito como unión contable de cerrados. Si todos ellos carecen de interior, entonces A es de primera categoría; si al menos uno tiene interior, entonces A también lo tiene. □

Observación 4.15 *En la Proposición 4.14 no se exige que X sea completo. Si X es completo, el Teorema 4.4 y la Proposición 4.5 muestran que los conjuntos de primera categoría son «pequeños»: tienen interior vacío (o, equivalentemente, complementario denso). Pero si X no es completo, un conjunto de primera categoría no es necesariamente «pequeño», y de hecho, podría ser todo X; piénsese, por ejemplo, en $X = \mathbb{Q}$ con la métrica heredada de $\mathbb{R}$. En particular, cuando X no es completo, las dos alternativas de la Proposición 4.14 no tienen por qué ser mutuamente excluyentes: un conjunto que no fuese un F_σ podría ser de primera categoría y tener interior.*

4.2.2 Conjuntos de continuidad y discontinuidad

Sobre $X = \mathbb{R}$ se considera la *función de Thomae* f, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1/q, & x = p/q \in \mathbb{Q} \text{ (irreducible)} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Es relativamente fácil ver que f es continua en los irracionales y discontinua en los racionales. En efecto, dado un racional irreducible $x = p/q$, existen irracionales y arbitrariamente próximos a x, pero $f(y) = 0$ no está próximo a $f(x) = 1/q$. Por otra parte, sean $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y $\varepsilon > 0$. Existe $q \in \mathbb{N}$ con $1/q < \varepsilon$. Consideremos los racionales de la forma p/q; como x es irracional, no puede ser uno de ellos. Puesto que los números p/q ($p \in \mathbb{Z}$) definen una partición de la recta real, alguno de estos números está a la mínima distancia de x. Sea $\delta > 0$ menor que la distancia de x al número más próximo de la forma p/q. Toda fracción irreducible que represente a un racional a distancia de x menor que δ tiene necesariamente un denominador mayor o igual que q, así que los valores que toma f en todos los números a distancia de x menor que δ quedan a distancia menor o igual que $1/q < \varepsilon$ de $f(x) = 0$, probando que f es continua en todo irracional x.

¿Existe alguna función con un comportamiento inverso, es decir, que sea continua en los racionales y discontinua en los irracionales? De nuevo, es posible responder negativamente a esta cuestión con el auxilio del teorema de categoría de Baire.

Para medir cuantitativamente la continuidad o discontinuidad de una función introduciremos el concepto de oscilación.

Definición 4.16 *Sea $f : X \to Y$ una aplicación entre dos espacios métricos X e Y. Dado $S \subset X$, definimos la* oscilación de f en S *como*

$$\omega_f(S) = \delta(f(S)) = \sup_{u,v \in S} d_Y(f(u), f(v)).$$

Para cada $x \in X$ se define entonces la oscilación de f en x *como*

$$\omega_f(x) = \inf_{\varepsilon > 0} \omega_f(U(x, \varepsilon)).$$

Nótese que tanto la oscilación de f en un conjunto como en un punto toman como valor un número real no negativo, ó $+\infty$.

Claramente, f es continua en x si, y sólo si, $\omega_f(x) = 0$. Cuando f es discontinua en x, $\omega_f(x)$ proporciona una medida cuantitativa del tamaño de la discontinuidad.

Si $\omega_f(x_0) < c$, con $c \in \mathbb{R}$, entonces $\omega_f(x) < c$ para todo x en un entorno suficientemente pequeño de x_0; luego, el conjunto $\{x : \omega_f(x) < c\}$ es abierto. Puesto que el conjunto C de los puntos de continuidad de f puede ser escrito como

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x : \omega_f(x) < 1/n\},$$

C resulta ser un G_δ. Queda así probado el siguiente:

Teorema 4.17 *Sea f cualquier función de un espacio métrico X en otro espacio métrico Y. El conjunto de puntos de continuidad de f es un G_δ, y el conjunto de sus puntos de discontinuidad, un F_σ.*

Combinando este resultado con el de la Proposición 4.13, se concluye que no existe ninguna función f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ (o en otro espacio métrico cualquiera) que sea continua en los racionales y discontinua en los irracionales. En la misma línea, se tiene también el siguiente corolario, según el cual el conjunto de los puntos de discontinuidad de una función es, o bien «pequeño» (de primera categoría), o bien «bastante grande» (contiene un abierto no vacío):

Corolario 4.18 *Sea f cualquier aplicación de un espacio métrico X en otro espacio métrico Y. O bien el conjunto de los puntos de discontinuidad de f es de primera categoría, o bien su interior no es vacío.*

Demostración. Sigue inmediatamente del Teorema 4.17 y la Proposición 4.14. □

Observación 4.19 (i) *La inexistencia de una función continua en los racionales y discontinua en los irracionales se puede deducir alternativamente del Corolario 4.18, sin más que advertir que los irracionales no son de primera categoría, ni tienen interior.*

(ii) *El Teorema 4.17 y el Corolario 4.18 se verifican aunque X no sea completo (cf. Observación 4.15).*

4.2.3 Funciones continuas no derivables en ningún punto

Puesto que la mayoría de las funciones reales continuas que se manejan en cálculo elemental dejan de ser derivables únicamente en un número finito de puntos de su dominio, puede causar sorpresa el hecho de que existan funciones continuas que no son derivables en ningún punto; el primer ejemplo de tales funciones fue construido por Weierstrass en el siglo XIX. El teorema de la categoría de Baire permite probar que la «mayoría» de las funciones continuas son de este tipo, es decir, que la clase de funciones que son derivables, al menos, una vez es «pequeño». Así, el teorema de Baire revela, por un método no constructivo, mucho más acerca de la naturaleza de las funciones continuas que la construcción de Weierstrass.

Teorema 4.20 *En el espacio de Banach $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$, el subconjunto D de las funciones derivables al menos una vez en algún punto de $[0,1]$ es de primera categoría.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $0 < h < 1/n$, definimos

$$\mathrm{E}_{n,h} = \left\{ f \in C[0,1] : \text{ existe } t \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] \text{ tal que } \left| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \right| \le n \right\}.$$

Comenzaremos probando que $E_{n,h}$ es cerrado. Sea f_0 un punto adherente a $E_{n,h}$ en el espacio $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$: dado $\varepsilon > 0$, existe $f \in E_{n,h}$ tal que $\|f_0 - f\|_\infty < \varepsilon$. Entonces, algún $t \in [0, 1 - 1/n]$ es tal que

$$\begin{aligned} \left| \frac{f_0(t+h) - f_0(t)}{h} \right| &\le \left| \frac{(f_0 - f)(t+h) - (f_0 - f)(t)}{h} \right| + \left| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \right| \\ &\le \frac{2\varepsilon}{h} + n, \end{aligned}$$

y, por la arbitrariedad de $\varepsilon > 0$,

$$\left| \frac{f_0(t+h) - f_0(t)}{h} \right| \le n.$$

Así pues, $f_0 \in E_{n,h}$.

Ahora, fijado $n \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$E_n = \bigcap \left\{ E_{n,h} : 0 < h < \frac{1}{n} \right\}$$

también es cerrado. Probaremos que E_n es diseminado en $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$, viendo que su complementario es denso en este espacio.

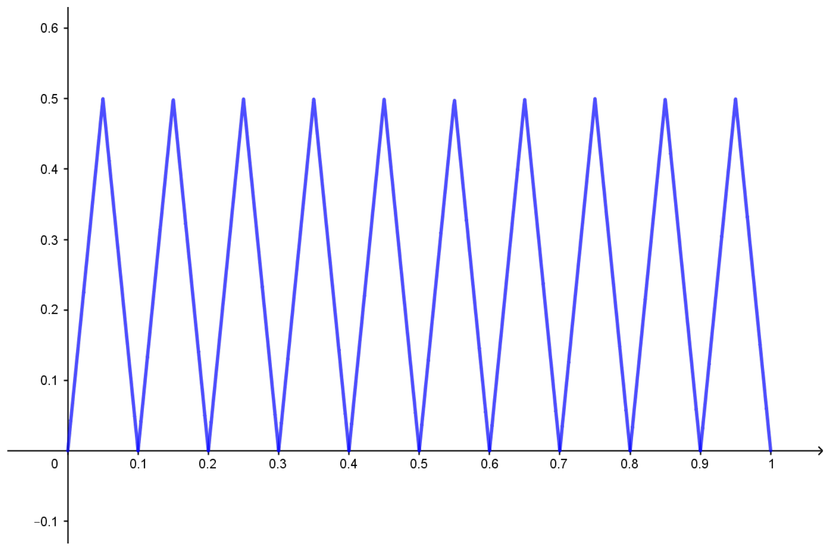

Figura 1. Gráfica de la función q para $m = 1$.

