1. Técnicas de análisis de circuitos eléctricos: revisión

1.1 Magnitudes eléctricas fundamentales.
Fuentes de energía eléctrica. Conductores. Resistencias

1.2 Análisis de circuitos resistivos en continua

1.3 Señales alternas. Condensadores. Bobinas

1.4 Circuitos RC: respuesta a señales en escalón.
Respuesta a una onda cuadrada

1.5 Respuesta a señales senoidales

1.6 Transformadores

Docente: Francisco Javier Llopis Cánovas
Docente: Beatriz Rodríguez Mendoza
Docente: Silvestre Rodríguez Pérez
Docente: Julio Francisco Rufo Torres

1.1 Magnitudes eléctricas fundamentales

La información se ha recopilado principalmente de las siguientes referencias:

1. J. López Galván, J.M. Salcedo Carretero, *'Circuitos eléctricos. Primer contacto'*, Anaya, 2005.
2. Ll. Prat (ed.): 'Circuitos y dispositivos electrónicos. Fundamentos de Electrónica', Eds. UPC, 2010.

Carga eléctrica (*q*):
representa la cantidad de electricidad almacenada por un un cuerpo.

Ref. [1]

• Las cargas pueden ser positivas o negativas.
Cuerpos con carga del mismo signo se repelen; con signo contrario se atraen.

• La unidad de carga es el *coulomb* o *culombio* (*C*)
(múltiplo de la carga del electrón, la carga negativa elemental).

• La menor cantidad de carga existente en la naturaleza es la del electrón.
Su valor, designado como q_e o e, es $-1.602 \cdot 10^{-19}$ C. El protón tiene igual carga, pero positiva.

• Fuerzas de interacción entre las cargas:

- *Electrostáticas*: hacen que cargas del mismo signo se repelan y las de signo contrario se atraigan. Responsables de los relámpagos o la formación de imágenes en máquinas copiadoras.

Sobre el fenómeno de los rayos: http://ific.uv.es/rei/Sabias/sabiasrayo.htm

- *Magnéticas*: actúan sobre cargas en movimiento (corrientes). Estas fuerzas, por ejemplo, permiten el movimiento de los motores

Intensidad de corriente (*i*):

cantidad de carga eléctrica que atraviesa la sección de un conductor por unidad de tiempo.

Refs. [1] y [2]

- Si en un intervalo de tiempo Δt atraviesa la sección del conductor una cantidad de carga Δq, el módulo de la intensidad de corriente se expresa: $i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$

- Se suele hablar de "corriente" en lugar de intensidad de la corriente.

- Por convenio, se asigna a la corriente el sentido del movimiento de las cargas positivas.

- La unidad de intensidad de corriente en el S.I. es el *amperio* (A): $1A = \frac{1C}{1s}$

- Si la corriente es constante hablamos de *corriente continua* y la designamos como *I*.

Intensidad de corriente

➢¿Qué cargas son las que se mueven, las positivas o las negativas?

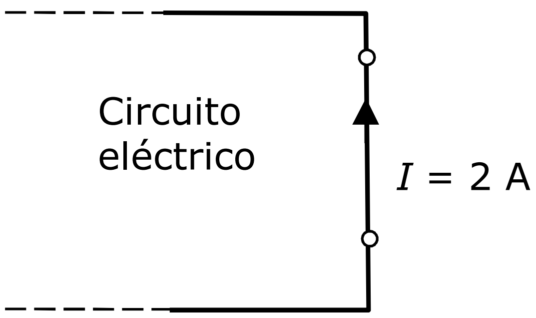
- En los *conductores sólidos* (metales en su mayoría) se mueven las cargas negativas.

- *Semiconductores* y conductores líquidos y gaseosos: se mueven cargas de los dos signos.

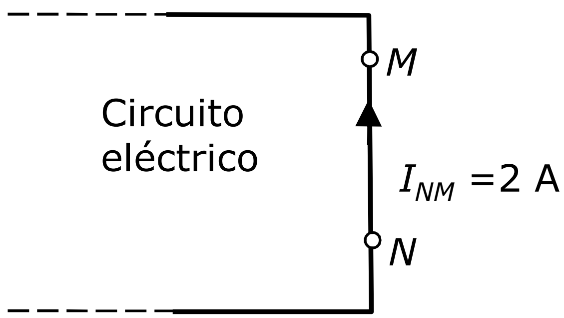
Las cargas de signos opuestos tienen igual magnitud: por eso existe el acuerdo de considerar como sentido positivo de la corriente el que tiene el movimiento de las cargas positivas.

➢¿Cómo podemos indicar en un esquema el sentido de la corriente en un conductor?

- Empleando flechas



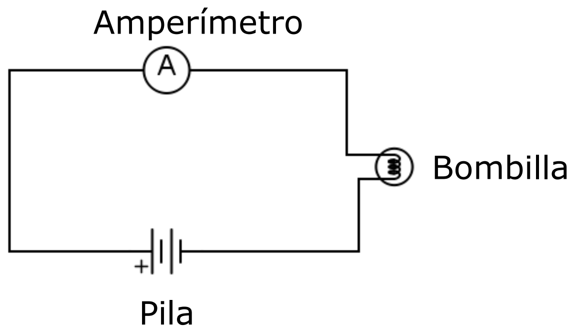
- Por medio de subíndices



Intensidad de corriente

➢¿Cómo se mide la corriente eléctrica?

Se utiliza un aparato llamado amperímetro, el cual va provisto de dos terminales de conexión que se intercalan en el circuito: de esta forma *pasa a través* del mismo la corriente que se va a medir.



➢¿Qué diferencia existe entre corriente continua y corriente alterna?

- *Corriente contin*ua (*cc*, *dc*): su valor se mantiene constante a lo largo del tiempo.
dc: iniciales de *direct current.*
Fuentes típicas de corriente continua: pilas, baterías

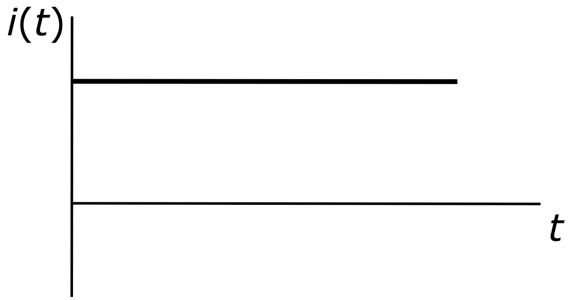
-*Corriente alterna (ca, ac)*: la variación de la corriente con el tiempo es de tipo *senoidal*.
ac: iniciales de *alternating current.*

La corriente alterna es la que más se emplea en la vida diaria (alumbrado, industria, electrodomésticos,…).

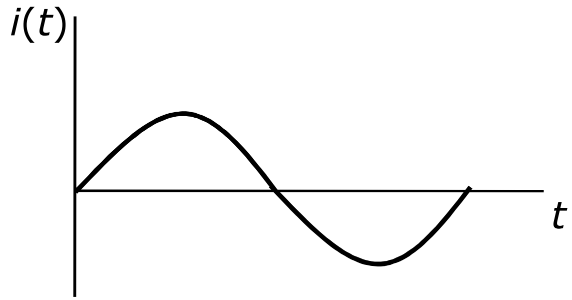
En Europa la frecuencia de la corriente alterna es de 50 hertzios (100 cambios de sentido por segundo).

Intensidad de corriente

-Representación de la variación de la corriente DC y AC:



Corriente continua



Corriente alterna

- Otros tipos de corriente: onda cuadrada, triangular, en diente de sierra,…

-En los sistemas físicos, en estado de equilibrio, hay igual número de cargas de un signo que del contrario (protones y electrones; iones positivos y negativos). Es decir, que se neutralizan mutuamente.

- *Generadores eléctricos*, o *fuentes*: utilizan *energía no eléctrica* para separar las cargas de su posición de equilibrio. Así, las cargas positivas se concentran en un terminal y las negativas en el otro: esta situación es inestable y el sistema trata de volver a su estado inicial. Si lo hace a través de un circuito, entonces se produce una corriente eléctrica. Ahora las cargas devuelven la energía que se empleó para desplazarlas en forma de *energía eléctrica*.

Energía eléctrica

Ref. [1]

- La energía (*E*), en el S.I., se mide en *julios* o *joules* (J).

¿Cuál es el tamaño de la unidad…?: se necesitan 2000 J para llevar a ebullición (100 ^{o}C) el agua de una cucharada sopera a 15 ^{o}C

-Usos industriales o domésticos:
se emplea una unidad mucho mayor, el *kilowatio-hora* (kWh)

1 kWh = 3 600 000 J

$$\underset{\text{potencia}}{\text{kW}}\ .\ \underset{\text{tiempo}}{\text{h}}$$

Con 1 kWh se lleva a ebullición 10.2 litros de agua a 15 ^{o}C (1800 cucharadas).

Cuestión: consultar un recibo de la luz y comprobar en qué unidades factura la compañía suministradora el consumo y el coste de cada unidad.

• **Fuerza electrostática** Ref. [2]

Magnitud de la fuerza ejercida entre dos cargas *q* y *q'* separadas una distancia *r*:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q \cdot q'}{r^2} \quad (N)$$

(ley de Coulomb)

ε: permitividad dieléctrica del medio; en el vacío: ε_0=8.85·10^{-12} C^2/N·m^2 1/4πε_0 = 9·10^9 N.m^2/C^2

• **Campo eléctrico (*E*):** fuerza de origen eléctrico que experimenta la unidad de carga positiva en un punto del espacio

Si en ese punto hubiera una carga *q*: $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$ Fuerza y campo son magnitudes vectoriales

Unidad del campo eléctrico en el S.I.: N/C

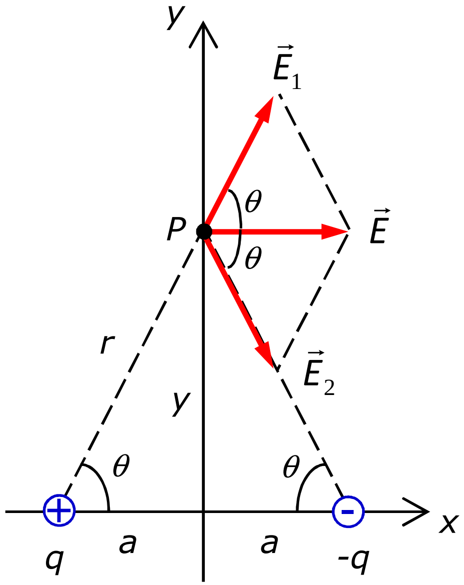
• El concepto de campo eléctrico nos permite explicar la "acción a distancia" entre cargas eléctricas (sin que exista conexión material entre ellas).

Decimos que una carga eléctrica crea un campo eléctrico en el espacio que la rodea.

Este campo ejerce a su vez una fuerza sobre otra carga presente en dicha región.

- Una carga q crea a una distancia r un campo de magnitud: $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$ (N/C)
- Magnitud de la fuerza ejercida sobre una carga q' debida al campo: $F = E \cdot q' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q \cdot q'}{r^2}$ (ley de Coulomb)

Campo eléctrico de un dipolo



$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2; \quad E_1 = E_2 = k_e\frac{q}{r^2} = k_e\frac{q}{y^2 + a^2}; \quad \left(k_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)$$

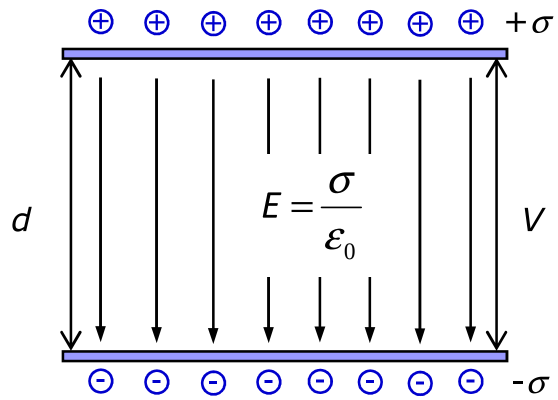
$$E = 2E_1 \cos\theta = 2E_1\frac{a}{r} = 2k_e\frac{q}{y^2+a^2}\frac{a}{\left(y^2+a^2\right)^{1/2}} = k_e\frac{2qa}{\left(y^2+a^2\right)^{3/2}}$$

$$y >> a: \quad E \cong k_e\frac{2qa}{y^3}$$

En puntos del eje y muy alejados del dipolo, $E \sim 1/r^3$

El campo debido a una carga puntual varía más lentamente (con $1/r^2$)

Campo eléctrico entre dos placas metálicas cargadas



σ: densidad superficial de carga

- El campo eléctrico entre las placas es constante y de magnitud $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$
- Está relacionado con la *diferencia de potencial* (V) entre las placas: $E = \dfrac{V}{d}$

Referencia: *Work and Voltage: Constant Electric Field*
http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/electric/elewor.html#c1

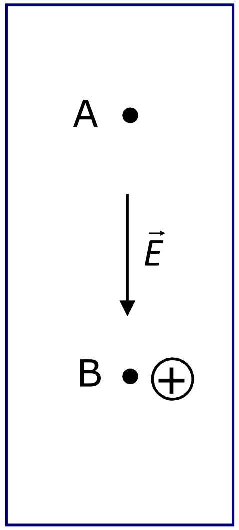
• Voltaje (tensión, diferencia de potencial):

el voltaje de un punto A respecto a otro punto B (o diferencia de potencial entre A y B) es *el trabajo que debe realizarse sobre la unidad de carga positiva en B para trasladarla hasta A* venciendo la fuerza que ejerce sobre ella el campo eléctrico

(Ref. [2])

Trabajo por unidad de carga (para un desplazamiento infinitesimal): $\frac{dW}{q} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{q} = \vec{E} \cdot d\vec{r}$

d.d.p. entre A y B: $V_{AB} = V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{r}$



El trabajo es independiente de la trayectoria seguida porque el campo eléctrico es conservativo.

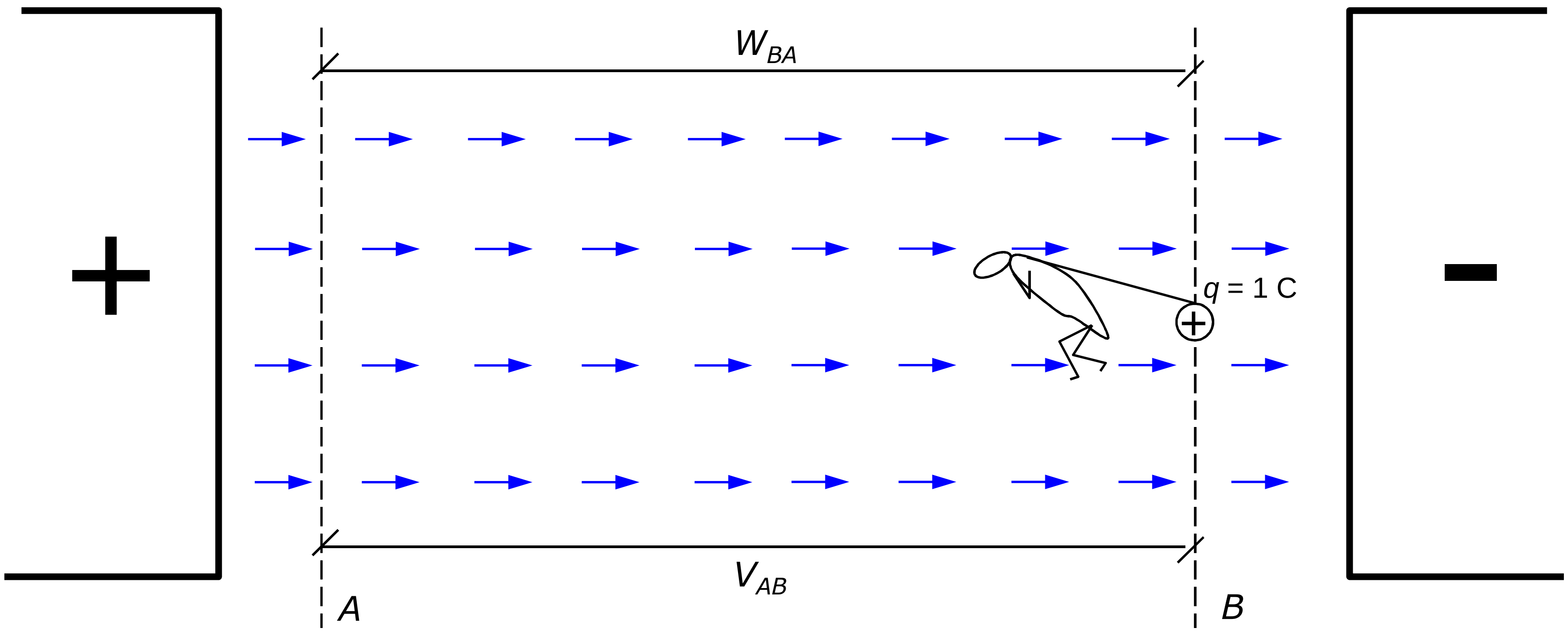
• **Unidad del voltaje o tensión: voltio (V)** 1 V = 1 N ·1 m / 1 C = 1 J / 1 C

Campo eléctrico: se puede expresar en voltios/metro (lo más habitual)

• También se introduce el voltaje como el trabajo que debe realizarse sobre la unidad de carga positiva para llevarla de un punto B con exceso de carga negativa a otro A con exceso de carga positiva

Parece lógico pensar que, para acercar una carga positiva a una región cargada positivamente, deba hacerse un trabajo para vencer las fuerzas de repulsión del campo eléctrico. Así: Voltaje = Trabajo / Carga

$$V = W / q$$



Voltaje entre dos puntos A y B.