Apelando al teorema de aproximación de Weierstrass (los polinomios son uniformemente densos en $C[0,1]$), dados $f \in C[0,1]$ y $\varepsilon > 0$ encontramos un polinomio p tal que $\|f - p\|_\infty < \varepsilon$. Seguidamente, consideramos la función continua g, lineal a trozos, definida en $[0,1]$ como sigue:

$$q(t) = \begin{cases} 2 \cdot 5^m t, & 0 \le t \le \dfrac{1}{2 \cdot 10^m} \\ \dfrac{2}{2^m} - 2 \cdot 5^m t, & \dfrac{1}{2 \cdot 10^m} < t \le \dfrac{1}{10^m} \\ q\left(t - \dfrac{1}{10^m}\right), & \dfrac{1}{10^m} < t \le 1, \end{cases}$$

donde se elige $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande como para que $2^{-m} < \varepsilon$ y $2 \cdot 5^m > n + 2\|p'\|_\infty$. Entonces $\|q\|_\infty = 2^{-m} < \varepsilon$ y, para cada $t \in [0,1]$ y h suficientemente pequeño,

$$\left| \frac{q(t+h) - q(t)}{h} \right| = 2 \cdot 5^m > n + 2\|p'\|_\infty.$$

La función continua $g = p + q$ satisface:

$$\|f - g\|_\infty \le \|f - p\|_\infty + \|q\|_\infty < 2\varepsilon.$$

Pero, para todo $t \in [0,1)$ y h suficientemente pequeño,

$$\left| \frac{g(t+h) - g(t)}{h} \right| \ge \left| \frac{q(t+h) - q(t)}{h} \right| - \left| \frac{p(t+h) - p(t)}{h} \right| > n,$$

así que g no está en E_n. Se concluye que el complementario de E_n es denso en $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$, de modo que E_n es, efectivamente, diseminado. Puesto que $n \in \mathbb{N}$ es arbitrario, se sigue que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ es de primera categoría en $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$. Para completar la demostración basta tener en cuenta que $D \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$. $\square$

5 Principio de acotación uniforme y teorema de Banach-Steinhaus

En esta sección aplicaremos el teorema de la categoría de Baire para demostrar otro de los teoremas fundamentales del capítulo: el principio de acotación uniforme. Dicho principio afirma que toda familia de operadores lineales y acotados definida de un espacio de Banach en un espacio normado que esté puntualmente acotada, lo está uniformemente.

5.1 Acotación puntual y acotación uniforme

Definición 5.1 *Dados dos espacios normados X e Y, una familia $\{T_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de operadores lineales acotados de X en Y se dice* equicontinua *cuando* $\sup_{\alpha\in I}\|T_\alpha\|<\infty$.

Teorema 5.2 (Principio de acotación uniforme) *Sean X un espacio de Banach, Y un espacio normado, y $\{T_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una familia de operadores lineales acotados de X en Y. Si $\{\|T_\alpha x\|\}_{\alpha\in I}$ está acotada para todo $x\in X$, entonces la familia $\{T_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es equicontinua. En otras palabras, si dado $x\in X$ existe $M_x>0$ tal que $\|T_\alpha x\|\leq M_x$ $(\alpha\in I)$, entonces existe $M>0$ tal que $\|T_\alpha\|\leq M$ $(\alpha\in I)$.*

Demostración. Supongamos, en primer lugar, que I es numerable, es decir, que $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión. Sea

$$M_k=\{x\in X:\|T_nx\|\leq k\ (n\in\mathbb{N})\}\quad(k\in\mathbb{N}).$$

Cada M_k $(k\in\mathbb{N})$ es cerrado. En efecto, fijemos $k,n\in\mathbb{N}$. Si $x\in\overline{M}_k$, existe $\{x_i\}_{i=1}^\infty\subset M_k$ tal que $\lim_{i\to\infty}x_i=x$. Como T_n es continua, $\lim_{i\to\infty}T_nx_i=T_nx$, de donde $\lim_{i\to\infty}\|T_nx_i\|=\|T_nx\|$ (Proposición 3.2). Además, como $x_i\in M_k$, necesariamente $\|T_nx_i\|\leq k$ $(i\in\mathbb{N})$. Así pues, $\|T_nx\|\leq k$, de modo que $x\in M_k$.

Por construcción, $X=\bigcup_{k=1}^\infty M_k$. Como X es completo, el teorema de la categoría de Baire proporciona k_0 y x_0 tales que $B_0=B(x_0,r)\subset M_{k_0}$. Sea $x\in X\setminus\{0\}$, y definamos $z=x_0+\gamma x$, con $\gamma=r/2\|x\|$. Entonces $\|z-x_0\|=r/2<r$, de donde $z\in M_{k_0}$ y $\|T_nz\|\leq k_0$ $(n\in\mathbb{N})$. Además, $\|T_nx_0\|\leq k_0$ $(n\in\mathbb{N})$. De aquí, por la desigualdad triangular,

$$\|T_nx\|=\frac{1}{\gamma}\|T_n(z-x_0)\|\leq\frac{2k_0}{\gamma}=\frac{4k_0}{r}\|x\|\quad(n\in\mathbb{N}).$$

Esta desigualdad vale también para $x=0$ e implica que

$$\|T_n\|=\sup_{\|x\|\leq 1}\|T_nx\|\leq M\quad(n\in\mathbb{N}),$$

con $M=4k_0/r$.

Si I no es numerable, supongamos que $\sup_{\alpha\in I}\|T_\alpha\|=\infty$. Por definición de supremo, existe una sucesión $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ tal que $\|T_1\|>1$, $\|T_2\|>2,\ldots$. Aplicando el argumento anterior a la sucesión $\{T_n\}_{n=1}^\infty$resultaría la contradicción $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n\|<\infty$. $\square$

Es conveniente remarcar que la hipótesis sobre la categoría de X es esencial, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.3 *Sea c_{00} el espacio vectorial de las sucesiones $x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty}$ eventualmente nulas, con la norma del supremo*

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x(n)|.$$

Para $k \in \mathbb{N}$, definimos la aplicación lineal $T_k : c_{00} \to c_{00}$ mediante

$$T_k x = \sum_{n=1}^{k} n x(n) e_n \quad (x \in c_{00}).$$

Cada T_k $(k \in \mathbb{N})$ es continua, puesto que, si $\|x\|_\infty \leq 1$, tenemos

$$\|T_k x\|_\infty = \sup_{1\leq n\leq k} |n x(n)| \leq k\|x\|_\infty \leq k.$$

Dado $x \in c_{00}$, existe $N = N(x) \in \mathbb{N}$ tal que $x(n) = 0$ $(n \geq N)$. Por tanto, para $k \geq N$, $T_k x = \sum_{n=1}^{N} n x(n) e_n$, probando que $\{T_k x\}_{k=1}^{\infty}$ converge; en particular, $\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$ está puntualmente acotada.

Sin embargo, $\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$ no está uniformemente acotada, pues $\|e_k\|_\infty = 1$ y

$$\|T_k e_k\|_\infty = \left\| \sum_{n=1}^{k} n e_n \right\|_\infty = k,$$

así que $\|T_k\| = k$ $(k \in \mathbb{N})$.

Esto no contradice el teorema de Banach-Steinhaus, ya que c_{00} no es cerrado en ℓ^∞ y, por lo tanto, $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ no es completo. En efecto, la sucesión $\{z_k\}_{k=1}^{\infty} \subset c_{00}$ dada por

$$z_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{e_n}{n} \quad (k \in \mathbb{N})$$

es de Cauchy en ℓ^∞: para $q, p \in \mathbb{N}$, con $q > p$,

$$\|z_q - z_p\|_\infty = \left\| \sum_{n=p+1}^{q} \frac{e_n}{n} \right\|_\infty = \frac{1}{p+1} \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0;$$

pero su límite en ℓ^∞ es la sucesión $z = \{1/n\}_{n=1}^{\infty} \notin c_{00}$:

$$\|z_k - z\|_\infty = \frac{1}{k+1} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Como consecuencia del principio de acotación uniforme tenemos el siguiente:

Corolario 5.4 (Teorema de clausura de Banach-Steinhaus) *Sean X un espacio de Banach, Y un espacio normado, y $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ una familia de aplicaciones lineales acotadas de X en Y. Si $\{T_n x\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente para todo $x \in X$, entonces $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ es equicontinua. Además, si $\lim_{n\to\infty} T_n x = Tx$ $(x \in X)$, entonces T es lineal y acotada, con $\|T\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|$.*

Demostración. Por ser convergente, la sucesión $\{T_n x\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada $(x \in X)$. El principio de acotación uniforme garantiza entonces que $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ es equicontinua, y existe $M > 0$ tal que $\|T_n\| \leq M$ $(n \in \mathbb{N})$; en particular, la sucesión $\{\|T_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ tiene límite inferior. Claramente, T es lineal. Por último,

$$\|Tx\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \le \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|\, \|x\| \quad (x \in X),$$

así que $\|T\| \le \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|$, como se había afirmado. $\square$