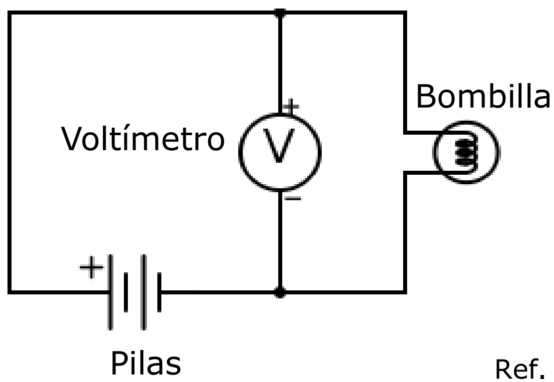
Fuente: J. López Galván, J.M. Salcedo Carretero, *'Circuitos eléctricos. Primer contacto'*, Anaya, 2005

➢¿Cómo se mide el voltaje?

Se utiliza un *voltímetro*.

Los terminales se conectan a los puntos entre los que se va a hacer la medida.

Ahora *no es necesario interrumpir el circuito* como ocurre con el amperímetro.



Ref. [1]

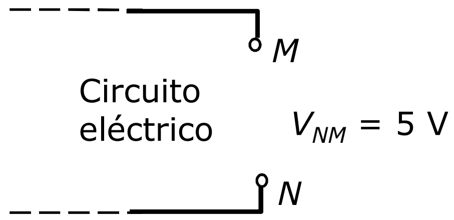
➢Muchas veces decimos que una corriente circula por un conductor. ¿Tiene sentido decir que circula un voltaje?

El voltaje (tensión) no podemos decir que circula. La corriente representa carga en movimiento, mientras que el voltaje o tensión es la energía requerida para desplazar las cargas.
Juega el mismo papel que un salto de agua: aunque corre el agua, el desnivel no.

Ref. [1]

Indicación del voltaje

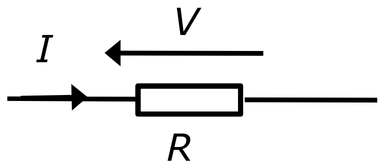
Se pueden utilizar subíndices para indicar el voltaje entre dos puntos de un circuito



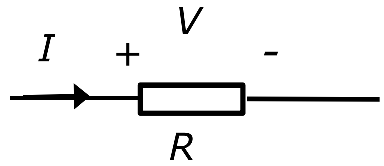
El voltaje entre dos puntos tendrá un valor o el opuesto dependiendo del orden en que los tomemos:

$$V_{NM} = V_N - V_M = -(V_M - V_N) = -V_{MN}$$

También se emplean flechas (a) o signos de polaridad (b)



(a)



(b)

Cuestiones (ref. [1])

(1) ¿Puede haber voltaje (tensión) sin circulación de corriente?

(2) ¿Cuál es el voltaje entre A y B si para desplazar 2 culombios negativos desde B hasta A se debe realizar un trabajo de 6 julios?

(3) En un circuito se han hecho las siguientes medidas: V_{AD} = 0 V, V_{CD} = -6 V, V_{BD} = -2 V
Averiguar los voltajes V_{DC}, V_{DB} , V_{DA} , V_{CB} , V_{CA} y V_{BA}.

• **Potencia (*p*):** energía intercambiada por unidad de tiempo

Este intercambio se produce a un ritmo mayor o menor. (Refs. [1] y [2])

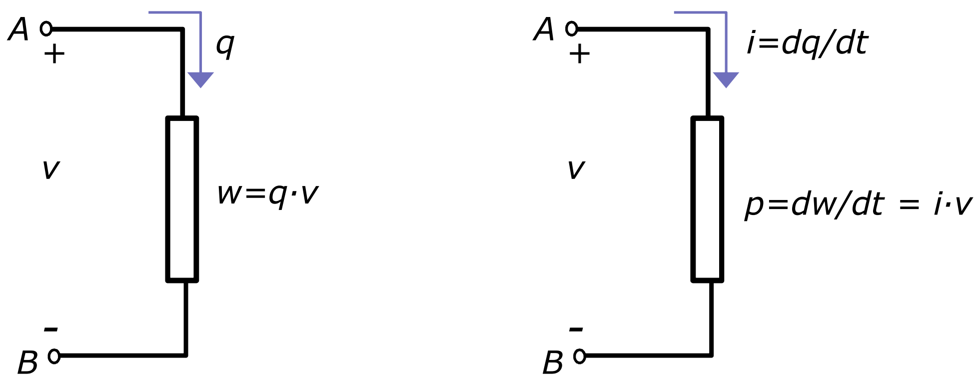
En el circuito (a) la carga *q* en *A* está a una tensión *v* respecto a *B*
→Ha recibido una energía *w* para llegar a A desde B.

Si *q* se desplaza, volverá a B devolviendo la energía *w*, con *w* = *q·v* (por definición de tensión).

Si en un tiempo *dt* circulan por el circuito *dq* cargas, devolverán la energía *dw* = *dq·v*

Se denomina *potencia* (*p*) entregada por la corriente entre A y B a *la energía que entrega por unidad de tiempo*:

$$p = \frac{dw}{dt} = \frac{dq \cdot v}{dt} = i \cdot v$$ --- circuito (b)



(a) (b)

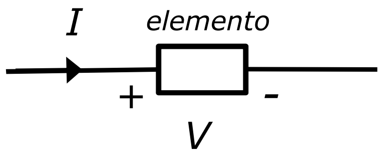
• Potencia (*p*)

- La potencia nos indica la rapidez con que se produce el intercambio de energía.

- En procesos de potencia muy diferente puede consumirse la misma cantidad de energía.
  Ej.: El arranque del motor de un coche dura unos segundos. Pero se consume la misma energía de la batería que dejando solo la radio encendida varias semanas.

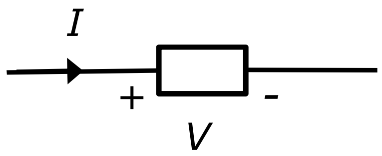
- La potencia se expresa en vatios (W).
  Si un dispositivo o sistema intercambia 1 julio por segundo, actúa con una potencia de 1 vatio: $1W = \frac{1J}{1s}$

- La potencia se expresa como el producto de la tensión por la corriente, luego también: 1 W = 1 V · 1 A

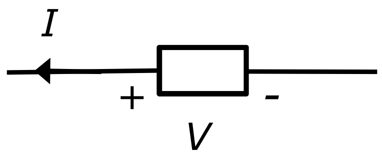


P* = *V*· *I

- Signo de la potencia:



(a) potencia positiva



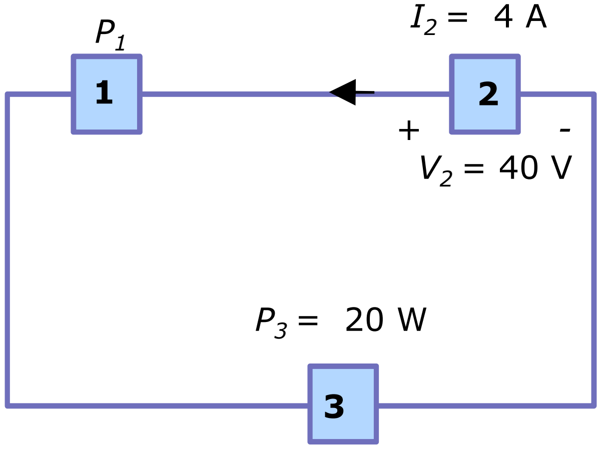
(b) potencia negativa

- **Balance de potencias:** debe cumplirse el principio de conservación de la energía (útil para comprobar cálculos)

La suma de potencias entregadas por ciertos elementos es igual pero de signo opuesto a la suma de las potencias consumidas por los otros elementos.
Por convenio:
- cada *potencia consumida* tiene *signo positivo*
- cada *potencia cedida* tiene *signo negativo*.

A este convenio a veces se le da el nombre de *egoísta* por considerarse positivo el hecho de consumir.

<u>Ejemplo 1</u>: indicar la potencia (valor y signo) correspondiente al elemento 1 (Ref.[1]).



Solución:

La suma (algebraica) de las tres potencias debe ser cero:

$P_1 + P_2 + P_3 = 0$

Potencia correspondiente al elemento 2:

$P_2 = -(40 \text{ V} \cdot 4 \text{ A}) = -160 \text{ W}$ (el elemento entrega potencia al circuito)

El elemento 3 consume potencia (20 W)

Luego: $P_1 = - P_2 - P_3 = -(-160 \text{ W}) - 20 \text{ W} = 140 \text{ W}$

Es decir, el elemento 1 consume 140 W.

Cuestiones (Ref. [1])

(1) ¿Se puede desarrollar una potencia grande con poca energía?

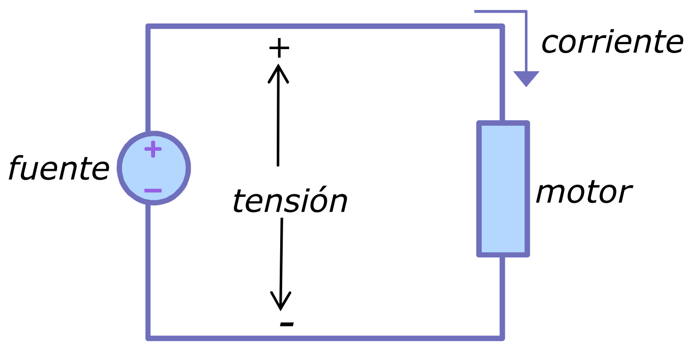
(2) Las cargas que circulan en el seno de un conductor lo hacen a una velocidad prácticamente constante, con independencia de la energía transportada. ¿Cómo se puede aumentar la potencia entregada a un elemento?

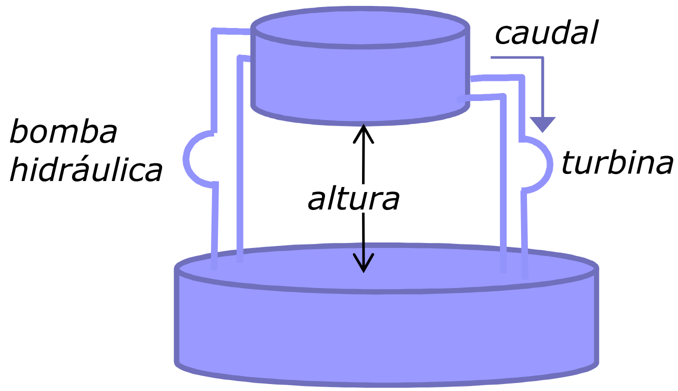
(3) Conectamos durante una hora un calentador de 2000 W. También conectamos una lámpara de 100 W durante 20 horas. ¿En qué caso se consume más energía?

Símil hidráulico

Las fuentes o generadores ceden energía a las cargas trasladándolas a un punto de mayor potencial. Un generador no recibe potencia sino que la entrega.

Si hacemos un símil o analogía entre un circuito eléctrico y uno hidráulico, la bomba hidráulica juega el papel del generador: eleva las moléculas del líquido desde el nivel inferior hasta una cierta altura, aumentando su energía potencial. La energía se devuelve cuando el líquido mueve las palas de la turbina.





Símil hidráulico (con explicaciones):

https://www.youtube.com/watch?v=Gz30Vh2hIoc

• Elementos de un circuito

(Ref. [1])

•Básicamente, los circuitos incorporan *fuentes*, *conductores* y *receptores.*

•Conviene simplificar las características de estos elementos para plantear y resolver los problemas en teoría de circuitos.

•Un elemento queda completamente determinado si se conocen el valor y el signo de la corriente que lo atraviesa y el voltaje entre sus terminales. Estos determinan la potencia y la energía.

•Resolver un circuito consiste en *determinar V e I en cada elemento*. La corriente y voltaje de un elemento afectan a la corriente y voltaje de los elementos restantes.

•Los *elementos activos* ceden energía al circuito (generadores, pilas, baterías,…)
Los *elementos pasivos* consumen energía del circuito (motores, lámparas, altavoces,…)

• Generadores (fuentes) de energía eléctrica: dispositivos que convierten en energía eléctrica cualquier otra forma de energía. Ejemplos:

•Baterías y pilas: transforman energía química en eléctrica

•Alternadores: proporcionan energía eléctrica a partir de energía mecánica (de los saltos de agua, de las turbinas de vapor, o del viento)

•Células fotovoltaicas: transforman la energía luminosa en eléctrica

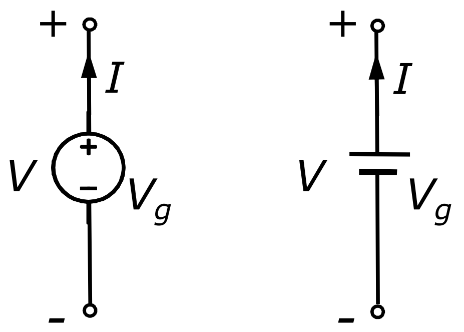
•Otros: pilas de combustible, células termoeléctricas,…

• ¿Las pilas y baterías se pueden considerar fuentes ideales? (Ref. [1])

•Las fuentes ideales de voltaje serían como pilas perfectas, que nunca se agotan y cuyo voltaje nunca disminuye. Actúan *manteniendo invariable el voltaje entre sus extremos*, cediendo potencia y permitiendo que el resto del circuito fije la corriente. Volviendo al símil hidráulico, juegan el papel de un salto de agua.

•Las fuentes ideales de corriente ceden potencia y establecen la corriente (el resto del circuito fija el voltaje).

Fuente independiente de voltaje

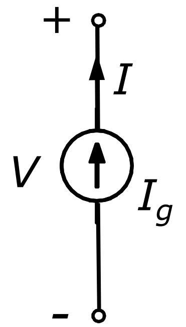


$V = V_g \quad \forall I$

V_g: *voltaje nominal*

Mantiene su voltaje nominal con independencia de la corriente que la atraviese

Fuente independiente de corriente



$I = I_g \quad \forall V$

I_g: *corriente nominal*

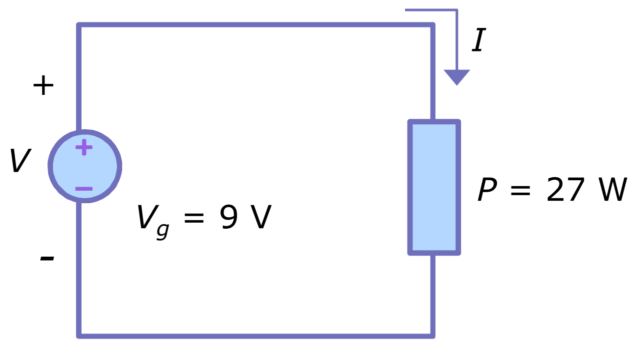
Mantiene su corriente nominal con independencia del voltaje entre sus extremos

Ejemplo 2 (Ref. [1])

En el circuito mostrado la fuente ideal de tensión hace que el elemento consuma una potencia de 27 W.

(a) ¿Qué corriente hará circular por el elemento?

(b) ¿Y si la potencia hubiera sido de 54 000 W?



Solución:

(a) La fuente aplica una tensión V = 9 V al receptor. Por tanto:

$I = P/V$ =27 W / 9 V = 3 A

(b) Ahora $I = P/V$ =54 000 W / 9 V = 6 000 A

El resto del circuito (el receptor) ha fijado la corriente en los dos casos.

Cuestiones

•¿Tiene sentido conectar entre los mismos puntos dos o más fuentes de diferente valor nominal?

•¿Pueden conectarse dos fuentes una a continuación de otra?

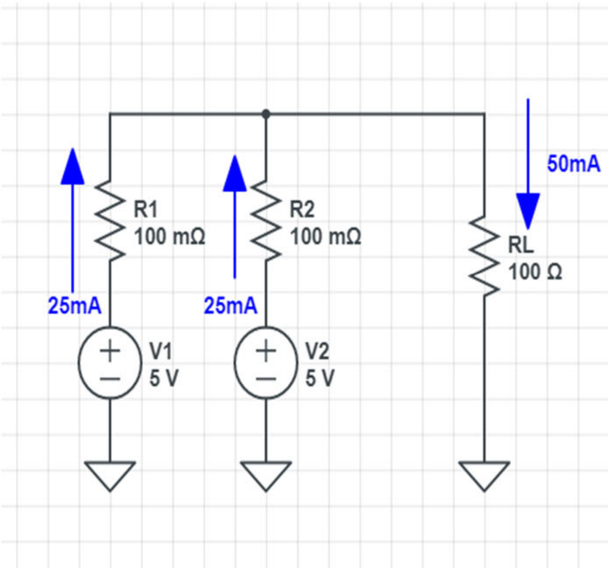
<u>Ejemplo 2</u> (Ref. [1])

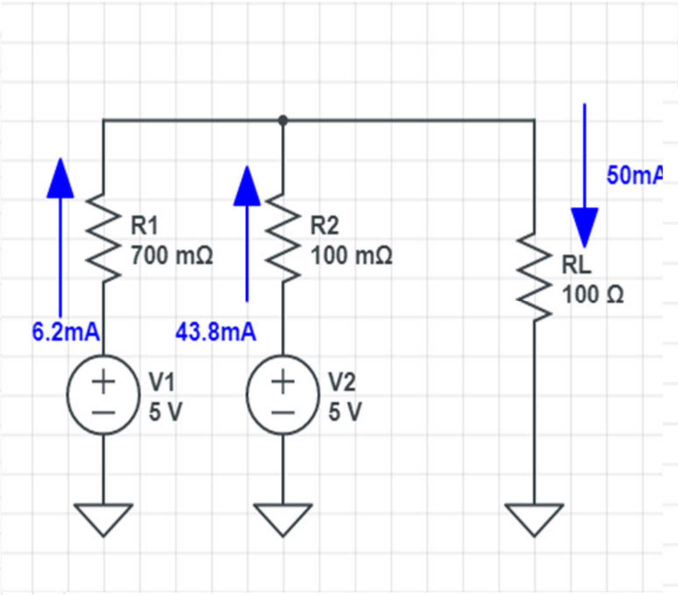
Tres situaciones:

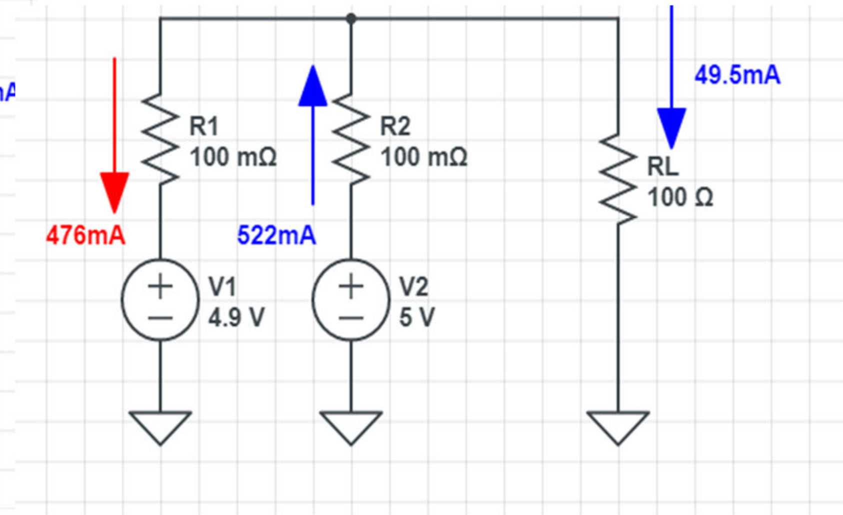
1.Si ambas tienen exactamente el mismo valor de voltaje, y características idénticas, a nivel de impedancia, pues es lo mismo que tener una sola fuente con más capacidad de suministrar corriente (A). Cada fuente provee la mitad de la corriente total que va a la carga.

2.Si ambas tienen exactamente el mismo valor de voltaje, y características diferentes, la que tenga menor impedancia, es la que suministra la **mayor** corriente a la carga, mientras que la que tiene la mayor impedancia, provee una porción menor de corriente a la carga.

3.Si son diferentes en cuanto al voltaje (ej. incluso +/-0.1V), hay un inconveniente. La que tenga mayor voltaje, es la que termina suministrando **toda** la corriente a la carga, y **también le provee corriente a la fuente con menos voltaje**.







Ejemplo 3: ejercicio propuesto en *Fundamentals of Electrical Engineering* (G. Rizzoni, McGraw-Hill, 2009).

If an electric heater requires 23 A at 110 V, determine

(a) The power it dissipates as heat or other losses.

(b) The energy dissipated by the heater in a 24-h period.

(c) The cost of the energy if the power company charges at the rate 6 cents/kWh.

Solución.

(a) En los Estados Unidos se emplea corriente alterna de 120 voltios eficaces y frecuencia 60 Hz.

En este ejercicio voltaje y corriente también se expresan como valores eficaces (rms). La resistencia del calentador disipa una potencia $P = VI = (110\text{ V})(23\text{ A}) = 2.53\text{ kW}$.

(b) Como el calentador disipa la misma potencia durante 24 h, la energía consumida se obtiene multiplicando potencia y tiempo: $W = (2.53\text{ kW})(24\text{ h}) = 60.72\text{ kWh} = 218.6\text{ MJ}$.

Si la potencia no toma un valor constante, hay que integrarla durante el intervalo en cuestión para determinar el consume de energía.

(c) Teniendo en cuenta la tarifa el coste supone (60.72 kWh)(6 céntimos/kWh) = 3.64 $.

Ejemplo 4: ejercicio propuesto en *Fundamentals of Electrical Engineering* (G. Rizzoni, McGraw-Hill, 2009).

A GE SoftWhite Longlife lightbulb is rated as follows:

P_R = rated power = 60 W; P_{OR} = rated optical power = 820 lumens (lm) (average); 1 lumen = 1/680 W.

Operating life = 1500 h (average); V_R = rated operating voltage = 115 V.

The resistance of the filament of the bulb, measured with a standard multimeter, is 16.7 Ω. When the bulb is connected into a circuit and is operating at the rated values given above, determine

(a) The resistance of the filament. (b) The efficiency of the bulb.

Solución.- (a) $P_R = V_R^2/R \rightarrow R = V_R^2/P_R = 115^2/60 = 220.4\ \Omega$.

(b) Eficiencia (%): $(P_{OR}/P_R)\times 100 = [(820/680)/60]\times 100 = 2$ %.

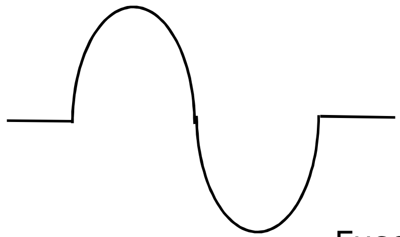
Ejercicio.

The resistive elements of fuses, lightbulbs, heaters, etc., are significantly nonlinear (i.e., the resistance is dependent on the current through the element). Assume the resistance of a fuse is given by the expression $R = R_0[1 + A(T - T_0)]$ with $T - T_0 = kP$; $T_0 = 25\ ^{o}C$; $A = 0.7[^{o}C]^{-1}$; $k = 0.35\ ^{o}C/W$; $R_0 = 0.11\ \Omega$; and P is the power dissipated in the resistive element of the fuse.

Determine the rated current at which the circuit will melt and open, that is, "blow." (Hint: The fuse blows when R becomes infinite.)

Propuesto en *Fundamentals of Electrical Engineering* (G. Rizzoni, McGraw-Hill, 2009).

Respuesta: 6.09 A.

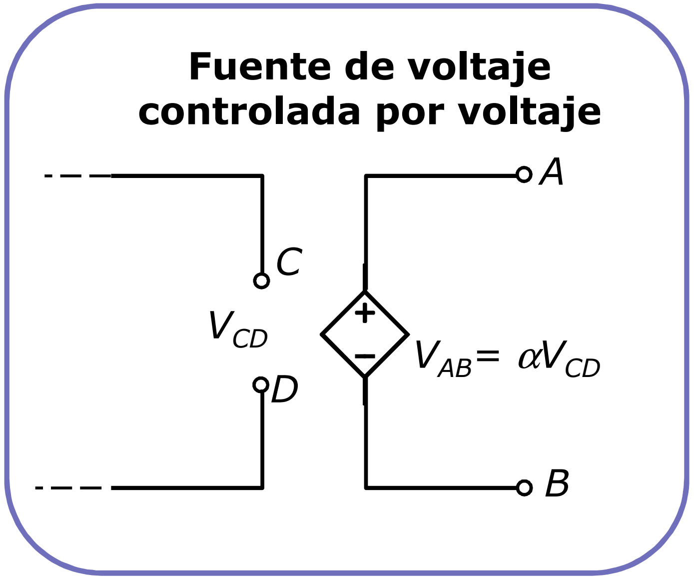


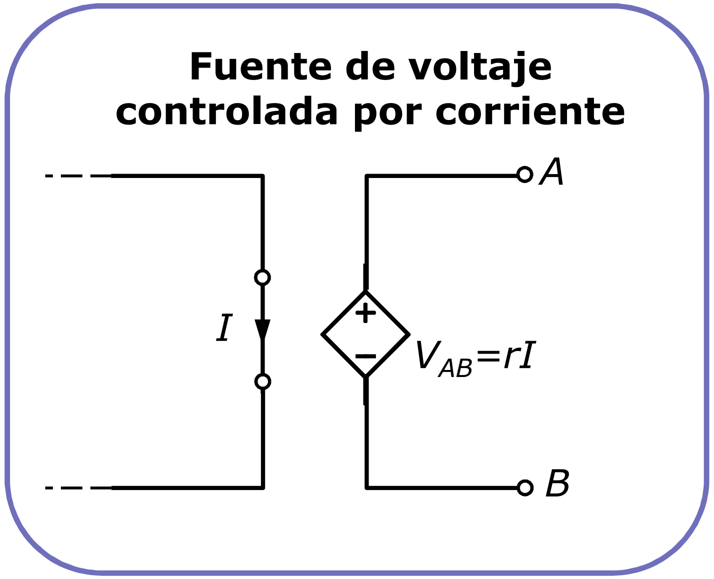
Fuse

•Fuentes controladas

•*Fuente de voltaje (corriente) controlada*: su voltaje (corriente) depende de otro voltaje o corriente (el voltaje o corriente de control).

•Se emplean en el análisis de circuitos en los modelos de los dispositivos electrónicos (transistores bipolares, MOSFET,…) o los amplificadores.





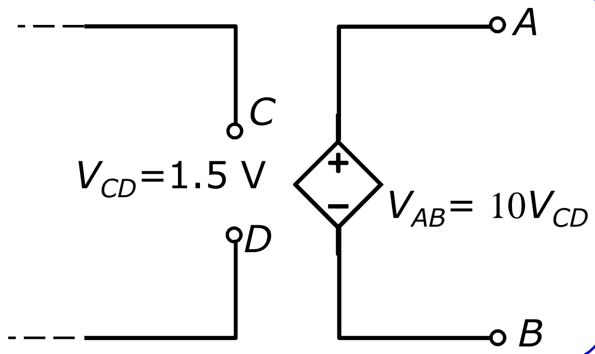
Ejemplo 5 (Ref. [1])

En el circuito con la fuente controlada de la figura:

(a) Indicar el valor de la tensión entre *A* y *B*.

(b)¿Qué aparato doméstico podría representarse con este circuito?

(c)¿Cómo se puede aumentar el voltaje entre *A* y *B*?



Solución:

(a) Siendo el voltaje de control V_{CD} =1.5V, la tensión entre *A* y *B* se calcula de forma inmediata:

$$V_{AB} = 10 \cdot V_{CD} = 10 \cdot 1.5 \text{ V} = 15 \text{ V}$$

(b) Suponiendo que en la entrada (la tensión entre *C* y *D*) se aplica una señal alterna, la salida (entre *A y B*) tiene una amplitud 10 veces mayor. Es decir, el circuito amplifica la señal, y podría representar un amplificador de un solo canal (monofónico) de ganancia 10.

(c) Podemos aumentar la ganancia por encima de 10.
O también instalar otra fuente controlada de tensión cuya tensión de control fuera de 15 V (tensión de salida de la primera etapa) y con ganancia > 1.

- **Conductores:** conectan fuentes y receptores, permitiendo el paso de corriente y el intercambio de energía. (Ref. [1])

- Los receptores son elementos pasivos que reciben la energía de las fuentes y la transforman en otro tipo de energía. Los receptores más comunes son resistencias, bobinas y condensadores.

- Las resistencias (resistores) transforman la energía eléctrica en calor.

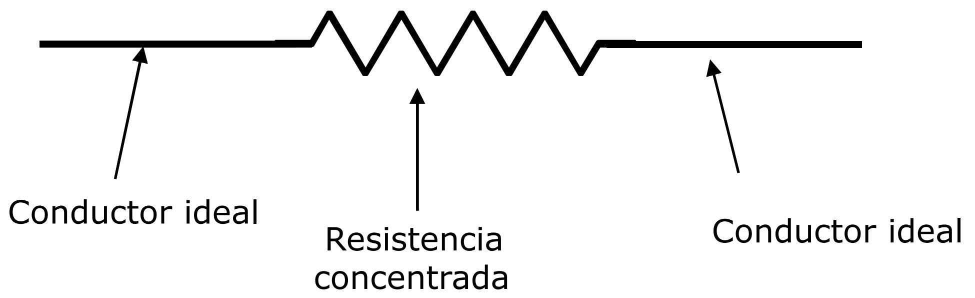
- Los circuitos se construyen con conductores sólidos como los metales (los más usuales).

- También existen conductores líquidos. Por ejemplo, los electrolitos de las baterías.

- Y también conductores gaseosos, como los utilizados en tubos fluorescentes.

- Pero los conductores presentan una dificultad mayor o menor al paso de la corriente eléctrica. En los esquemas se considera que la resistencia de los conductores es nula, salvo en las zonas indicadas.

- En el análisis de circuitos de los tendidos eléctricos de gran longitud esta simplificación no se suele aplica: en este caso se trata la resistencia como un parámetro *distribuido* (y no como un parámetro *concentrado* como en la figura).



Cuestión: ¿Qué tipo de conductores son la mina de grafito de un lápiz, el agua de mar o el vapor de mercurio?

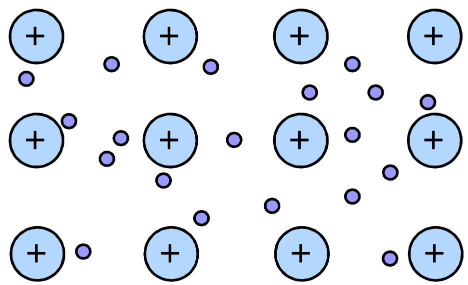
Movimiento de partículas cargadas en respuesta a un campo eléctrico

•El flujo de carga o corriente en un metal se debe al movimiento de electrones. En los metales los electrones más externos (de valencia) se mueven con relativa libertad.

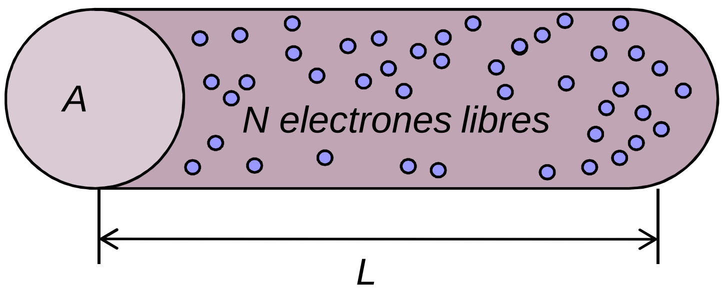
•Pero chocan con las partículas fijas: parte de su energía cinética se pierde y se transforma en calor (efecto Joule).

•Debido a la agitación térmica, los electrones están en constante movimiento, pero su dirección se modifica debido a las colisiones. La distancia entre colisiones se llama *recorrido libre medio*.