Corolario 5.5 *Sea X un espacio de Banach, y sea $\{\Lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X'$ una sucesión para la que existe $\lim_{n\to\infty} \Lambda_n x = \Lambda x$ $(x \in X)$. Entonces $\Lambda \in X'$.*

Demostración. Es consecuencia directa del Corolario 5.4. $\square$

El Corolario 5.5 expresa que, en un espacio de Banach, la convergencia puntual de funcionales lineales continuos implica la continuidad de la función límite. Si X no es de Banach la conclusión puede ser falsa, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.6 *Pongamos $X = C[0,1]$, con*

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt \quad (f \in C[0,1]),$$

y, para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos el funcional $\Lambda_n : C[0,1] \to \mathbb{R}$ mediante

$$\Lambda_n f = n \int_0^{1/n} f(t)\, dt \quad (f \in C[0,1]).$$

Cada Λ_n es lineal y continuo, con $\|\Lambda_n\| \le n$:

$$|\Lambda_n f| \le n \int_0^{1/n} |f(t)|\, dt \le n \|f\|_1 \quad (f \in C[0,1],\ n \in \mathbb{N}).$$

Además,

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda_n f = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1/n} \int_0^{1/n} f(t)\, dt = f(0) \quad (f \in C[0,1]).$$

Pero el funcional $\Lambda : C[0,1] \to \mathbb{R}$ definido por $\Lambda f = f(0)$ $(f \in C[0,1])$ no está acotado: para la sucesión

$$g_n(t) = \begin{cases} -n^3 t + n, & t \in \left[0, 1/n^2\right] \\ 0, & t \ge 1/n^2 \end{cases}$$

(fig. 2) se tiene que

$$\|g_n\|_1 = \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

mientras que $\Lambda g_n = g_n(0) = n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

El siguiente resultado, que necesitaremos más adelante, es, en cierto sentido, recíproco del Corolario 5.4.

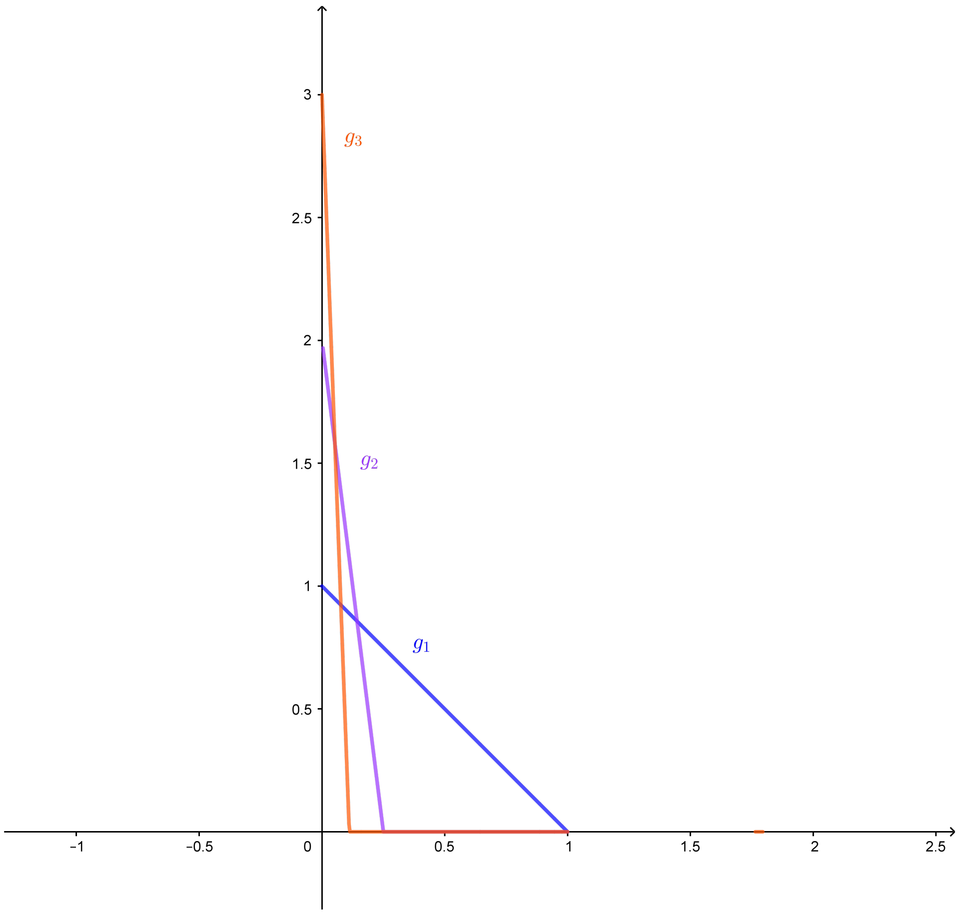

Figura 2. Los tres primeros términos de la sucesión $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Proposición 5.7 *Sean X, Y espacios de Banach, y sea $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de operadores lineales de X en Y, uniformemente acotada. El conjunto $E = \{x \in X : \text{ existe } \lim_{n\to\infty} T_n x\}$ es un subespacio cerrado de X.*

Demostración. Sólo necesitamos probar que E es cerrado. Supongamos que $x \in \overline{E}$. Por hipótesis, algún $M > 0$ es tal que $\|T_n\| \leq M$ $(n \in \mathbb{N})$. Sea $\varepsilon > 0$. Como x es adherente a E, existe $z \in E$ verificando que $\|x - z\| < \varepsilon/(3M)$. La sucesión $\{T_n z\}_{n=1}^{\infty}$ converge, y por lo tanto es de Cauchy en Y; luego, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_m z - T_n z\| < \varepsilon/3$ siempre que $m, n \geq N$. Para tales m y n,

$$
\begin{aligned}
\|T_m x - T_n x\| &\leq \|T_m x - T_m z\| + \|T_m z - T_n z\| + \|T_n z - T_n x\| \\
&\leq \|T_m\| \, \|x - z\| + \|T_m z - T_n z\| + \leq \|T_n\| \, \|x - z\| \\
&< M \frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3} + M \frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Por consiguiente, la sucesión $\{T_n x\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en Y. Como Y es completo, existe $\lim_{n\to\infty} T_n x$, probando que $x \in E$, como se pretendía. $\square$

5.2 Primeras aplicaciones

Ejemplo 5.8 *Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1(\mathbb{R})$ es tal que*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(t)|\, dt < \infty,$$

entonces

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(t)g(t)|\, dt < \infty \quad (g \in C_0(\mathbb{R})).$$

El principio de acotación uniforme garantiza el recíproco, pues podemos interpretar los elementos de $L^1(\mathbb{R})$ como funcionales lineales continuos sobre $C_0(\mathbb{R})$: $L^1(\mathbb{R}) \subset C_0(\mathbb{R})'$.

Sin embargo, el resultado es falso en el espacio $C_c(\mathbb{R})$ de las funciones continuas de soporte compacto en $\mathbb{R}$ con la norma de $L^1(\mathbb{R})$, que no es de Banach y cuya compleción en esta norma es, precisamente, $L^1(\mathbb{R})$. En efecto, tomando $f_n = \chi_{[0,n]} \in L^1(\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N})$ y cualquier $g \in C_c(\mathbb{R})$, encontramos que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(t)g(t)|\, dt = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{0}^{n} |g(t)|\, dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\, dt < \infty,$$

pero

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(t)|\, dt = \sup_{n\in\mathbb{N}} n = \infty.$$

Ejemplo 5.9 *El espacio X de los polinomios reales $x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$ (donde sólo un número finito de términos son distintos de cero), con la norma $\|x\| = \max_{i\in\mathbb{N}} |a_i|$, no es completo.*

Para verlo, construimos una sucesión de funcionales $\Lambda_n : X \to \mathbb{R}$ poniendo $\Lambda_n 0 = 0$, $\Lambda_n x = a_0 + \ldots + a_{n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$. Así definido, cada Λ_n es lineal y acotado: como $|a_i| \leq \|x\|$, necesariamente $|\Lambda_n x| \leq n\|x\|$ $(i, n \in \mathbb{N},\ 0 \leq i \leq n-1)$. Y como todo polinomio x de grado N_x tiene, a lo sumo, $N_x + 1$ coeficientes no nulos, resulta

$$|\Lambda_n x| \leq (N_x + 1)\, \|x\| = c_x \quad (n \in \mathbb{N}),$$

que es una de las hipótesis del principio de acotación uniforme. Ahora bien, eligiendo $x(t) = 1 + t + \ldots + t^n$, encontramos que $\|x\| = 1$ y $\Lambda_n x = n = n\|x\|$ $(n \in \mathbb{N})$. Como $\|\Lambda_n\| \geq |\Lambda_n x| / \|x\|$, se sigue que $\|\Lambda_n\| \geq n$ $(n \in \mathbb{N})$, y $\{\|\Lambda_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ no está acotada. Al ser falsa la tesis del teorema, debe fallar la hipótesis de que X sea completo.