•Si no se aplica una tensión, el movimiento aleatorio de los electrones da lugar a una corriente media nula



Iones positivos y electrones libres en un metal



Sección de un conductor metálico

Movimiento de partículas cargadas en respuesta a un campo eléctrico

•Al aplicarse una tensión se crea un campo eléctrico capaz de desplazar a los electrones *por arrastre* (en inglés, *drift*). Supongamos que el campo tiene un valor constante, E. Entonces, en promedio, los electrones se desplazan a una velocidad, la velocidad de arrastre (u), proporcional al campo: $u = \mu E$

El factor de proporcionalidad μ se denomina *movilidad*. Se expresa en $m^2/V\cdot s$

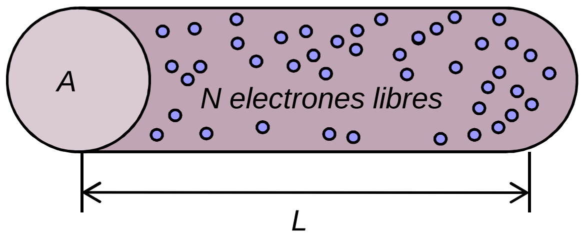
N: número de electrones libres en la sección del conductor
L: longitud de la sección
A: área de la sección transversal

Se aplica un campo (dirigido hacia la derecha): los electrones se mueven hacia la izquierda

Recorren la distancia L en un tiempo Δt: $L = u\Delta t$
→Se crea una corriente (hacia la derecha, sentido convencional): $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$

Introduciendo la *concentración* n como el número de cargas por unidad de volumen: $n = N/V = N/LA$

→$\Delta q = q_e N = q_e Vn = q_e LAn$ $\quad \rightarrow I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{q_e LAn}{L/u} = q_e uAn = q_e \mu EAn$



Sección de un conductor metálico

E introduciendo la *densidad de corriente J* como: $J = I/A$

→ $\boxed{J = nq_e\mu E}$ *ley de Ohm*

$I = JA = nq_e\mu(V/L)A = V/R$ $\quad R = \rho L/A$ $\quad \rho = 1/nq_e\mu$ (*resistividad* , inversa de la *conductividad,* σ)

1. Técnicas de análisis de circuitos eléctricos: revisión

1.1 Magnitudes eléctricas fundamentales.
Fuentes de energía eléctrica. Conductores. Resistencias

1.2 Análisis de circuitos resistivos en continua

1.3 Señales alternas. Condensadores. Bobinas

1.4 Circuitos RC: respuesta a señales en escalón.
Respuesta a una onda cuadrada

1.5 Respuesta a señales senoidales

1.6 Transformadores

1.2 Análisis de circuitos resistivos en continua

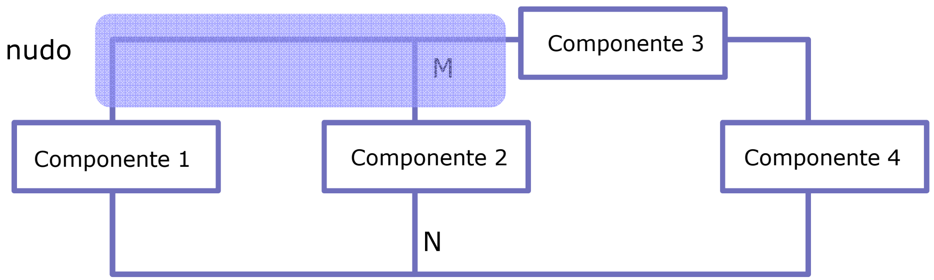
Información recopilada principalmente de las referencias:

1. J. López Galván, J.M. Salcedo Carretero: *Circuitos eléctricos. Primer contacto*, Anaya, 2005.
2. Ll. Prat (ed.): *Circuitos y dispositivos electrónicos. Fundamentos de Electrónica*, Eds. UPC, 2010.
3. D. L. Eggleston: *Basic Electronics for Scientists and Engineers*, Cambridge University Press, 2011.

- Los conductores conectan fuentes y receptores en los circuitos. En la práctica los elementos se interconectan con hilos metálicos de una cierta longitud y sección (o pistas metálicas en los circuitos impresos).

- Los puntos de un mismo conductor supondremos que están a la misma tensión
 (la tensión puede variar ligeramente al pasar la corriente: pero la aproximación de conductor ideal suele dar resultados precisos).

- Un *nudo* es un punto de conexión de dos o más elementos de un circuito.

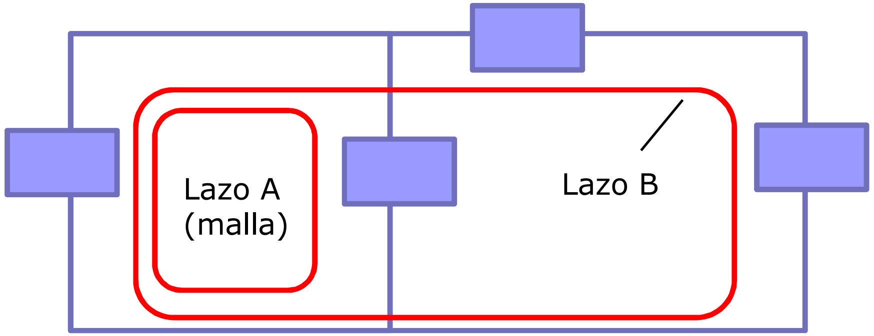


Un nudo no necesariamente se representa con un punto geométrico: corresponde a una parte de un conductor o unión de conductores

- Una *rama* es un camino eléctrico entre dos nudos que incluye por lo menos un elemento.
 El circuito de la figura tiene tres ramas que unen los nudos M y N: la rama con el componente 1, la rama con el componente 2 y la rama con los componentes 3 y 4 en serie

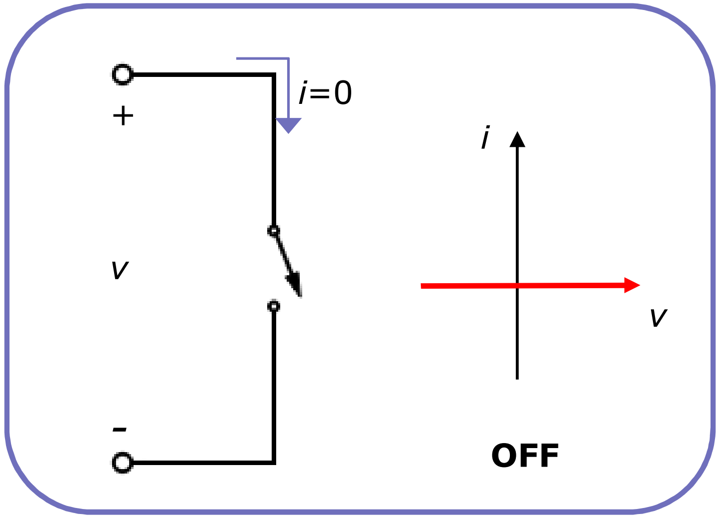
- Un *lazo* es un camino cerrado formado por ramas que no pasa por el mismo nudo más de una vez.

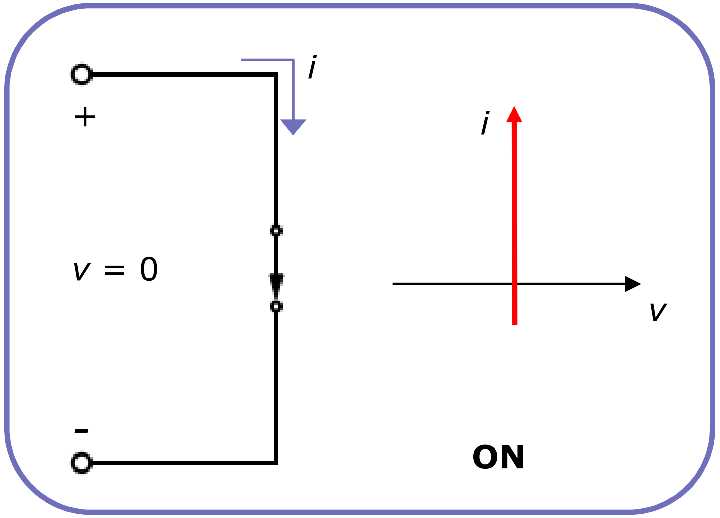
- Un *lazo* es un camino cerrado formado por ramas que no pasa por el mismo nudo más de una vez. Un lazo que no contiene otro en su interior se denomina *malla*.



- Otro elemento de interconexión: el *interruptor*. Tienen dos estados: abierto o cerrado (en inglés *OFF* y *ON*). Si está abierto no hay un camino conductor entre sus terminales y no pasa corriente aunque se aplique tensión (suponemos que el vacío impide el paso de corriente).

- Si está cerrado, existe un camino conductor entre sus terminales y se dice que existe un *cortocircuito* entre ambos.





•*Ley de Kirchhoff de corrientes (KCL)*: la suma de las corrientes entrantes en un nudo debe ser igual a la suma de las corrientes salientes.

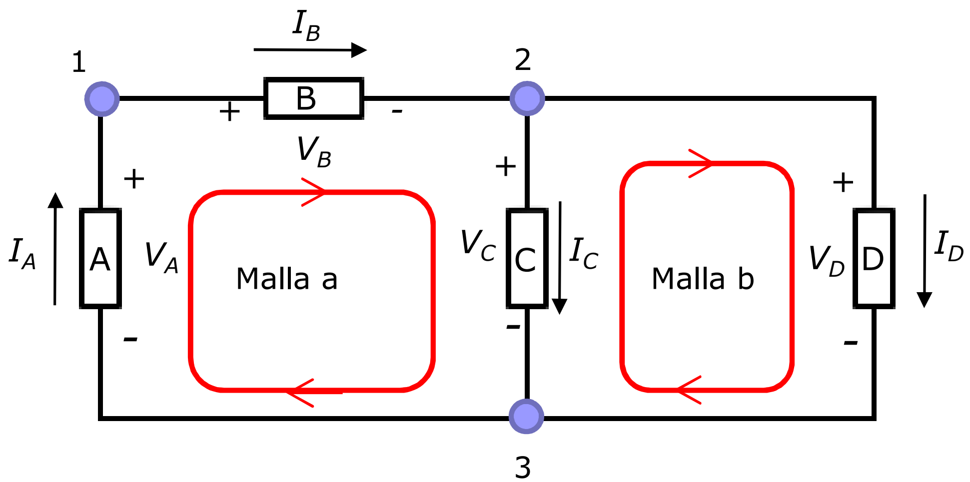
Circuito de la figura: $I_B = I_C + I_D$ (nudo 2)

•*Ley de Kirchhoff de tensiones (KVL)*: la suma algebraica de las diferencias de tensión al recorrer una malla o lazo en un mismo sentido debe ser nula.

Circuito de la figura: $(+V_A) + (-V_B) + (-V_C) = 0$ (malla a)

Obs.- En general los sentidos de las corrientes o los signos de las d.d.p. no se conocen de antemano, por lo que se empieza asignándolos de forma arbitraria.

Cuando se recorre la malla en un cierto sentido:
- al ir de una marca "-" a una marca "+" se asigna un signo "+" a la d.d.p.: hay una "subida" de tensión.
- al ir de una marca "+" a una marca "-" se asigna un signo "-" a la d.d.p.: hay una "caída" de tensión.



Ref. [2]

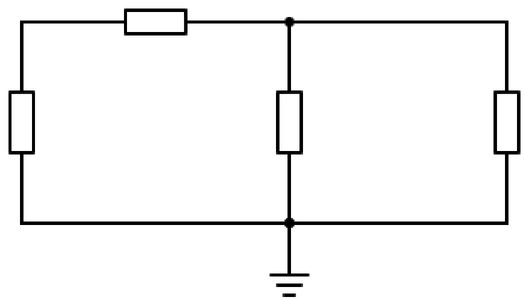
•Hemos introducido la tensión (voltaje) como una magnitud que se define entre dos puntos (como la la altura en el campo gravitatorio).

•Se puede tomar el potencial de un punto como potencial de referencia. Las tensiones del resto de puntos se expresan como diferencias respecto al potencial de referencia.

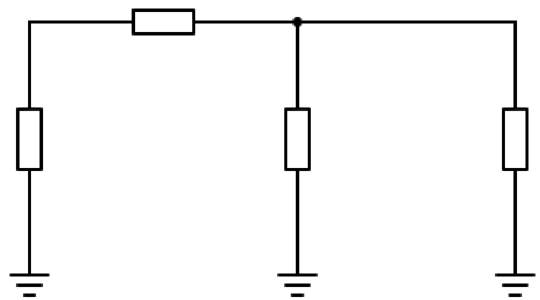
•Este punto de referencia lo denominamos “tierra” o "masa" y se identifica con uno de los símbolos indicados .

•En el esquema del circuito "se conectan" a masa todos los puntos a la tensión de referencia. Todos estos puntos están unidos entre por el conductor de "masa" pero este conductor no se dibuja.

Símbolos del terminal de masa



Circuito original (se muestra el terminal de masa)



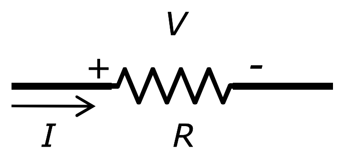
Esquema equivalente en el que se muestran los puntos conectados a masa. Todos estos puntos están interconectados.

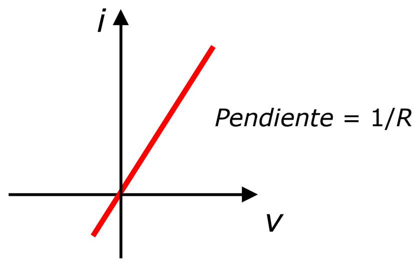
Ref. [2]

- Resistencia eléctrica (*R*): se trata de un elemento pasivo que dificulta el paso de la corriente. Este elemento transforma la energía eléctrica en calor. También se emplea el término *resistor*.

- En una resistencia la relación entre corriente y tensión es *lineal* (ley de Ohm):

$$V = RI \leftrightarrow I = V / R$$





- La resistencia se expresa en *ohmios* (Ω). Una resistencia tiene un valor de 1 ohmio si, al aplicar entre sus extremos una tensión de 1 voltio, circula a través de ella una corriente de 1 amperio:

$$1\ \Omega = 1\ \text{V} / 1\ \text{A}$$

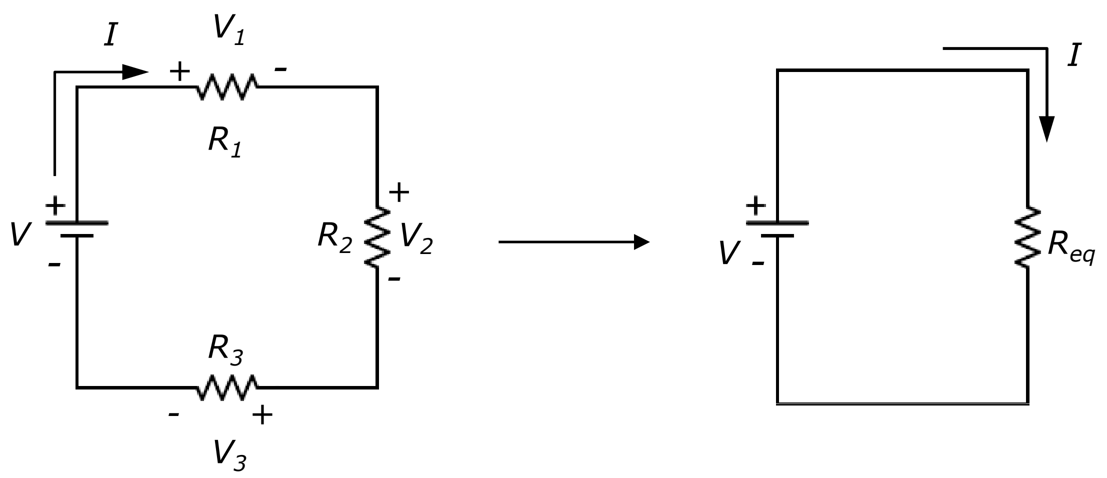
- A veces se emplea la conductancia (*G*) en lugar de la resistencia.

Se define como la inversa de la resistencia: $G = 1/R$

G se expresa en el S.I. en *siemens* (S)

- <u>Asociación de resistencias en serie</u>: por todas las resistencias pasa la misma la corriente

- Se puede sustituir la asociación por una única resistencia (resistencia equivalente)



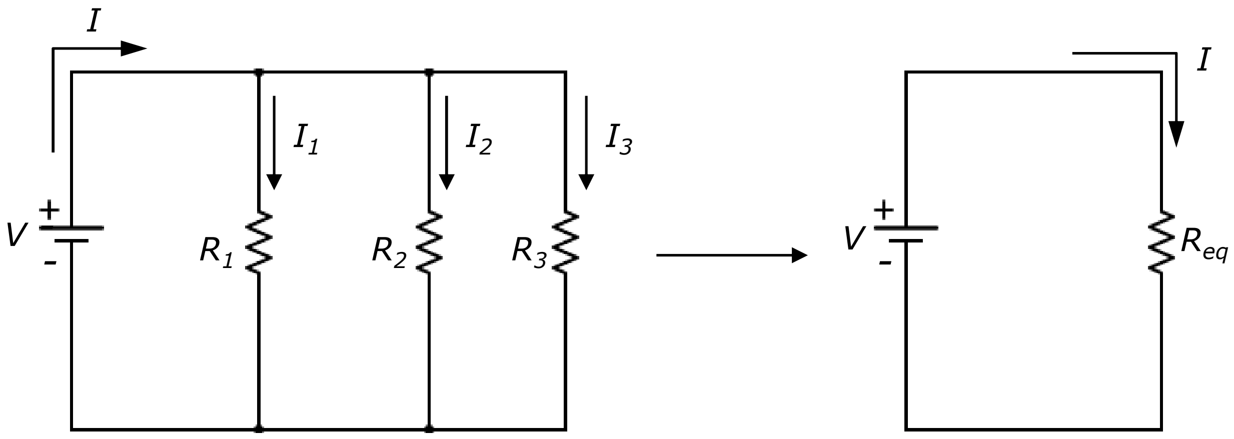
Aplicamos la ley de Kirchoff de tensiones (KVL):

$$V - V_1 - V_2 - V_3 = 0 \rightarrow$$
$$V = V_1 + V_2 + V_3 =$$
$$= IR_1 + IR_2 + IR_3 = I(R_1 + R_2 + R_3) = IR_{eq} \rightarrow R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$$

$$R_{eq} = \sum R_i$$

En este caso las resistencias forman un <u>divisor de tensión</u>

• <u>Asociación de resistencias en paralelo</u>: a todas las resistencias se les aplica la misma tensión



Ahora las resistencias forman un divisor de corriente.