5.3 Series de Fourier de funciones continuas

5.3.1 Convergencia y representación

Sea $\mathbb{T} = \left\{e^{it} : -\pi \leq t < \pi\right\}$ el toro unidimensional. Consideramos la clase $C(\mathbb{T})$ de todas las funciones complejas continuas sobre el espacio de Hausdorff compacto $\mathbb{T}$. Dada $f \in C(\mathbb{T})$, identificaremos $\mathbb{T}$ con $[-\pi, \pi)$ y, abusando de la notación, escribiremos $f(t) = f(e^{it})$ cuando $t \in [-\pi, \pi)$.

Definición 5.10 *Para cada $n \in \mathbb{Z}$, se define el* n-ésimo coeficiente de Fourier *de $f \in C(\mathbb{T})$ como*

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int}\, dt. \tag{2}$$

La serie de Fourier *de f es*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{int}.$$

El problema que se nos plantea es decidir si es posible recuperar f a partir de su serie de Fourier.

Cuando f es un polinomio trigonométrico, existe una sucesión de escalares $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, con tan sólo un número finito de términos no nulos, tal que $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikt}$ para todo $t \in \mathbb{T}$. En este caso, es fácil ver que $\widehat{f}(n) = a_n$ para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Como un polinomio trigonométrico es igual a su serie de Fourier, es natural preguntarse si la serie de Fourier de cualquier función continua f converge a f. A fin de precisar esta cuestión, definamos, para cada $N \in \mathbb{N}_0$, el operador de N-ésima suma parcial $S_N : C(\mathbb{T}) \to C(\mathbb{T})$ como sigue:

$$S_N f(t) = \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n) e^{int} \quad (t \in [-\pi, \pi)). \tag{3}$$

La pregunta ahora es: ¿se verifica que $\|S_N f - f\|_\infty \to 0$ cuando $N \to \infty$ para toda $f \in C(\mathbb{T})$? En otras palabras, ¿es siempre cierto que $\{S_N f\}_{N=0}^{\infty}$ converge uniformemente a f? Con ayuda del principio de acotación uniforme, veremos que la respuesta a esta pregunta es negativa.

Fijemos $N \in \mathbb{N}_0$, $f \in C(\mathbb{T})$ y $t \in [-\pi, \pi)$. Sustituyendo (2) en (3) tenemos

$$\begin{aligned} S_N f(t) &= \sum_{n=-N}^{N} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx \right) e^{int} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) \sum_{n=-N}^{N} e^{in(t-x)} \right) dx. \end{aligned} \tag{4}$$

La suma que aparece en el integrando es la de una progresión geométrica de razón $e^{i(t-x)}$. Calcularemos dicha suma a continuación:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^{N} e^{in(t-x)} &= e^{-iN(t-x)} \sum_{n=0}^{2N} e^{in(t-x)} = e^{-iN(t-x)} \frac{1 - e^{i(2N+1)(t-x)}}{1 - e^{i(t-x)}} \\ &= \frac{e^{-iN(t-x)} - e^{i(N+1)(t-x)}}{1 - e^{i(t-x)}} = \frac{e^{i(N+1)(t-x)} - e^{-iN(t-x)}}{e^{i(t-x)} - 1}. \end{aligned}$$

Si reducimos la fracción final dividiendo numerador y denominador por $e^{i(t-x)/2}$ encontramos que

$$\sum_{n=-N}^{N} e^{in(t-x)} = \frac{e^{i(N+1/2)(t-x)} - e^{-i(N+1/2)(t-x)}}{e^{i(t-x)/2} - e^{-i(t-x)/2}} = \frac{\operatorname{sen}((N+1/2)(t-x))}{\operatorname{sen}((t-x)/2)}. \tag{5}$$

Incorporando a (4) la expresión resultante, concluimos:

$$S_N f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\operatorname{sen}((N+1/2)(t-x))}{\operatorname{sen}((t-x)/2)}\, dx. \tag{6}$$

Definición 5.11 *Fijado $N \in \mathbb{N}_0$, se denomina* núcleo de Dirichlet de orden N *al polinomio trigonométrico*

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx} = \frac{\operatorname{sen}((N+1/2)x)}{\operatorname{sen}(x/2)} \quad (x \in [-\pi,\pi)). \tag{7}$$

Nótese que $D_N \in L^1(\mathbb{T})$, con $\|D_N\|_1 \le 2N+1$ $(N \in \mathbb{N}_0)$.

A continuación, definimos los funcionales lineales $\Lambda_N : C(\mathbb{T}) \to \mathbb{K}$ mediante

$$\Lambda_N f = S_N f(0) \quad (f \in C(\mathbb{T}),\, N \in \mathbb{N}_0).$$

Usando (6) y (7):

$$\Lambda_N f = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\frac{\operatorname{sen}((N+1/2)x)}{\operatorname{sen}(x/2)}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,D_N(x)\,dx \quad (f \in C(\mathbb{T})). \tag{8}$$

Afirmamos que

$$\|\Lambda_N\| = \|D_N\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\operatorname{sen}((N+1/2)x)}{\operatorname{sen}(x/2)}\right| dx. \tag{9}$$

En efecto: por una parte, (8) implica

$$|\Lambda_N f| \le \|f\|_\infty \|D_N\|_1 \quad (f \in C(\mathbb{T}));$$

luego,

$$\|\Lambda_N\| \le \|D_N\|_1. \tag{10}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\|D_N\|_1 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)|\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)|\,\frac{1+j|D_N(x)|}{1+j|D_N(x)|}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|D_N(x)|}{1+j|D_N(x)|}\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{j|D_N(x)|}{1+j|D_N(x)|}\,|D_N(x)|\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi j}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{j|D_N(x)|}{1+j|D_N(x)|}\,dx + \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{jD_N(x)}{1+j|D_N(x)|}\,D_N(x)\,dx\right| \\
&\le \frac{1}{2\pi j}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \left|\Lambda_N\left(\frac{jD_N(x)}{1+j|D_N(x)|}\right)\right| \\
&\le \frac{1}{j} + \|\Lambda_N\| \left\|\frac{jD_N}{1+j|D_N|}\right\|_\infty \le \frac{1}{j} + \|\Lambda_N\| \qquad (j \in \mathbb{N}).
\end{aligned}$$

Un paso al límite cuando $j \to \infty$ establece que

$$\|D_N\|_1 \le \|\Lambda_N\|,$$

lo cual, junto con (10), ya prueba (9).

Ahora, puesto que $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$ $(x \in \mathbb{R})$, se sigue de (9) la estimación

$$\begin{aligned} \|\Lambda_N\| = \|D_N\|_1 &\geq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\operatorname{sen}\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right|\frac{dx}{x} = \frac{2}{\pi}\int_0^{(N+1/2)\pi}|\operatorname{sen} x|\,\frac{dx}{x} \\ &\geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k\pi}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}|\operatorname{sen} x|\,dx = \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}, \end{aligned} \tag{11}$$

cuyo segundo miembro es la N-ésima suma parcial de una serie armónica divergente. En consecuencia, la sucesión $\{\|\Lambda_N\|\}_{N=1}^{\infty}$ no está acotada, así que, por el principio de acotación uniforme, $\{\Lambda_N\}_{N=1}^{\infty}$ no puede estar puntualmente acotada; dicho de otro modo, existe $f \in C(\mathbb{T})$ tal que $\lim_{N\to\infty} S_N f(0) = \infty$.

Elegimos el origen por conveniencia, pero es claro que el mismo argumento vale para cualquier $x \in [-\pi, \pi)$.

Antes del advenimiento del análisis funcional y, en particular, del principio de acotación uniforme, la única manera de demostrar que $\{S_N f\}_{N=0}^{\infty}$ no converge uniformemente a f para toda $f \in C(\mathbb{T})$ era construir explícitamente una función para la que la convergencia considerada no tiene lugar. Sin embargo, la técnica no constructiva utilizada aquí permite probar que, en realidad, para cada $x \in [-\pi, \pi)$ existe un G_δ denso de funciones $f \in C(\mathbb{T})$ tales que $\lim_{N\to\infty} S_N f(x) = \infty$; en particular, la serie de Fourier de tales f no converge uniformemente a f, lo que responde negativamente a la pregunta formulada al principio de la sección.

5.3.2 Núcleos de sumabilidad

En la sección precedente se obtuvo que

$$S_N f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,D_N(t-x)\,dx = (D_N * f)(t), \tag{12}$$

donde S_N es el operador de N-ésima suma parcial de la serie de Fourier de $f \in C(\mathbb{T})$ (cf. (6) y (7)). El análisis efectuado en dicha sección mostró que $D_N * f$ no converge uniformemente a f para toda $f \in C(\mathbb{T})$. No obstante, podemos encontrar un núcleo relacionado para el que se tiene la convergencia uniforme cualquiera que sea $f \in C(\mathbb{T})$.