Aplicamos la ley de Kirchof de corrientes (KCL):

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \frac{V}{R_3} = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) = \frac{V}{R_{eq}} \rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

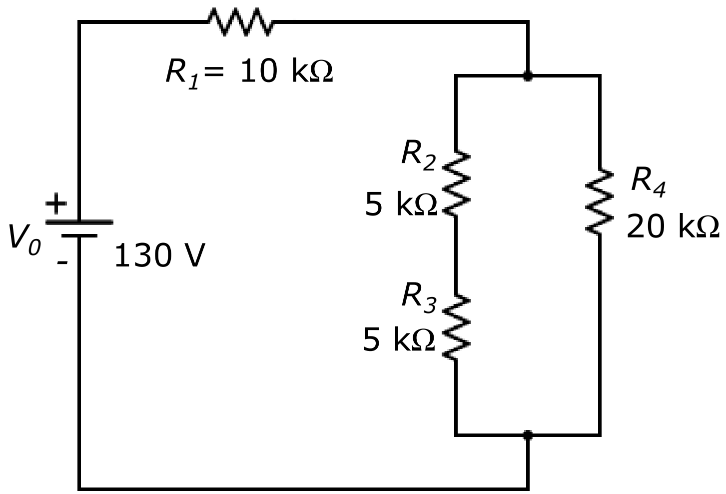
$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum \frac{1}{R_i}$$

Caso particular (dos resistencias en paralelo):

$$R_1 \| R_2 = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Ejemplo 1
(planteado en *Basic Electronics for Scientists and Engineers*, por D. L. Eggleston; Cambridge University Press, 2011).

En el circuito de la figura:
(a) ¿Qué corriente circula a través de la resistencia de 20 kΩ?
(b) ¿Cuál debe ser su potencia nominal (*power rating*)?



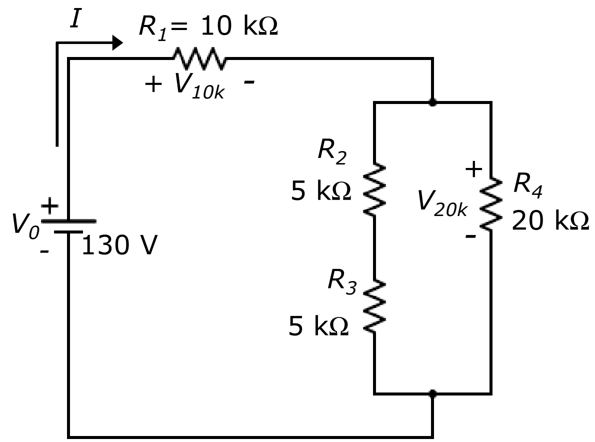
Solución.-
(a) Hay más de una forma de resolver el problema. En este caso, utilizaremos las reglas de asociación de resistencias y trataremos de encontrar relaciones sencillas por simple inspección del circuito.

Como se pide calcular la corriente por la resistencia de 20 k, podemos calcular la caída de tensión en esta resistencia (V_{20k}) y deducir la corriente a partir de la ley de Ohm.

Así, el problema se reduce a calcular la caída de tensión en la resistencia de 10 k, ya que:

$$V_{20k} = 130\text{ V} - V_{10k} \quad \text{(ley KVL)}$$

Esto nos obliga a conocer la corriente I por la resistencia de 10 k, que coincide con la entregada por la fuente V_0.



Ejemplo 1 (cont.)

(a) Para calcular la corriente I necesitamos encontrar la resistencia equivalente del circuito conectado a la fuente de tensión. A continuación se indican los pasos del proceso de cálculo:

1. La asociación en serie de las resistencias R_2 y R_3 es la resistencia

$$R_{eq1} = R_2 + R_3 = 5\ \text{k}\Omega + 5\ \text{k}\Omega = 10\ \text{k}\Omega .$$

2. La resistencia R_{eq1} está en paralelo con R_4, luego la resistencia de esta asociación se calcula ahora como:

$$R_{eq2} = R_{eq1} \| R_4 = \frac{R_{eq1} R_4}{R_{eq1} + R_4} = \frac{(10k\Omega)(20k\Omega)}{10k\Omega + 20k\Omega} = 6.67k\Omega$$

3. R_{eq2} está en serie con R_1, de modo que la resistencia equivalente del conjunto será:

$$R_{eq} = R_{eq2} + R_1 = 6.67\ \text{k}\Omega + 10\ \text{k}\Omega = 16.67\ \text{k}\Omega$$

4. Calculamos la corriente que sale de la fuente V_0: $I = \frac{V_0}{R_{eq}} = \frac{130V}{16.67k\Omega} = 7.8mA$

5. Aplicando la ley KVL: 130 V - (7.8 mA)(10 kΩ) - V_{20k} = 0.

→ V_{20k} = 52 V.

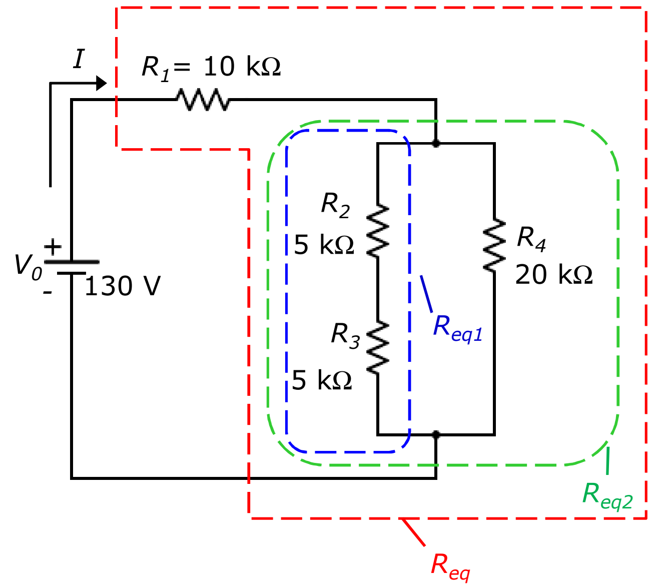
6. Aplicando la ley de Ohm: I_{20k} = 52 V / 20 kΩ = 2.6 mA

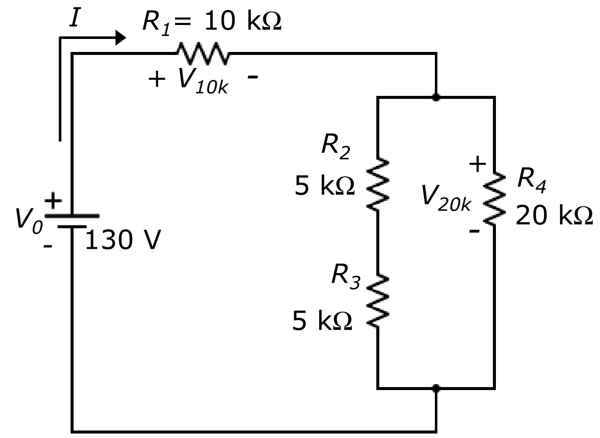
Vemos que esta corriente es menor que la corriente I que sale de la batería, como debe ocurrir. El resto circula por las resistencias de 5 k.

(b) La potencia consumida por la resistencia de 20 k es:

$$P = VI = I^2 R = \left(2.6 \times 10^{-3}\right)^2 \left(2 \times 10^4\right) = 0.135W$$

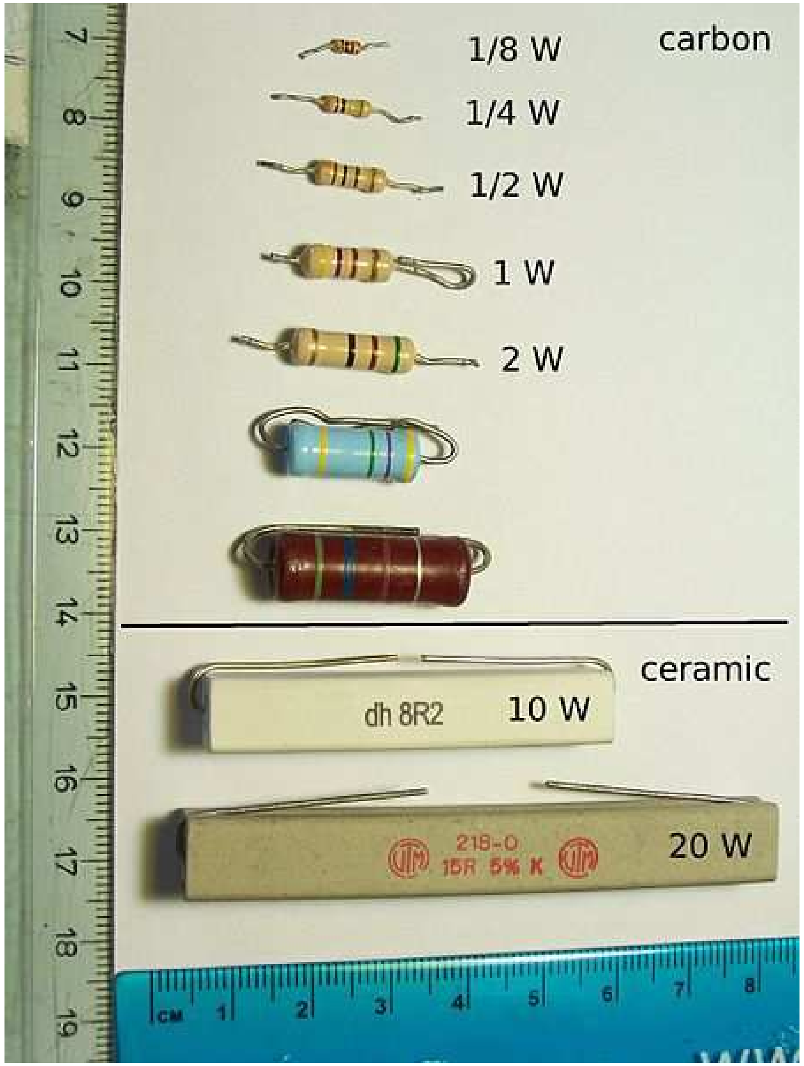
Las resistencias comerciales tienen como potencias nominales 1/8 W, ¼ W, 0.5 W, 1 W (y valores superiores a estos).
No podemos utilizar una resistencia de 1/8 W, sino de ¼ W (o una potencia nominal mayor).





Size comparison of axial-lead resistors.

(Fuente: https://en.wikipedia.org/wiki/Resistor)



An aluminium-encased power resistor rated for dissipation of 50 W when mounted on a heat-sink.

Fuente:https://en.wikipedia.org/wiki/Resistor

Más información en el siguiente enlace:

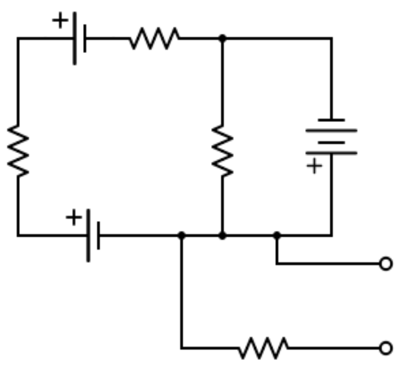
https://www.inventable.eu/ 2015/07/24/potencia-resistencias-comunes/

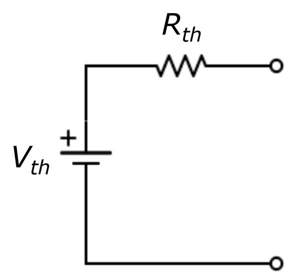
Circuitos equivalentes de Thévenin y Norton

El teorema de Thévenin establece que cualquier red de dos terminales se puede sustituir por una combinación en serie de una fuente de tensión y una resistencia.

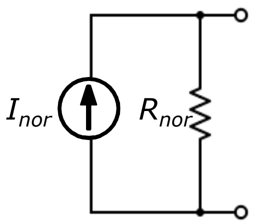
Y el teorema de Norton establece que dicha red se puede sustituir por una combinación en paralelo de una una fuente de corriente y una resistencia.

Circuito original





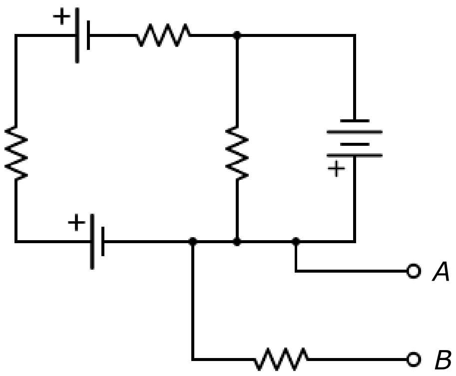
Circuito equivalente de Thévenin:
fuente de tensión en serie con una resistencia
(fuente de tensión real)

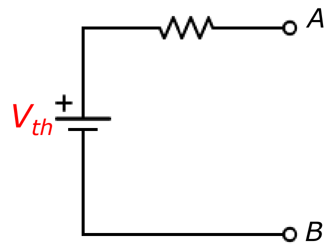


Circuito equivalente de Norton:
fuente de corriente en paralelo con una resistencia
(fuente de corriente real)

Circuitos equivalentes de Thévenin y Norton

- Determinación de V_{th} : es la *tensión a circuito abierto* entre los terminales A y B en el circuito original
  ("no se conecta nada" entre A y B)

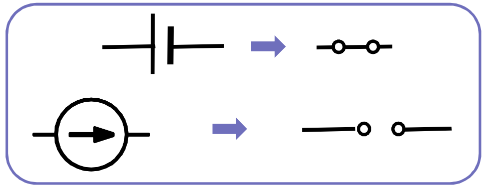


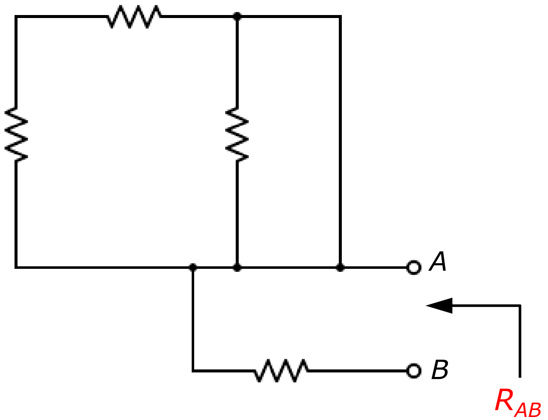


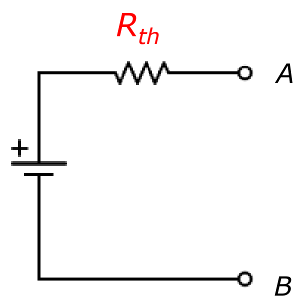
V_{th} = V_{AB} (en circuito abierto)

- Determinación de R_{th}: deben *anularse las fuentes independientes* y calcular la resistencia entre los terminales A y B en el circuito original.

Para anular una fuente de tensión (corriente) se sustituye por un cortocircuito (circuito abierto)





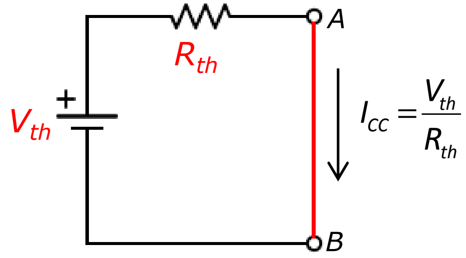


R_{th} = R_{AB}
(se anulan las fuentes independientes)

Circuitos equivalentes de Thévenin y Norton (cont.)