Definición 5.12 *Sea N cualquier número natural. El* núcleo de Fejér de orden N *es la función*

$$K_N(t) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} D_k(t) \quad (t \in [-\pi, \pi))\,.$$

*El operador de N-*ésima media de Cesàro $T_N : C(\mathbb{T}) \to C(\mathbb{T})$ *es el dado por*

$$T_N f = \frac{1}{N}(S_0 f + \ldots + S_{N-1} f) \quad (f \in C(\mathbb{T}))\,.$$

Usando (12), es posible deducir una relación entre K_N y T_N: para cualesquiera $N \in \mathbb{N}$ y $t \in [-\pi, \pi)$,

$$T_N f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,K_N(t-x)\,dx = (K_N * f)(t). \tag{13}$$

A continuación encontraremos una expresión cerrada para el núcleo de Fejér de orden N.

Lema 5.13 *Sea $N \in \mathbb{N}$. Si K_N es el núcleo de Fejér de orden N, entonces*

$$K_N(t) = \frac{1}{2N}\frac{1-\cos(Nt)}{\operatorname{sen}^2(t/2)} = \frac{\operatorname{sen}^2(Nt/2)}{N\operatorname{sen}^2(t/2)} \quad (t \in [-\pi,\pi)).$$

Demostración. Recordemos la identidad

$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \frac{\cos(A-B)-\cos(A+B)}{2},$$

donde A y B son números reales. Para $t \in [-\pi,\pi)$,

$$\begin{aligned} K_N(t) &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\operatorname{sen}((k+1/2)t)}{\operatorname{sen}(t/2)} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\operatorname{sen}((k+1/2)t)\operatorname{sen}(t/2)}{\operatorname{sen}^2(t/2)} \\ &= \frac{1}{2N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\cos(kt)-\cos((k+1)t)}{\operatorname{sen}^2(t/2)}. \end{aligned} \tag{14}$$

La primera igualdad en la tesis del lema proviene directamente de la suma (14), que es telescópica. La segunda igualdad de la tesis se deduce aplicando la fórmula del seno del ángulo mitad al numerador de la primera. □

Lema 5.14 *Sea $N \in \mathbb{N}$. Si T_N es la N-ésima media de Cesàro, entonces* $\|T_N\| = 1$.

Demostración. Sea $f \in C(\mathbb{T})$. Mediante un cambio de variables, y usando la invariancia por traslaciones de la medida de Lebesgue junto con la periodicidad de las funciones sobre $\mathbb{T}$, encontramos que:

$$T_N f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-x)\,K_N(x)\,dx \quad (t \in [-\pi,\pi)).$$

Se sigue que

$$\|T_N f\|_\infty \le \|f\|_\infty \|K_N\|_1,$$

y, de la arbitrariedad de $f \in C(\mathbb{T})$, que

$$\|T_N\| \le \|K_N\|_1. \tag{15}$$

Por el Lema 5.13 sabemos que $K_N \ge 0$, así que

$$\|K_N\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)\,dt.$$

Calculemos directamente el valor de esta norma. En virtud de (7),

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} D_k(t)\right]dt = \frac{1}{2\pi N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{n=-k}^{k}\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\,dt\right).$$

Ahora bien,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\,dt = \begin{cases} 2\pi, & n=0 \\ 0, & n\neq 0. \end{cases}$$

Consecuentemente,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)\,dt = \frac{1}{2\pi N}\sum_{k=0}^{N-1} 2\pi = 1.$$

Puesto que

$$T_N 1(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_N(x)\,dx = 1 \quad (t\in[-\pi,\pi)),$$

se concluye de (15) que $\|T_N\| = 1$, como se pretendía. □

Proposición 5.15 *Si $f \in C(\mathbb{T})$, entonces $K_N * f \to f$ uniformemente cuando $N \to \infty$.*

Demostración. Por el teorema de aproximación de Weierstrass, los polinomios trigonométricos son densos en $C(\mathbb{T})$. Si f es un polinomio trigonométrico, es fácil ver que $T_N f \to f$ uniformemente cuando $N \to \infty$. El Lema 5.14 y la Proposición 5.7 garantizan que el conjunto de las funciones para las cuales existe este límite es cerrado en $C(\mathbb{T})$. Así pues, $T_N f \to f$ en $C(\mathbb{T})$ cuando $N \to \infty$ siempre que $f \in C(\mathbb{T})$. Para completar la prueba basta tener en cuenta (13). □

6 Teorema de la aplicación abierta

El enunciado del teorema de la aplicación abierta se puede resumir como sigue: si un operador lineal entre dos espacios de Banach es continuo y sobre, entonces es abierto.

6.1 Aplicaciones abiertas

Definición 6.1 *Sea $f : E \to F$ una aplicación, donde E y F son espacios topológicos. Se dice que f es* abierta en un punto $x \in E$ *si $f(V)$ contiene un entorno de $f(x)$ en F cuando V es un entorno de x en E. Diremos que f es* abierta *si $f(U)$ es abierto en F siempre que U es abierto en E.*

Observación 6.2 (i) *Claramente, f es abierta si, y sólo si, f es abierta en cada punto de E. Debido a la invariancia de las topologías nórmicas (Corolario 3.3), una aplicación entre dos espacios normados es abierta si, y sólo si, es abierta en el origen. Tendremos ocasión de usar esta caracterización en la prueba del Corolario 6.5.*

(*ii*) *Una aplicación biyectiva y continua $f : E \to F$ entre dos espacios topológicos E y F es un homeomorfismo precisamente cuando f es abierta.*

Teorema 6.3 (Teorema de la aplicación abierta de Banach-Schauder) *Sean U y V las bolas unidad abiertas de los espacios de Banach X e Y, respectivamente. A cada operador lineal acotado suprayectivo $T : X \to Y$, le corresponde $\delta > 0$ tal que*

$$T(U) \supset \delta V.$$

Demostración. Se quiere probar que, fijado el operador T, algún $\delta > 0$ cumple que para cada $y \in Y$, con $\|y\| < \delta$, existe $x \in X$, con $\|x\| < 1$, tales que $Tx = y$.

Dado $y \in Y$, sea $x \in X$ tal que $Tx = y$; si $\|x\| < k$, entonces $y \in T(kU)$. Por tanto, Y es la unión de los conjuntos $T(kU)$, para $k \in \mathbb{N}$. Puesto que Y es completo, el teorema de la categoría de Baire proporciona un conjunto abierto no vacío W contenido en la clausura de algún $T(kU)$; esto significa que todo punto de W es el límite de una sucesión $\{Tx_i\}_{i=1}^{\infty}$, donde $x_i \in kU$ $(i \in \mathbb{N})$. De aquí en adelante, k y W serán fijos.

Elijamos $y_0 \in W$ y $\eta > 0$ tales que $y_0 + y \in W$ si $\|y\| \leq \eta$. Para cualquiera de tales y, existen sucesiones $\{x_i'\}_{i=1}^{\infty}$, $\{x_i''\}_{i=1}^{\infty}$ en kU tales que

$$Tx_i' \to y_0, \quad Tx_i'' \to y_0 + y \quad (i \to \infty).$$

Poniendo $x_i = x_i'' - x_i'$ encontramos que $\|x_i\| < 2k$ $(i \in \mathbb{N})$ y $Tx_i \to y$ $(i \to \infty)$. Como esto se cumple para todo y con $\|y\| \leq \eta$, la linealidad de T muestra que se verifica lo siguiente, con $\delta = \eta/2k$: cualesquiera sean $y \in Y$ y $\varepsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que

$$\|x\| < \frac{1}{\delta}\|y\| \quad \text{y} \quad \|y - Tx\| < \varepsilon. \tag{16}$$

En efecto: si $y = 0$, esta afirmación es evidente; si $y \neq 0$, el vector $\eta y/\|y\|$ tiene norma η, así que dado $\eta\varepsilon/\|y\| > 0$ existe $x \in X$ tal que $\|x\| < 2k$ y

$$\left\| \frac{\eta y}{\|y\|} - Tx \right\| < \frac{\eta\varepsilon}{\|y\|},$$

o bien

$$\left\| y - T\left(\frac{\|y\|}{\eta}x\right) \right\| < \varepsilon,$$

con

$$\left\| \frac{\|y\|}{\eta}x \right\| < \frac{2k}{\eta}\|y\|.$$

El enunciado (16) es casi la conclusión deseada, salvo que debe obtenerse para $\varepsilon = 0$. Con este objeto, fijemos $y \in \delta V$ y $\varepsilon > 0$. Por (16), existe $x_1 \in X$, con $\|x_1\| < 1$, tal que

$$\|y - Tx_1\| < \frac{1}{2}\delta\varepsilon.$$

Supongamos elegidos $x_1,\dots,x_n$ de modo que

$$\|y - Tx_1 - \dots - Tx_n\| < \frac{1}{2^n}\,\delta\varepsilon. \tag{17}$$

Mediante (16), con el vector del primer miembro de (17) en vez de y, se obtiene x_{n+1} que verifica

$$\|x_{n+1}\| < \frac{1}{2^n}\,\varepsilon \quad (n = 1,2,3,\dots) \tag{18}$$

y (17) para $n+1$ en lugar de n. Poniendo $s_n = x_1 + \dots + x_n$, (18) asegura que la sucesión $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en X. Como X es completo, existe $x \in X$ tal que $s_n \to x$ cuando $n \to \infty$. La estimación $\|x_1\| < 1$, junto con (18), muestra que $\|x\| < 1+\varepsilon$. Puesto que T es continuo, $Ts_n \to Tx$ cuando $n \to \infty$; pero, por (17), $Ts_n \to y$ cuando $n \to \infty$. Luego, $Tx = y$.

Hemos probado así que

$$T((1+\varepsilon)U) \supset \delta V,$$

o bien

$$T(U) \supset (1+\varepsilon)^{-1}\delta V, \tag{19}$$

para todo $\varepsilon > 0$. La unión de los conjuntos del segundo miembro de (19), tomada sobre todos los $\varepsilon > 0$, es δV. Esto completa la demostración. $\square$

Teorema 6.4 *Si X e Y son espacios de Banach, y si T es un operador lineal acotado y biyectivo de X sobre Y, entonces existe $\delta > 0$ tal que*

$$\|Tx\| \geq \delta \|x\| \quad (x \in X). \tag{20}$$

En otras palabras, T^{-1} es un operador lineal acotado de Y sobre X.

Demostración. Sean U y V las bolas unidad abiertas de los espacios de Banach X e Y, respectivamente, y sea δ como en la tesis del Teorema 6.3, es decir, tal que

$$\delta V \subset T(U).$$

Como ahora T es biyectivo,

$$T^{-1}(\delta V) \subset T^{-1}[T(U)] = U,$$

así que $\|Tx\| < \delta$ implica $\|x\| < 1$. Por tanto, $\|x\| \geq 1$ implica $\|Tx\| \geq \delta$, lo que entraña (20).

El operador T^{-1} está definido sobre Y por la condición de que $T^{-1}y = x$ si $y = Tx$. Se comprueba trivialmente que T^{-1} es lineal, y (20) muestra que $\|T^{-1}\| \leq \delta^{-1}$. $\square$

Corolario 6.5 *Se verifican los siguientes enunciados.*

(*i*) *Si T es un operador lineal y continuo de un espacio de Banach X en un espacio de Banach Y, entonces T es abierto si, y sólo si, es suprayectivo.*

(*ii*) *Si X, Y son espacios de Banach y $T : X \to Y$ es lineal, continua y biyectiva, entonces existen constantes positivas a, b tales que*

$$a\|x\| \leq \|Tx\| \leq b\|x\| \quad (x \in X).$$

(*iii*) *Si $\tau_1 \subset \tau_2$ son topologías inducidas por normas sobre un mismo espacio vectorial X tales que los espacios (X,τ_1) y (X,τ_2) son de Banach, entonces $\tau_1 = \tau_2$.*

Demostración. Probemos (i). Si T es abierto entonces el subespacio $T(X)$ contiene un entorno abierto de cero en Y. Como los subespacios propios carecen de interior, necesariamente $T(X) = Y$. Recíprocamente, supongamos que T es sobre. Denotemos por U, V las bolas unidad abiertas de X, Y, respectivamente. Sea G un abierto en X, y sea $w \in T(G)$; existe $x \in G$ tal que $Tx = w$. Elegimos $r > 0$ tal que $x + rU \subset G$. Como T es lineal, $T(x+rU) = w + rT(U)$. Puesto que T es sobre, el teorema de la aplicación abierta proporciona $\delta > 0$ tal que $\delta V \subset T(U)$. Por tanto,

$$w + r\delta V \subset w + rT(U) = T(x+rU) \subset T(G),$$

probando que $T(G)$ es abierto en Y y, con ello, que T es abierta.

Las desigualdades del apartado (ii) simplemente expresan la continuidad de T^{-1} y de T.

El enunciado (iii) se sigue de aplicar el Teorema 6.4 a la aplicación identidad de (X,τ_2) en (X,τ_1). □

Ejemplo 6.6 *Sea c_{00} el espacio de las sucesiones de números complejos $x = \{x(k)\}_{k=1}^{\infty}$ finitamente no nulas, normado por*

$$\|x\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x(k)|.$$

Definimos $T : c_{00} \to c_{00}$ mediante

$$Tx = \left\{ x(1), \frac{1}{2}x(2), \frac{1}{3}x(3), \dots, \frac{1}{k}x(k), \dots \right\} \quad (x \in c_{00}).$$

Entonces T es lineal y acotado, pero T^{-1} no es acotado.

En efecto, se comprueba sin dificultad que T es lineal. Como

$$\|Tx\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} \left| \frac{1}{k}x(k) \right| \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} |x(k)| = \|x\|_\infty \quad (x \in c_{00}),$$

encontramos que T es acotado, con norma $\|T\| \leq 1$. Por otra parte, T^{-1} es, claramente, el operador lineal definido por

$$T^{-1}x = \{x(1), 2x(2), 3x(3), \dots, kx(k), \dots\} \quad (x \in c_{00}).$$

Sin embargo,

$$\|T^{-1}e_n\|_\infty = n = n\|e_n\|_\infty \quad (n \in \mathbb{N}),$$

así que T^{-1} no está acotado:

$$\|T^{-1}\|_\infty \geq n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

No se contradice el Teorema 6.4 porque $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ no es completo (cf. Ejemplo 5.3).

En las siguientes secciones ilustraremos la utilidad del teorema de la aplicación abierta con algunos ejemplos.

6.2 Bases de Schauder

El concepto de base de un espacio vectorial (*base de Hamel*) se extiende a espacios normados en el siguiente sentido.

Definición 6.7 *Dado un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$, una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ es una* base de Schauder *de X cuando para cada $x \in X$, existe una única sucesión de escalares $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ tal que $x = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n x_n$.*

Observación 6.8 *Recordemos que un espacio métrico es* separable *si contiene un subconjunto denso numerable. Como los racionales (respectivamente,* racionales de Gauss*: complejos con partes real e imaginaria racional) son densos en $\mathbb{R}$ (respectivamente, $\mathbb{C}$), resulta que todo espacio normado que admite una base de Schauder es separable. El recíproco es falso, en general, como probó Enflo en 1973. Schauder introdujo las bases que ahora llevan su nombre en 1927, y el problema de la existencia de bases de Schauder en espacios de Banach separables fue una de las primeras cuestiones sobre esta clase de espacios, planteada por el propio Banach en su célebre monografía de 1932. Si un espacio de Banach admite una base de Schauder entonces tiene la* propiedad de aproximación *(es decir, es posible escribir el operador identidad sobre dicho espacio como límite, en la topología de la convergencia compacta, de una sucesión de operadores de rango finito), propiedad que fue exhaustivamente estudiada, en sus diversas variantes, por Grothendieck en 1955. Enflo construyó un ejemplo de espacio de Banach separable que carece de la propiedad de aproximación y, por lo tanto, de bases de Schauder.*

Ejemplo 6.9

(i) *Un espacio de Hilbert es separable si, y sólo si, admite una base ortonormal numerable. Toda base ortonormal numerable es una base de Schauder.*

(ii) *La familia $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ de las sucesiones unitarias canónicas $e_k = \{e_k(n)\}_{n=1}^\infty$, donde $e_k(k) = 1$ y $e_k(n) = 0$ $(n \in \mathbb{N},\ n \neq k)$ es una base de Schauder de ℓ^p, para todo $1 \leq p < \infty$. En particular, los espacios ℓ^p $(1 \leq p < \infty)$ son separables.*

(iii) *El espacio ℓ^∞ no es separable, y por lo tanto carece de bases de Schauder.*

Proposición 6.10 *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach con una base de Schauder $\{x_k\}_{k=1}^\infty$, tal que $x_k \neq 0$ $(k \in \mathbb{N})$. Si definimos*

$$|x| = \sup_{N \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{k=1}^N \lambda_k x_k \right\| \quad \left(x = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n x_n \in X \right),$$

entonces $(X, |\cdot|)$ es un espacio de Banach. Además, las normas $\|\cdot\|$ y $|\cdot|$ son equivalentes sobre X.

Demostración. Se comprueba sin dificultad que $|\cdot|$ está bien definida y es una norma en X; veamos que el espacio normado $(X,|\cdot|)$ es completo.