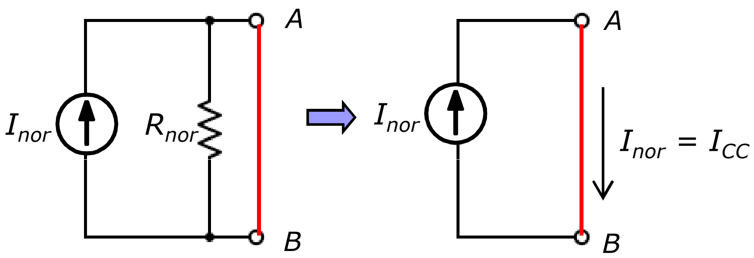
- Determinación de R_{th} (otro método).-
  V_{th} y R_{th} están relacionadas con la corriente de cortocircuito (I_{CC}):

  Entonces, determinando I_{CC} en el circuito original: $R_{th} = \frac{V_{th}}{I_{CC}}$



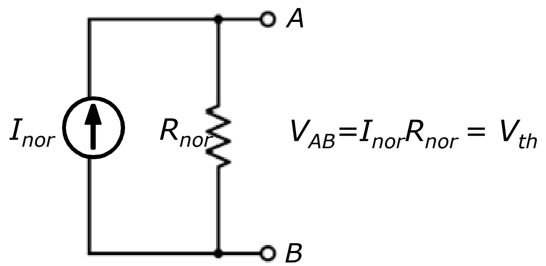
- Equivalente de Norton.- Determinación de I_{nor}:
  se calcula la corriente de cortocircuito I_{CC} en el circuito original

  Cortocircuitando los terminales del equivalente Norton,
  se anula el efecto de R_{nor} y por el cable circula I_{nor}. Luego $I_{nor} = I_{CC}$.

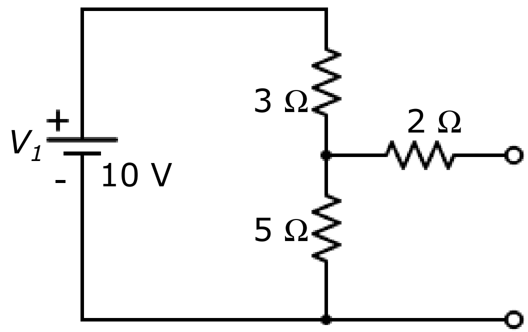


Determinación de R_{nor}:
La tensión en circuito abierto en los terminales del equivalente Norton debe coincidir con V_{th}. Por tanto:

$$V_{th} = I_{nor} R_{nor} \rightarrow R_{nor} = \frac{V_{th}}{I_{nor}} = \frac{V_{th}}{I_{CC}} = R_{th}$$



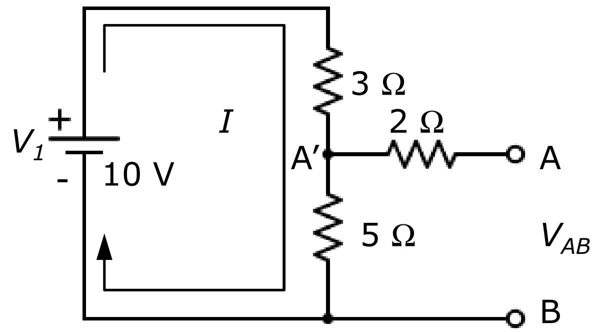
Ejemplo 2. Encontrar la tensión y resistencia de Thévenin del circuito de la figura. Ref. [3]



Solución.-

Determinación de V_{th}:

La tensión de Thévenin es la tensión entre los terminales en circuito abierto (tensión "sin conectar nada"):



Por la resistencia de 2 Ω no circula corriente, luego $V_{AB} = V_{A'B}$. La corriente I que sale del generador V_1 = 10 V solo circula por las resistencias de 3 Ω y 5 Ω. Y la tensión $V_{A'B}$ se obtiene aplicando la ley de Ohm en la resistencia de 5 Ω. Es decir:

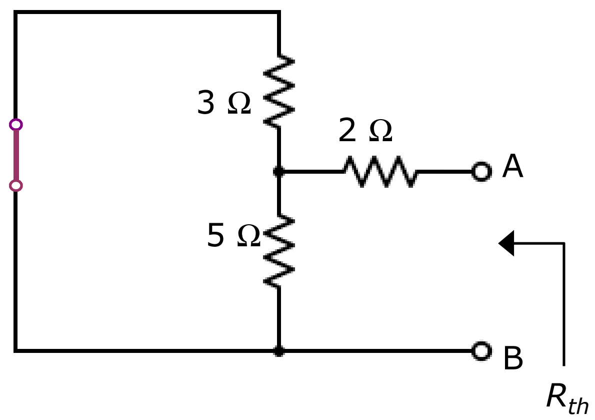
$$I = \frac{10V}{3\Omega + 5\Omega} = \frac{10V}{8\Omega} = 1.25A \quad \rightarrow \quad V_{th} = V_{A'B} = (1.25A)(5\Omega) = 6.25V$$

Determinación de R_{th}: se debe anular el generador independiente V_1, es decir, se debe sustituir por un cortocircuito. Las resistencias de 3 Ω y 5 Ω quedan en paralelo. La asociación de ambas está en serie con la resisten de 2 Ω. Luego:

$$R_{th} = (3\Omega \| 5\Omega) + 2\Omega$$

$$3\Omega \| 5\Omega = \frac{(3\Omega)(5\Omega)}{3\Omega + 5\Omega} = 1.875\Omega$$

$$\rightarrow R_{th} = 1.875\Omega + 2\Omega = 3.875\Omega$$

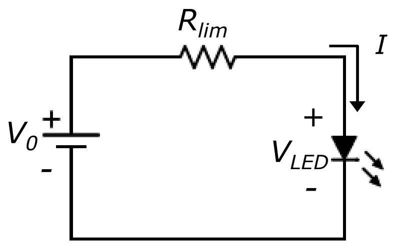


Aplicaciones de las resistencias

•*Limitación de corriente*

En las hojas de datos, para la mayor parte de los dispositivos electrónicos, se especifican valores límite de tensión, corriente y potencia.

Los diodos LED, por ejemplo, operan con caídas de tensión de 1.7 V y corrientes de 20 mA (valores típicos). Si un LED se va a alimentar con una pila de 9 V y trabajar a una tensión de 1.7 V se debe limitar la corriente con una resistencia. Aplicando la ley de Kirchoff de tensiones (suponemos I = 20 mA):



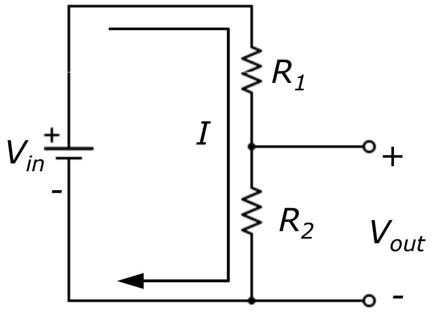
$$V_0 - IR_{lim} - V_{LED} = 0 \rightarrow R_{lim} = \frac{V_0 - V_{LED}}{I} = \frac{9V - 1.7V}{20\times10^{-3}A} = 365\Omega$$

Sin la resistencia, el LED se quemaría al alimentarlo con la pila.

•*Divisor de tensión*

En la entrada del circuito se aplica una tensión V_{in} y el circuito proporciona una tensión inferior en la salida.

Aplicando la ley de Kirchoff de tensiones y la ley de Ohm:

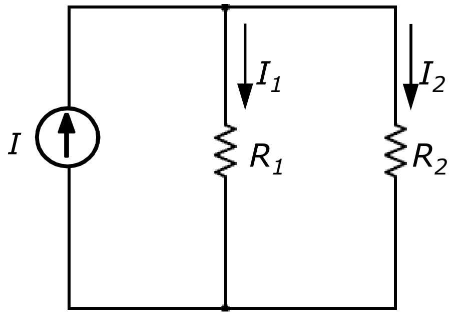


$$\left.\begin{array}{l} V_{in} = I(R_1 + R_2) \rightarrow I = \dfrac{V_{in}}{R_1 + R_2} \\ V_{out} = IR_2 \end{array}\right\} \rightarrow V_{out} = IR_2 = V_{in}\frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

.

•*Divisor de corriente*

Se entrega una corriente I a dos resistencias en paralelo. Veamos cómo se reparte la corriente entre ambas. Tenemos $I = I_1 + I_2$ (ley de Kirchoff de corrientes). Al estar en paralelo las resistencias el voltaje en ellas coincide, luego $I_1R_1 = I_2R_2$. Combinando estas relaciones podemos expresar I_1 en función de I:

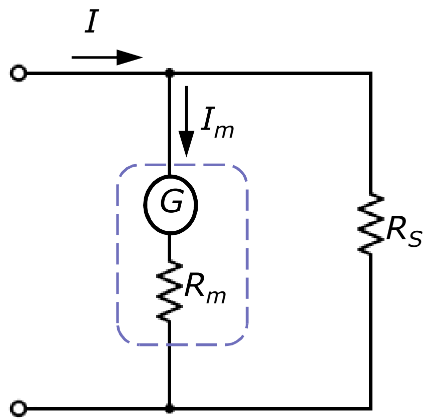


$$\left.\begin{array}{l} I_1R_1 = I_2R_2 \rightarrow I_2 = \dfrac{I_1R_1}{R_2} \\ I = I_1 + I_2 \end{array}\right\} \rightarrow I = I_1 + I_2 = I_1 + \frac{I_1R_1}{R_2} = I_1\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \rightarrow I_1 = I\frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

- *Extensión del rango de medida de un amperímetro*

Los amperímetros analógicos (amperímetros de aguja) incorporan un galvanómetro, que es un instrumento que permite la medida de corrientes de baja intensidad. Para ampliar el rango de medida, se conecta una resistencia *shunt* (R_S). El circuito resultante es un divisor de corriente, por lo que:

$$I = I_m\left(1 + \frac{R_m}{R_s}\right)$$



Ajustando el valor de R_S es posible medir corrientes I mayores. Y empleando varias resistencias *shunt* en paralelo se pueden hacer medidas en varias escalas.

Algunas técnicas de análisis de circuitos

El objetivo de analizar un circuito es determinar las corrientes que circulan por sus elementos y calcular las tensiones en los nudos. Algunos de los procedimientos:

- Plantear ecuaciones KVL- KCL y resolver el sistema de ecuaciones obtenido para determinar las tensiones y corrientes deseadas (ejemplo 3)

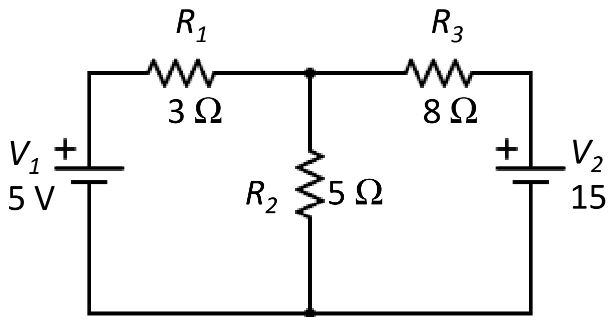
- Aplicar el *método de las tensiones de nudo*, basado en plantear las ecuaciones KCL (ejemplo 4)

- Aplicar el *método de las corrientes de malla,* basado en plantear las ecuaciones KVL (ejemplo 5)

- Emplear el *método de superposición* (ejemplo 6)

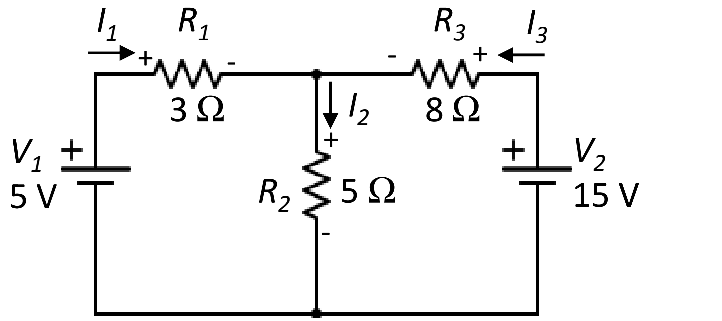
- Utilizar los equivalentes de Thévenin y Norton para reducir una parte del circuito

Ejemplo 3. Calcular las corrientes a través de R_2 y R_3 en el circuito siguiente:



Ref. [3]

Solución.- Empezamos Indicando las corrientes por las resistencias, asignándoles un sentido arbitrario:



Aplicamos la ley de Kirchoff de tensiones (KVL) en las dos mitades del circuito: $V_1 - I_1R_1 - I_2R_2 = 0 \qquad (1)$

$$V_2 - I_3R_3 - I_2R_2 = 0 \qquad (2) \qquad \rightarrow I_3 = \frac{V_2 - I_2R_2}{R_3}$$

Y aplicando la ley de Kirchoff de corrientes (KCL): $I_1 + I_3 = I_2 \leftrightarrow I_1 = I_2 - I_3 \quad (3)$

Podemos, por ejemplo, eliminar I_1 e I_3 para despejar I_2.Combinando las relaciones (1) y (3):

$$V_1 - (I_2 - I_3)R_1 - I_2R_2 = 0 \quad \leftrightarrow \quad V_1 - I_2(R_1 + R_2) + I_3R_1 = 0$$

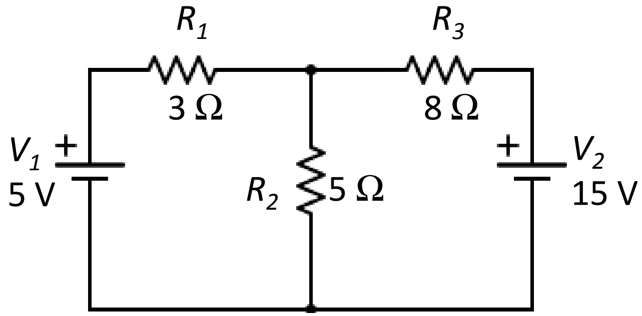
En la última relación sustituimos la expresión de I_3 deducida de (2): $V_1 - I_2(R_1 + R_2) - \left(\frac{V_2 - I_2R_2}{R_3}\right)R_1 = 0$

Agrupando términos en I_2 y despejando: $V_1 - I_2\left(R_1 + R_2 + \frac{R_1R_2}{R_3}\right) + V_2\frac{R_1}{R_3} = 0 \quad \rightarrow \quad I_2 = \frac{V_1 + V_2\frac{R_1}{R_3}}{R_1 + R_2 + \frac{R_1R_2}{R_3}} = \frac{5V + (15V)\left(\frac{3\Omega}{8\Omega}\right)}{3\Omega + 5\Omega + \frac{(3\Omega)(5\Omega)}{8\Omega}} = 1.076A$

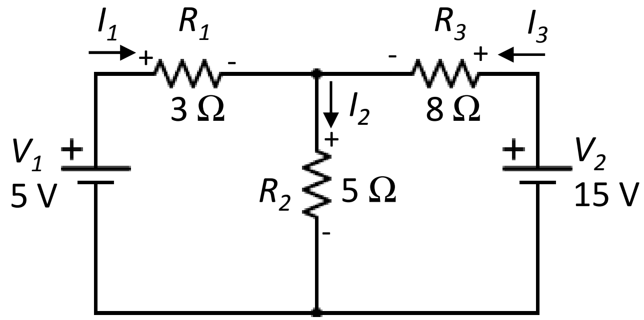
Llevando este resultado a (2): $I_3 = \frac{V_2 - I_2R_2}{R_3} = \frac{15V - (1.076A)(5\Omega)}{8\Omega} = 1.20A$

Obs.- Tendremos también $I_1 = I_2 - I_3 =$ 1.076 – 1.20 = -0.124 A. El signo negativo nos indica que la corriente real circula en sentido contrario al que hemos asignado.

Ejemplo 3 (cont.). Calcular las corrientes a través de R_2 y R_3 en el circuito siguiente:



También se hubieran podido plantear las ecuaciones y resolver el problema de forma matricial:



$$\left.\begin{aligned} V_1 - I_1R_1 - I_2R_2 &= 0 \\ V_2 - I_3R_3 - I_2R_2 &= 0 \\ I_1 + I_3 &= I_2 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} R_1I_1 + R_2I_2 \qquad\qquad &= V_1 \\ R_2I_2 + R_3I_3 &= V_2 \\ I_1 - I_2 + I_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Sistema de ecuaciones en I_1, I_2, I_3 en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & R_3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Despejamos I_2 aplicando la regla de Cramer:

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} R_1 & V_1 & 0 \\ 0 & V_2 & R_3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & R_3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{R_1V_2 + R_3V_1}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}$$

Este resultado concuerda con el que hemos obtenido antes. I_3 se deduce de forma análoga.

Método de las tensiones de nudo

El *método de las tensiones de nudo* es un procedimiento sistemático basado en aplicar en los nudos la ley de Kirchhoff de corrientes.

Supongamos que el circuito sólo tiene resistencias. Para resolver el circuito seguimos el siguiente procedimiento:

1. Asignamos a un nudo el potencial de referencia (cero). Este punto es la *masa* del circuito.
A los nudos restantes les asignamos una *tensión respecto al nudo de referencia*. Las tensiones de estos nudos son las incógnitas que se deben determinar.

2. Asignamos una corriente a cada elemento de forma arbitraria. Aplicamos la ley de Kirchhoff de corrientes a todos los nudos salvo el de referencia.

3. Las corrientes se expresan en términos de las tensiones de nudo aplicando la ley de Ohm.

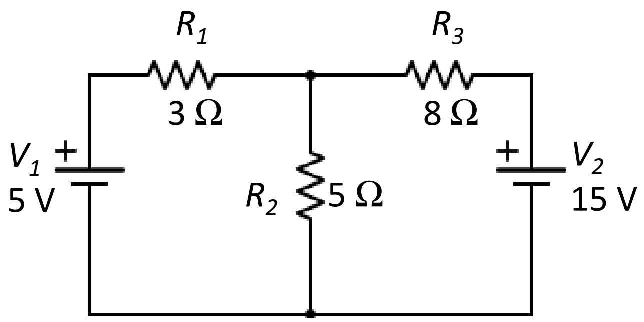
4. Se obtiene un sistema de ecuaciones cuya solución son las tensiones de los nudos.

5. A partir de las tensiones de los nudos se hallan otras variables de interés del circuito: corrientes de rama, caídas de tensión en los elementos,…
Si alguna corriente es negativa, esto significa que el sentido real de dicha corriente es contrario al asignado en el punto 2.

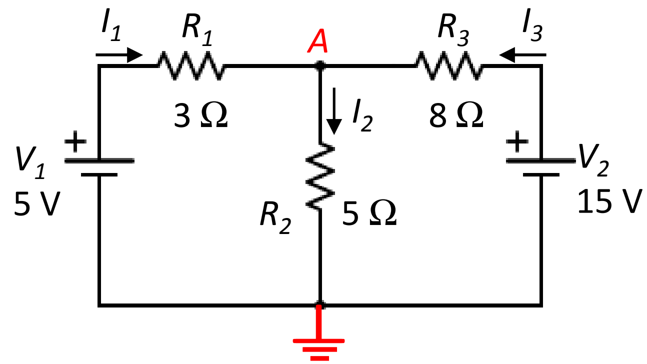
Obs.- En el circuito puede haber generadores de tensión. Pero la corriente que proporciona un generador de tensión no está prefijada: depende del circuito al que se conecta. Por tanto cada generador de tensión introduce como incógnita adicional la corriente que proporciona.
No obstante, con cada generador de tensión se elimina una tensión incógnita, ya que fija la diferencia de tensión entre sus terminales.

Ejemplo 4. *Método de las tensiones de nudo.*

Calcular las corrientes a través de R_2 y R_3 mediante el método de las tensiones de nudo.



Solución.- Elegimos uno de los nudos del circuito para fijar la referencia de potencial: la masa del circuito. Las tensiones del positivo de V_1 y de V_2 son conocidas: 5 V y 15 V.
Por tanto la tensión del nudo A, V_A, es la incógnita que se ha de determinar.



Aplicamos la ley de Kirchoff de corrientes (KCL) en el nudo A:

$$I_1 + I_3 = I_2 \quad (1)$$

Aplicamos la ley de Ohm para expresar las corrientes en términos de las tensiones V_A:

$$I_1 = \frac{V_1 - V_A}{R_1} = \frac{5V - V_A}{3\Omega}; \quad I_3 = \frac{V_2 - V_A}{R_3} = \frac{15V - V_A}{8\Omega}; \quad I_2 = \frac{V_A - 0}{R_2} = \frac{V_A}{5\Omega}$$

Sustituyendo en (1): $\frac{5 - V_A}{3} + \frac{15 - V_A}{8} = \frac{V_A}{5}$

Resolviendo esta ecuación: V_A = 5.38 V → I_2 = 5.38/5 = 1.076 A, I_3 = (15 – 5.38) / 8 = 1.20 A

Método de las corrientes de malla

Es también un método sistemático empleado en el análisis de circuitos, basado esta vez en aplicar de la ley de tensiones de Kirchhoff a las diferentes mallas de un circuito. A cada malla se le asigna una corriente ficticia o "corriente de malla". La corriente que pasa por cada componente será la suma algebraica de las corrientes de malla que lo atraviesen.

Suponiendo que el circuito sólo tiene generadores de tensión, el procedimiento que se seguirá es el siguiente:

1. Se asigna a cada malla una "corriente de malla". Las corrientes de malla serán las incógnitas que se deberán determinar.

2. Se expresa para cada malla la ley de Kirchhoff de tensiones. Cada malla se recorre según el sentido indicado por la corriente de malla. Habrá tantas ecuaciones como mallas.
Se asigna arbitrariamente a cada componente una caída de tensión, y a continuación se escriben las ecuaciones de Kirchhoff en términos de estas caídas de tensión.

3. Aplicando la Ley de Ohm, se escribe la tensión entre los terminales de cada resistencia en función de las corrientes de malla que la atraviesan. La corriente total por la resistencia es la suma algebraica de las corrientes de malla que pasan por esta resistencia. A una corriente de malla se le asigna el signo positivo si su sentido va de "+" a "−" en la caída de tensión, y negativo en caso contrario.

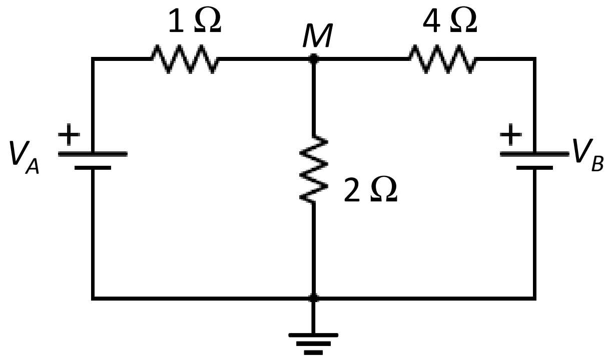
4. Se resuelve el sistema de ecuaciones obtenido para determinar las corrientes de malla.

5. A partir de las corrientes de malla se pueden encontrar otras variables deseadas del circuito. Si una caída de tensión en una resistencia es negativa, esto significa que su polaridad es contraria a la asignada en el punto 2.

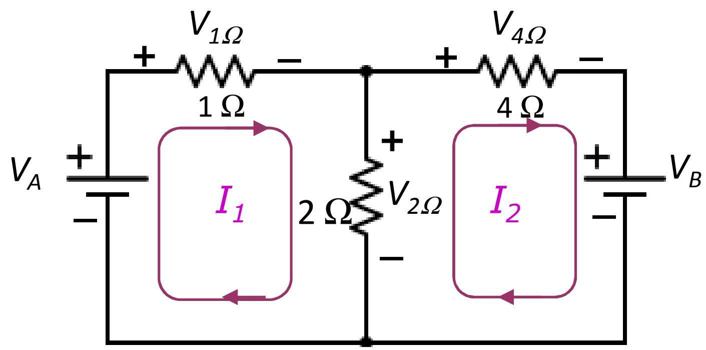
Obs.- Si el circuito incorpora generadores de corriente, el procedimiento anterior debe modificarse porque la tensión entre terminales un generador de corriente no es una cantidad prefijada: su valor “se ajusta” a la demanda del circuito (a fin de que se cumplan las leyes de Kirchhoff). Ahora en presencia de un generador de corriente se elimina como incógnita una corriente de malla, pero debemos considerar como nueva incógnita la tensión entre los terminales de dicho generador.

Ejemplo 5. *Método de las corrientes de malla.*

Calcular la tensión en el punto *M* mediante el método de las corrientes de malla.



Solución.- Asignamos las corrientes de malla, I_1 e I_2, como se indica. También se asignan las caídas de tensión en las resistencias.



Aplicamos la ley de Kirchoff de tensiones a las dos mallas:

Malla 1 ⟶ $V_A - V_{1\Omega} - V_{2\Omega} = 0$ (1)

Malla 2 ⟶ $-V_B + V_{2\Omega} - V_{4\Omega} = 0$ (2)

Aplicamos la ley de Ohm para expresar las caídas de tensión en las resistencias: $V_{1\Omega} = I_1 \cdot 1\Omega$; $V_{2\Omega} = (I_1 - I_2)\cdot 2\Omega$; $V_{4\Omega} = I_2 \cdot 4\Omega$

Sustituyendo en las ecuaciones (1) y (2) llegamos a un sistema de ecuaciones: $\begin{Bmatrix} V_A - I_1 - 2(I_1 - I_2) = 0 \\ -V_B + 2(I_1 - I_2) - 4I_2 = 0 \end{Bmatrix} \leftrightarrow \begin{Bmatrix} 3I_1 - 2I_2 = V_A \\ -2I_1 + 6I_2 = -V_B \end{Bmatrix}$

Resolviendo el sistema: $I_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} V_A & -2 \\ -V_B & 6 \end{vmatrix}}{\begin{Vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{Vmatrix}} = \dfrac{6V_A - 2V_B}{14}$; $I_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & V_A \\ -2 & -V_B \end{vmatrix}}{\begin{Vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{Vmatrix}} = \dfrac{-3V_B + 2V_A}{14}$

La corriente que circula por la resistencia de 2 Ω es: $I_{2\Omega} = I_1 - I_2 = \dfrac{6V_A - 2V_B}{14} - \left(\dfrac{-3V_B + 2V_A}{14}\right) = \dfrac{4V_A - V_B}{14}$

Por último: $V_M = I_{2\Omega} \cdot 2 = \dfrac{4V_A - V_B}{7}$

Método de superposición

- Los circuitos que hemos estado considerando incorporan fuentes independientes de tensión (o corriente) y resistencias, que son a su vez componentes lineales: la corriente es una función lineal de la tensión.

- Se trata de *circuitos lineales*, en los que las diferentes tensiones o corrientes son una función lineal de las tensiones V_{G1}, V_{G2},…, *o corrientes* I_{G1},I_{G2},…, de los generadores independientes.

- Esta propiedad también se verifica cuando se emplean otros componentes lineales como los condensadores o Bobinas, y si los generadores entregan tensiones o corrientes dependientes del tiempo.

- Como las tensiones o corrientes de un circuito lineal son una función lineal de las corrientes/tensiones de los generadores independientes se cumple la *propiedad de superposición*: la corriente/tensión correspondiente a la acción simultánea de varios generadores puede deducirse sumando las contribución de cada generador por separado (es decir, anulando los otros).

- Así, para resolver un circuito lineal por el método de superposición, se aplica el siguiente procedimiento:

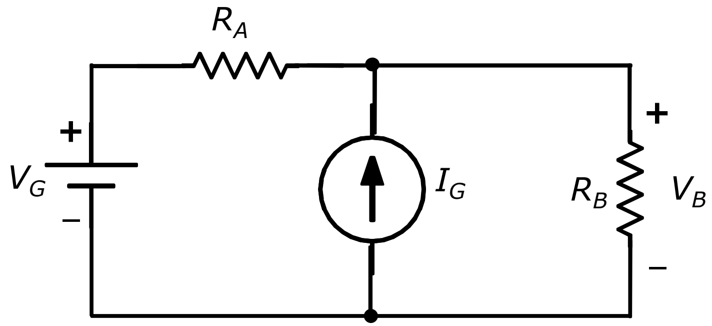
1. Se anulan todas las fuentes independientes excepto una de ellas.

2. Se calcula la contribución (a la corriente o tensión desconocida) debida a dicha fuente.

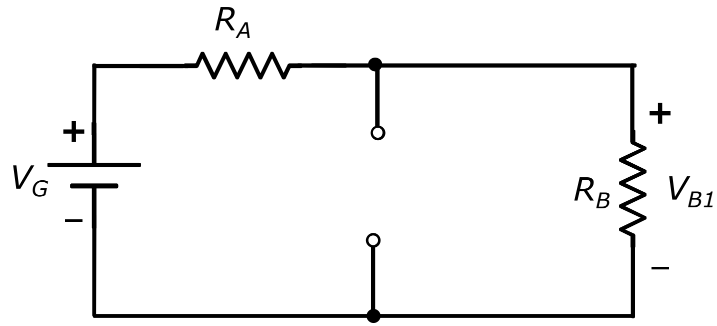
3. Se repiten los pasos 1 y 2 para el resto de fuentes independientes.

4. La corriente o la tensión que buscamos, en el circuito completo, se obtiene sumando la contribución de cada fuente por separado.

Ejemplo 6. Calcular V_B en el circuito siguiente aplicando el método de superposición.



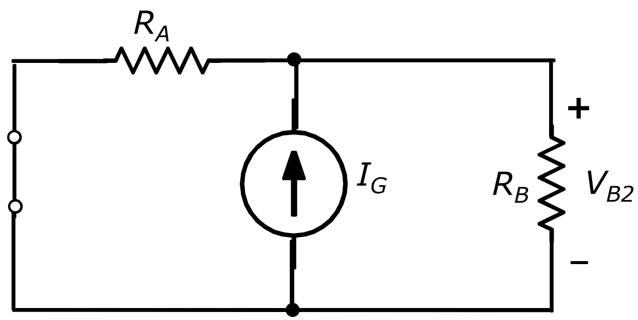
Solución.- Se determina la contribución V_{B1} de la fuente de tensión V_G, anulando la fuente de corriente (que se reemplaza por un circuito abierto):



R_A y R_B forman un divisor, de modo que: $V_{B1} = V_G \dfrac{R_B}{R_A + R_B}$

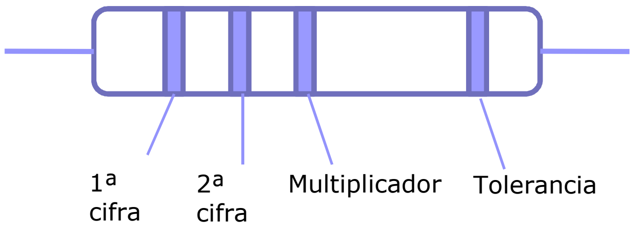
Y para determinar la contribución V_{B2} de la fuente de corriente I_G se anulando la fuente de tensión (reemplazándola por un cortocircuito). Entonces R_A y R_B aparecen en paralelo, de forma que:

$$V_{B2} = I_G\left(R_A \| R_B\right) = I_G \frac{R_A R_B}{R_A + R_B}$$



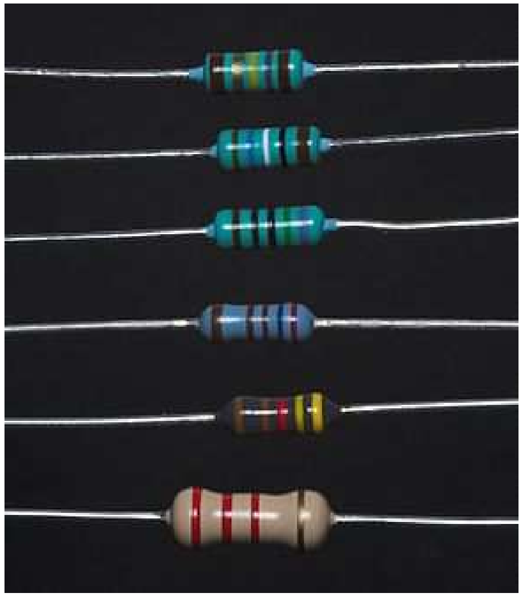
Finalmente se suman las dos contribuciones: $V_B = V_{B1} + V_{B2} = V_G \dfrac{R_B}{R_A + R_B} + I_G \dfrac{R_A R_B}{R_A + R_B}$

RESISTENCIAS: código de colores; resistividades de algunos materiales

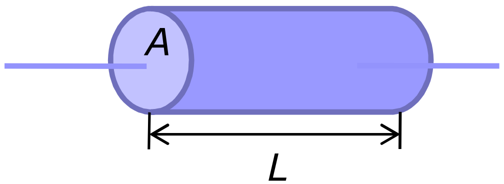


Código de colores (fuente: http://www. wikipedia.org)

Color de la banda		Valor de la 1ª cifra significativa	Valor de la 2ª cifra significativa	Multiplicador	Tolerancia
Negro		0	0	1	-
Marrón		1	1	10	±1%
Rojo		2	2	100	±2%
Naranja		3	3	1 000	-
Amarillo		4	4	10 000	±4%
Verde		5	5	100 000	±0,5%
Azul		6	6	1 000 000	±0,25%
Morado		7	7	10 000 000	±0,1%
Gris		8	8	100 000 000	±0.05%
Blanco		9	9	1 000 000 000	-
Dorado		-	-	0,1	±5%
Plateado		-	-	0,01	±10%
Ninguno		-	-	-	±20%



Resistencias axiales
(fuente: http://www.wikipedia.org)



Material	ρ (10^{-8} Ωm)
Plata	1.6
Cobre	1.7
Nicrom	100
Carbón	3500

La resistencia depende de sus dimensiones (sección, longitud) y de su composición