Sea $z=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k x_k\in X$. Entonces, para cada $k\in\mathbb{N}$, $\mu_k x_k=\sum_{i=1}^{k}\mu_i x_i-\sum_{i=1}^{k-1}\mu_i x_i$, así que $\|\mu_k x_k\|\le 2|z|$, de donde

$$|\mu_k|\le\frac{2|z|}{\|x_k\|}\quad(k\in\mathbb{N}).$$

Sea ahora $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $(X,|\cdot|)$. Si $a_n=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_n(k)x_k$ $(n\in\mathbb{N})$, la estimación anterior muestra que, para cada $k\in\mathbb{N}$, $\{\lambda_n(k)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en el cuerpo escalar; llamamos $\lambda(k)=\lim_{n\to\infty}\lambda_n(k)$ $(k\in\mathbb{N})$. Probaremos que $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(k)x_k$ converge en $(X,\|\cdot\|)$ a algún $a\in X$, y que $\lim_{n\to\infty}|a_n-a|=0$.

Dado $\varepsilon>0$, sea $N\in\mathbb{N}$ tal que $|a_N-a_m|<\varepsilon/4$, si $m\ge N$. Se tiene:

$$\sum_{k=i}^{i+j}[\lambda_N(k)-\lambda_m(k)]x_k=\sum_{k=1}^{i+j}[\lambda_N(k)-\lambda_m(k)]x_k-\sum_{k=1}^{i-1}[\lambda_N(k)-\lambda_m(k)]x_k\quad(i,j,m\in\mathbb{N},\ m\ge N).$$

De aquí:

$$\left\|\sum_{k=i}^{i+j}[\lambda_N(k)-\lambda_m(k)]x_k\right\|\le 2\,|a_N-a_m|<\frac{\varepsilon}{2}\quad(i,j,m\in\mathbb{N},\ m\ge N).$$

Haciendo $m\to\infty$, encontramos que

$$\left\|\sum_{k=i}^{i+j}[\lambda_N(k)-\lambda(k)]x_k\right\|\le\frac{\varepsilon}{2}\quad(i,j\in\mathbb{N}).$$

Puesto que $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_N(k)x_k$ converge en $(X,\|\cdot\|)$, existe $I\in\mathbb{N}$ tal que

$$\left\|\sum_{k=I}^{I+j}\lambda_N(k)x_k\right\|<\frac{\varepsilon}{2}\quad(j\in\mathbb{N}).$$

Luego,

$$\left\|\sum_{k=I}^{I+j}\lambda(k)x_k\right\|\le\left\|\sum_{k=I}^{I+j}[\lambda_N(k)-\lambda(k)]x_k\right\|+\left\|\sum_{k=I}^{I+j}\lambda_N(k)x_k\right\|<\varepsilon\quad(j\in\mathbb{N}),$$

de modo que la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(k)x_k$ converge a algún a en el espacio de Banach $(X,\|\cdot\|)$.

Como $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $(X,|\cdot|)$, dado $\varepsilon>0$ existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $n,m\ge N$ implica $|a_n-a_m|<\varepsilon$. Así,

$$\left\|\sum_{k=1}^{j}[\lambda_n(k)-\lambda_m(k)]x_k\right\|<\varepsilon\qquad(j,n,m\in\mathbb{N},\ n,m\ge N).$$

Haciendo $m\to\infty$, resulta

$$\left\|\sum_{k=1}^{j}[\lambda_n(k)-\lambda(k)]x_k\right\|\le\varepsilon\qquad(n\ge N,\ j\in\mathbb{N}).$$

Por tanto, $|a_n-a|\le\varepsilon$ si $n\ge N$, y se concluye que $(X,|\cdot|)$ es completo.

Finalmente, dado cualquier $z=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k x_k\in X$, es claro que

$$\|z\|=\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k x_k\right\|=\lim_{N\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{N}\mu_k x_k\right\|\le\sup_{N\in\mathbb{N}}\left\|\sum_{k=1}^{N}\mu_k x_k\right\|=|z|.$$

La equivalencia de ambas normas se sigue ahora del Corolario 6.5. □

6.3 Coeficientes de Fourier de funciones en $L^1(\mathbb{T})$

Definición 6.11 *Considérese el toro unidimensional $\mathbb{T}$. Para cada $f \in L^1(\mathbb{T})$, definimos el n-ésimo coeficiente de Fourier de f por*

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Teorema 6.12 (Lema de Riemann-Lebesgue) *Si $f \in L^1(\mathbb{T})$, entonces $\lim_{|n|\to\infty}\widehat{f}(n) = 0$.*

Demostración. Dado $n \in \mathbb{Z}$, definimos un funcional lineal en $L^1(\mathbb{T})$ poniendo $\phi_n(f) = \widehat{f}(n)$ para cada $f \in L^1(\mathbb{T})$. Un cálculo sencillo muestra que $\|\phi_n\| \le 1$ para cada $n \in \mathbb{Z}$, de manera que la sucesión de funcionales lineales $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ está uniformemente acotada. Si f es un polinomio trigonométrico, existe algún $N \in \mathbb{N}$ tal que $\phi_n(f) = 0$ para cada $|n| \ge N$; en particular, existe $\lim_{|n|\to\infty}\phi_n(f) = 0$ para f en un subconjunto denso de $L^1(\mathbb{T})$. Pero la Proposición 5.7 asegura que el conjunto

$$\left\{ f \in L^1(\mathbb{T}) : \text{existe } \lim_{|n|\to\infty}\phi_n(f) \right\}$$

es un subespacio vectorial cerrado de $L^1(\mathbb{T})$, y, por tanto, el límite existe para toda $f \in L^1(\mathbb{T})$.

En virtud del Corolario 5.4, la aplicación definida por $\phi(f) = \lim_{|n|\to\infty}\phi_n(f)$ para $f \in L^1(\mathbb{T})$ es un funcional lineal acotado sobre $L^1(\mathbb{T})$. Ya hemos probado que $\phi(f) = 0$ cuando f es un polinomio trigonométrico. Como ϕ es continua, y como los polinomios trigonométricos son densos en $L^1(\mathbb{T})$, concluimos que $\phi(f) = 0$ para toda $f \in L^1(\mathbb{T})$. Esto completa la prueba. □

La relevancia del Teorema 6.12 estriba en que para cada $f \in L^1(\mathbb{T})$, la sucesión doblemente infinita $\widehat{f} = \{\widehat{f}(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ es siempre un elemento de $c_0(\mathbb{Z})$ (sucesiones doblemente infinitas de escalares convergentes a cero, con la norma del supremo). Esto nos induce a cuestionarnos si el recíproco es válido. El resultado siguiente, que se apoya en el teorema de la aplicación abierta, responde negativamente a esta cuestión.

Proposición 6.13 *Existe una sucesión en $c_0(\mathbb{Z})$ que no es la transformada de Fourier de ninguna función de $L^1(\mathbb{T})$.*

Demostración. Definimos la transformación de Fourier $\mathscr{F} : L^1(\mathbb{T}) \to c_0(\mathbb{Z})$ poniendo

$$\mathscr{F}(f) = \widehat{f} \quad \left(f \in L^1(\mathbb{T})\right);$$

este operador está bien definido en virtud del lema de Riemann-Lebesgue. Se quiere ver que $\mathscr{F}$ no es suprayectivo. Nótese que $\mathscr{F}$ es lineal y acotado, con $\|\mathscr{F}\| = 1$; además, $\mathscr{F}$ es inyectivo.

Supongamos que $\mathscr{F}$ aplica $L^1(\mathbb{T})$ sobre $c_0(\mathbb{Z})$. En tal caso, el Teorema 6.4 implicaría la existencia de un $\delta > 0$ satisfaciendo

$$\|\widehat{f}\|_\infty \ge \delta\|f\|_1 \quad (f \in L^1(\mathbb{T})).$$

Pero para los núcleos de Dirichlet D_N (Definición 5.11) se cumple que $D_N \in L^1(\mathbb{T})$, con $\|\widehat{D}_N\|_\infty = 1$ $(N \in \mathbb{N})$ y $\|D_N\|_1 \to \infty$

cuando $N \to \infty$ (véase (11)). Por tanto, no puede existir $\delta > 0$ tal que

$$\|\widehat{D}_N\|_\infty \geq \delta \, \|D_N\|_1 \quad (N \in \mathbb{N}),$$

lo que completa la demostración. $\square$

7 Teorema del grafo cerrado

A diferencia de los resultados anteriores, donde la continuidad de los operadores lineales intervinientes formaba parte de la hipótesis, el teorema del grafo cerrado proporciona un instrumento para verificar que un determinado operador lineal es continuo.

7.1 Grafo de un operador lineal

Definición 7.1 *Sean X, Y dos espacios normados. El* grafo *o* gráfica *de un operador $f : X \to Y$ es el conjunto*

$$G = G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y.$$

Se dice que f tiene grafo cerrado *si G es cerrado en el espacio producto $X \times Y$, que consideraremos normado por*

$$|(x,y)| = \|x\| + \|y\| \quad ((x,y) \in X \times Y).$$

Proposición 7.2 *Si X e Y son espacios normados y la aplicación $f : X \to Y$ es continua, entonces el grafo de f es cerrado.*

Demostración. Sea G el grafo de f; se trata de ver que el complementario F de G en $X \times Y$ es abierto. Fijemos $(x_0, y_0) \in F$. Entonces $y_0 \neq f(x_0)$, de manera que y_0 y $f(x_0)$ admiten entornos disjuntos V y W en Y. Puesto que f es continua, x_0 tiene un entorno U tal que $f(U) \subset W$. El entorno $U \times V$ de (x_0, y_0) está entonces en F, probando que F es abierto. $\square$

Ejemplos sencillos, incluso con $X = Y = \mathbb{R}$, muestran que el recíproco no es cierto: existen aplicaciones (no lineales) de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$ cuyo grafo es cerrado, que no son continuas. Considérese, por ejemplo, la función

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Por tanto, para una aplicación entre espacios normados, la propiedad de tener grafo cerrado es, en general, más débil que la continuidad; de ahí la importancia del siguiente resultado, válido para operadores lineales entre espacios de Banach.

Teorema 7.3 (Teorema del grafo cerrado) *Todo operador lineal entre espacios de Banach cuyo grafo sea cerrado es continuo.*

Demostración. Sean $(X, \|\cdot\|)$ e $(Y, \|\cdot\|)$ espacios de Banach, y $T : X \to Y$ un operador lineal con grafo cerrado. Definimos una nueva norma en X poniendo $|x| = \|x\| + \|Tx\|$ $(x \in X)$; veamos que esta norma es completa.

Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $(X, |\cdot|)$. Entonces $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $(X, \|\cdot\|)$ y $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$ lo es en $(Y, \|\cdot\|)$. Como ambos espacios son completos, existen $x \in X$, $y \in Y$ tales que $\|x_n - x\| \to 0$ y $\|Tx_n - y\| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Se sigue que $\{(x_n, Tx_n)\}_{n=1}^{\infty} \to (x, y)$, cuando $n \to \infty$, en el espacio normado producto $X \times Y$; y como el grafo de T es cerrado, debe ser $y = Tx$, en cuyo caso la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x en $(X, |\cdot|)$. Hemos probado así que la norma $|\cdot|$ es completa y, puesto que esta norma es comparable con la inicial de X, ambas deben ser equivalentes, en virtud del teorema de la aplicación abierta (Corolario 6.5); esto es, debe existir $M > 0$ tal que

$$|x| = \|x\| + \|Tx\| \leq M\|x\| \quad (x \in X).$$

Evidentemente, $M > 1$ si $T \neq 0$. Se concluye que $\|Tx\| \leq (M-1)\|x\|$ $(x \in X)$, lo que prueba la continuidad de T. □

El teorema del grafo cerrado proporciona una estrategia de extraordinaria utilidad para establecer la continuidad de un operador lineal entre espacios de Banach. Sea $T : X \to Y$ un operador lineal entre dos espacios normados X e Y. Probar la continuidad de T equivale a probar que T es secuencialmente continua, y para ello hay que demostrar la siguiente implicación:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx. \tag{21}$$

Si X e Y son espacios de Banach, para probar la continuidad de T es suficiente con verificar que T tiene grafo cerrado, es decir, que si $\lim_{n\to\infty}(x_n, Tx_n) = (x, y)$, entonces $Tx = y$. Como la existencia del límite doble implica la convergencia en cada variable, en realidad basta con demostrar la siguiente implicación:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} Tx_n = y \quad \Rightarrow \quad Tx = y. \tag{22}$$

Obsérvese la importante diferencia que hay entre (21) y (22). En el primer caso es necesario probar que $\lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx$, mientras que en el segundo, *suponiendo que* $\lim_{n\to\infty} Tx_n = y$, sólo es preciso establecer que $Tx = y$, lo que nos evita tener que demostrar la convergencia de $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$. Hemos obtenido así el siguiente resultado.

Proposición 7.4 *Sean X e Y espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal. Supongamos que para toda sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de X tal que existen $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X$ y $\lim_{n\to\infty} Tx_n = y \in Y$, se tiene que $Tx = y$. Entonces T tiene grafo cerrado. Si, además, X e Y son espacios de Banach, entonces T es continua.*

Ejemplo 7.5 *Sea $X = C[0,1]$ con la norma uniforme y sea $T : C^1[0,1] \subset X \to X$ definido por $Tx = x'$ $(x \in C^1[0,1])$, donde $'$ denota derivación. Entonces T no es acotado, pero tiene grafo cerrado. No se contradice el teorema del grafo cerrado porque $C^1[0,1]$, con la norma del supremo, no es espacio de Banach.*

Veamos en primer lugar que T no es acotado. Pongamos $x_n(t) = t^n$ $(0 \leq t \leq 1,\ n \in \mathbb{N})$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\|x_n\|_\infty = 1$

y

$$Tx_n(t) = x_n'(t) = nt^{n-1} \quad (0 \le t \le 1),$$

así que $\|Tx_n\|_\infty = n$. *Por lo tanto,*

$$\sup\{\|Tx\|_\infty : x \in C^1[0,1],\ \|x\|_\infty \le 1\} = \infty.$$

Probamos a continuación que T tiene grafo cerrado, aplicando la Proposición 7.4. Supongamos que $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset C^1[0,1]$ es tal que existen

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad y \quad \lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} x_n' = y.$$

Como la convergencia en $C[0,1]$ es la convergencia uniforme en $[0,1]$, de la hipótesis $\lim_{n\to\infty} x_n' = y$ se sigue que, para $0 \le t \le 1$,

$$\int_0^t y(s)\,ds = \int_0^t \lim_{n\to\infty} x_n'(s)\,ds = \lim_{n\to\infty} \int_0^t x_n'(s)\,ds = \lim_{n\to\infty} [x_n(t) - x_n(0)] = x(t) - x(0),$$

esto es,

$$x(t) = x(0) + \int_0^t y(s)\,ds \quad (0 \le t \le 1).$$

Consecuentemente, $x \in C^1[0,1]$ y $Tx = x' = y$. Se concluye que el grafo de T es cerrado.

7.2 Operadores en espacios ℓ^p

Se considera el espacio de sucesiones $\ell^p = \ell^p(\mathbb{N})$, donde $1 \le p \le \infty$.

Proposición 7.6 *Supongamos que $\{a_{jk}\}_{j,k=1}^\infty$ es una matriz infinita de números reales tales que la serie*

$$y(j) = \sum_{k=1}^\infty a_{jk} x(k) \quad (j \in \mathbb{N})$$

converge para cada $x = \{x(k)\}_{k=1}^\infty \in \ell^p$. Supongamos además que la sucesión $y = \{y(j)\}_{j=1}^\infty$ está en ℓ^p. Entonces la aplicación $T : \ell^p \to \ell^p$ definida por $Tx = y$ $(x \in \ell^p)$ es un operador lineal acotado.

Demostración. Para cada $j \in \mathbb{N}$, sea

$$\Lambda_j x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n a_{jk} x(k) = y(j) \quad (x \in \ell^p).$$

Por el Corolario 5.5, Λ_j es un funcional lineal acotado sobre ℓ^p para cada $j \in \mathbb{N}$. Usamos los funcionales lineales acotados $\{\Lambda_j\}_{j=1}^\infty$ para definir el operador $T : \ell^p \to \ell^p$ mediante

$$Tx = \{\Lambda_j x\}_{j=1}^\infty \quad (x \in \ell^p).$$

Por hipótesis, T está bien definida. Además, T es lineal porque Λ_j es lineal para cada $j \in \mathbb{N}$. Resta probar que T está acotada; para ello, aplicaremos la Proposición 7.4.

Supongamos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en ℓ^p convergente a x en ℓ^p, y que $z = \{z(j)\}_{j=1}^{\infty} \in \ell^p$ es tal que $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a z en ℓ^p. Como la convergencia en ℓ^p entraña la convergencia término a término, necesariamente $Tx_n(j) = \Lambda_j x_n$ converge a $z(j)$ cuando $n \to \infty$, para cada $j \in \mathbb{N}$. Por otra parte, dado $j \in \mathbb{N}$, la aplicación Λ_j es un funcional lineal continuo sobre ℓ^p, así que $\Lambda_j x_n \to \Lambda_j x$ cuando $n \to \infty$. En consecuencia, debemos tener $z(j) = \Lambda_j x$ para cada $j \in \mathbb{N}$, de modo que $z = Tx$. Se desprende que el grafo de T es cerrado y de aquí, por el teorema del grafo cerrado, que T es continua. $\square$