$R = \rho L/A$ $\quad$ ρ: *resistividad*

1. Técnicas de análisis de circuitos eléctricos: revisión

1.1 Magnitudes eléctricas fundamentales.
Fuentes de energía eléctrica. Conductores. Resistencias

1.2 Análisis de circuitos resistivos en continua

1.3 Señales alternas.

1.4 Condensadores.

1.5 Circuitos RC: respuesta a señales en escalón.

1.6 Respuesta a señales senoidales.

1.7 Bobinas (inductores).

1.8 Transformadores.

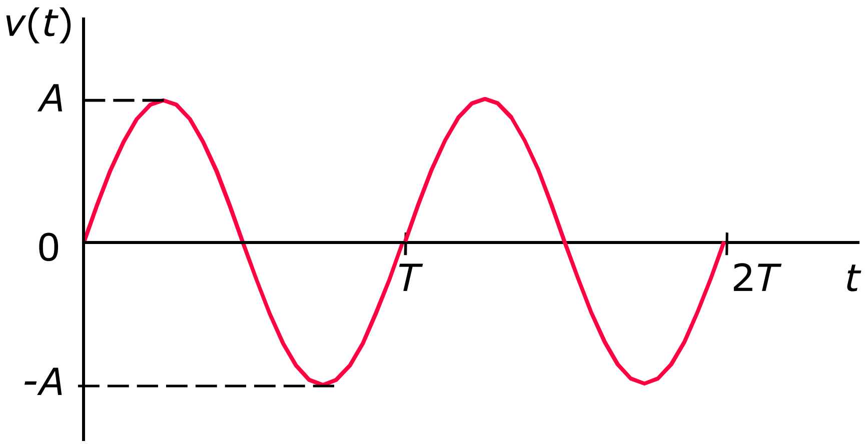
1.3 Señales alternas

La información se ha recopilado principalmente de las siguientes referencias:

1. J. López Galván, J.M. Salcedo Carretero: *Circuitos eléctricos. Primer contacto*, Anaya, 2005.
2. Ll. Prat (ed.): *Circuitos y dispositivos electrónicos. Fundamentos de Electrónica*, Eds. UPC, 2010.
3. D. L. Eggleston: Basic Electronics for Scientists and Engineers, Cambridge University Press, 2011.
4. Inductores: https://es.wikipedia.org/wiki/Inductor

Hasta ahora solo hemos considerado fuentes de tensión continua (como las pilas o baterías) o de corriente continua. Como los circuitos electrónicos que estudiaremos también procesan tensiones y corrientes dependientes del tiempo, vamos a enumerar algunas de las señales alternas más comunes:

• <u>Señales sinusoidales</u>: una tensión sinusoidal se puede expresar como $v(t) = A\text{sen}(2\pi ft+\phi) = A\text{sen}(\omega t+\phi)$, donde A es la *amplitud*, f es la *frecuencia* en ciclos/segundo o hertzios (Hz), ϕ es la *fase*, y ω la *frecuencia angular* o *pulsación* (en radianes/segundo).
El *periodo* T de la señal está relacionado con la frecuencia: $T = 1/f$



Forma de onda de una tensión sinusoidal
(en este caso la fase es $\phi = 0$)

$$v(t) = Asen(2\pi ft + \phi) = Asen(\omega t + \phi)$$

amplitud   frecuencia   fase   frecuencia angular (pulsación)

$$\omega = 2\pi f \qquad T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Señales sinusoidales.- Se puede especificar la amplitud de una señal sinusoidal de diferentes formas:

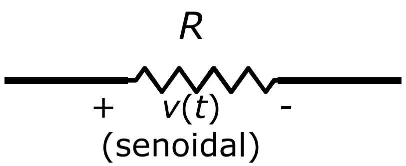
- La **amplitud de pico** A o A_p.

- La **amplitud pico a pico** $A_{pp} = 2A$.

- **La amplitud rms**: $A_{rms} = A/\sqrt{2}$

La amplitud rms resulta útil en los cálculos de potencia en circuitos con señales sinusoidales

La *potencia media P* disipada por una resistencia a la que se le aplica una tensión sinusoidal se calcula integrando en un periodo la potencia instantánea $p(t)$:



$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{v^2(t)}{R}dt = \frac{A^2}{TR}\int_0^T sen^2(\omega t + \phi)dt \overset{(*)}{=} \frac{A^2}{TR}\cdot\frac{T}{2} =$$
$$= \frac{A^2}{2R} = \frac{\left(A/\sqrt{2}\right)^2}{R} = \frac{A_{rms}^2}{R}$$

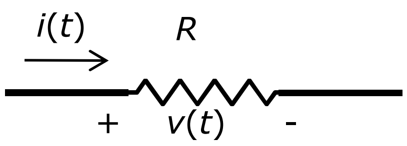
A la tensión rms también se le llama ***tensión eficaz***. Los valores rms o eficaces en corriente alterna no son los valores máximos (o de pico), sino *aquellos que tendría una corriente continua que desarrollara la misma potencia*. Dicho, de otro modo, una tensión continua de valor A_{rms} produce el mismo efecto calorífico sobre una resistencia que la tensión alterna. (ref. [1])

(*) Justificación.- Haciendo el cambio $\omega t + \phi = \theta$, tenemos $\omega dt = d\theta$ y por tanto:

$$\int_0^T sen^2(\omega t + \phi)dt = \frac{1}{\omega}\int_\phi^{\phi+2\pi} sen^2(\theta)d\theta = \frac{1}{\omega}\left[\left(\frac{\theta}{2} - \frac{sen(\theta)}{4}\right)\right]_\phi^{\phi+2\pi} = \frac{1}{\omega}\cdot\pi = \frac{T}{2\pi}\cdot\pi = \frac{T}{2}$$

• ¿Cómo se calcula la potencia a partir de los valores rms (valores eficaces)?

$$V_{rms} = \frac{V_p}{\sqrt{2}} \qquad I_{rms} = \frac{I_p}{\sqrt{2}}$$



$$P = \frac{V_{rms}^2}{R} \qquad P = I_{rms}^2 R \qquad P = \frac{V_p^2}{2R} \qquad P = \frac{I_p^2 R}{2}$$

v e *i* : señales senoidales

• ¿Por qué se emplea la abreviatura 'rms'? Al determinar la potencia media se tiene que integrar el cuadrado de la tensión (o la corriente) en un periodo y dividir por el periodo. En la expresión final aparece el cuadrado de la tensión (o corriente) rms:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{v^2(t)}{R}dt = \frac{\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)dt}{R} = \frac{V_{rms}^2}{R}$$

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T [v(t)]^2 dt}$$

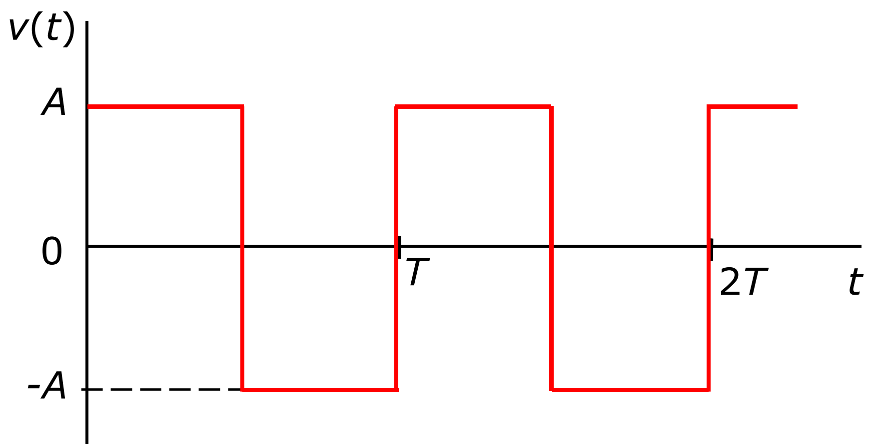
square (cuadrado)

root

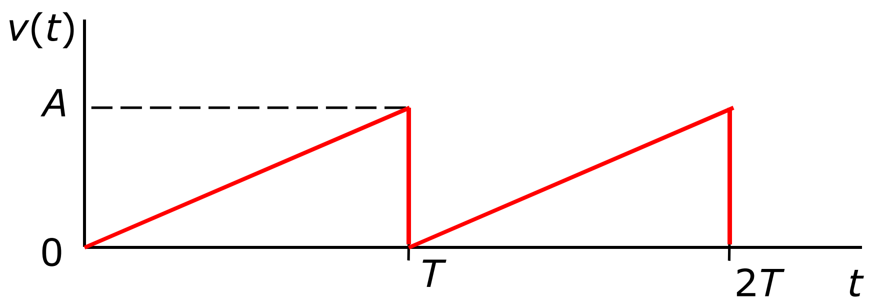
mean (valor medio)

Señales alternas

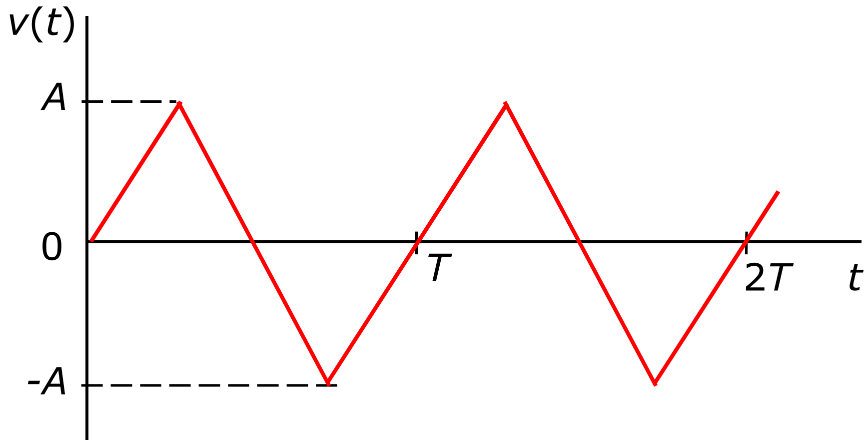
- <u>Ondas cuadradas</u>.- También se especifican en términos de amplitud y periodo:



- <u>Ondas en diente de sierra</u>.- Especificadas por su amplitud y periodo:

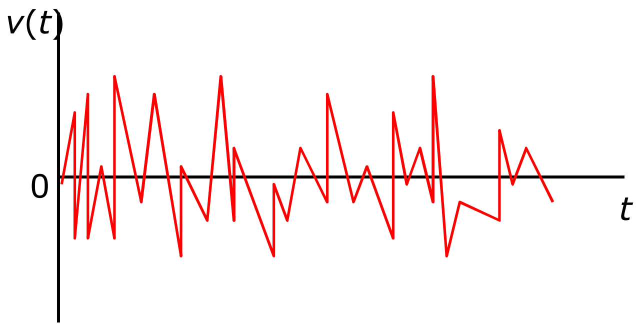


• Ondas triangulares.- También se especifican en términos de amplitud y periodo:



• Otras: rampa, señal en escalón, tren de pulsos,…

• Señales de ruido: se trata de señales aleatorias de origen térmico, o simplemente señales de alguna forma “indeseadas” que se acoplan al circuito.



1.4 Condensadores

(ref. [2])

•El condensador es un componente que puede almacenar carga eléctrica. Es decir, puede almacenar energía en forma de campo eléctrico.
El tipo más simple de condensador se construye insertando un material aislante (dieléctrico) entre dos placas metálicas paralelas. Al aplicar una tensión en estas placas se crean distribuciones de carga positiva y negativa, estableciéndose un campo eléctrico en el dieléctrico. La medida de la capacidad que tiene el dieléctrico de establecer el campo eléctrico es la *constante dieléctrica* o *permitividad* (ε).

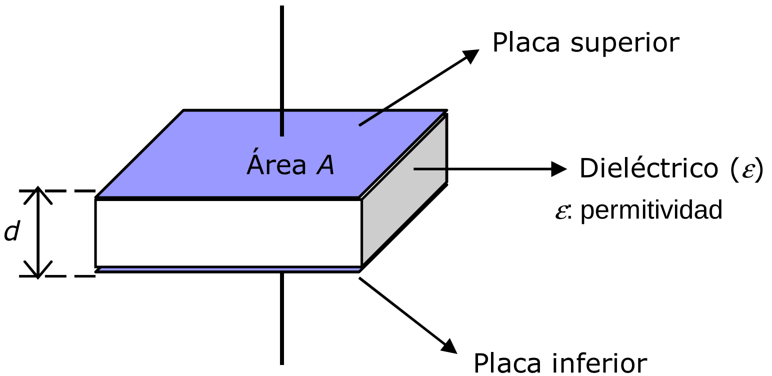
•La cantidad de carga almacenada es proporcional a la tensión entre los terminales.
Siendo q la carga almacenada por un condensador y v_C la tensión entre sus dos terminales: $q = Cv_C$.

La constante C recibe el nombre de ***capacidad***. En un condensador de placas paralelas C es proporcional al área (A) de las placas y a la permitividad , e inversamente proporcional a la distancia entre las placas (d).

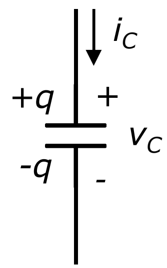
•La unidad de capacidad es el ***faradio*** *(F):* 1 faradio = 1 culombio / 1 voltio. Pero es más frecuente emplear unidades derivadas: mF, µF, nF, pF.

•También se debe tener en cuenta la ***tensión nominal*** **(*voltage rating*)** del condensador. La tensión aplicada a un condensador no debe exceder dicho valor, porque de lo contrario se estropea debido a la ruptura dieléctrica.

$$C = \varepsilon \frac{A}{d}$$

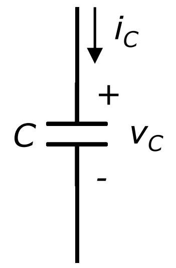


Estructura de un condensador de placas paralelas



Símbolo

•Teniendo en cuenta la relación entre carga y tensión, así como la definición de intensidad de corriente:



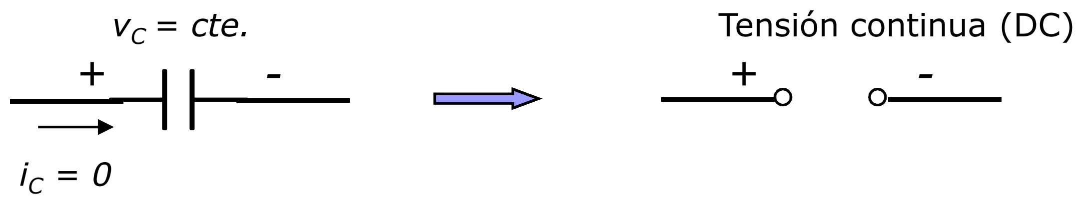
$$q = Cv_C \quad \rightarrow \quad i_C = \frac{dq}{dt} = C\frac{dv_C}{dt}$$

A la vista de la relación obtenida se llega a dos conclusiones:

• ***La tensión v_C entre los terminales del condensador no puede variar de forma discontinua.***
Si esto ocurriera, debería circular una corriente de valor infinito, lo que no tiene sentido físico.

• ***Si v_C toma un valor constante el condensador se comporta como un circuito abierto,*** ya que i_C es nula.
Y la carga q también tiene un valor constante.

Esta propiedad se debe tener en cuenta al analizar los circuitos en continua (DC).



Hay que tener en cuenta que si la tensión aplicada al condensador varía en el tiempo, lo mismo ocurrirá con la carga acumulada en las placas (que depende del campo eléctrico, ahora variable en el tiempo).

<u>Observación</u>: como la corriente es proporcional a la derivada de la tensión, la característica *i-v* del condensador no puede representarse en los ejes de coordenadas corriente-tensión, como ocurría con las resistencias.

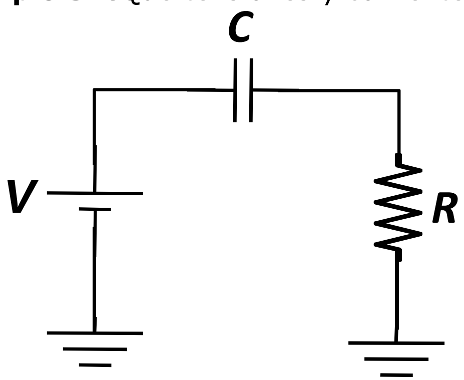
Ejemplo 1. A un condensador de 1 μF se le aplica una tensión entre terminales (tensión en bornes) de 5 V. Calcular la carga que almacena. (Ref. [2])

Solución- La carga almacenada por el condensador se calcula como $q = Cv_C$. Es decir: $q = (1{\cdot}10^{-6})(5) = 5{\cdot}10^{-6}$ C

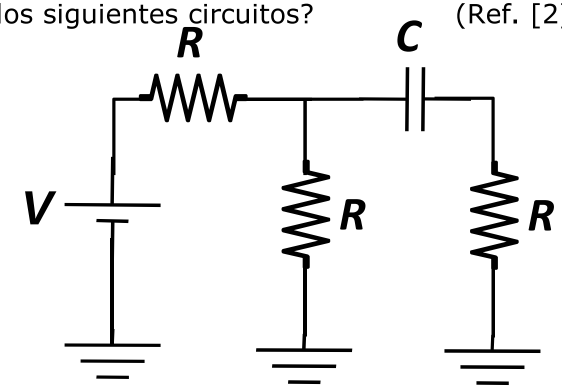
Ejemplo 2. Dos condensadores, uno de 1 μF y otro de 1 nF, pierden una carga de 10^{-6} C. Indicar la variación de la tensión entre terminales (tensión en bornes) en cada condensador. (Ref. [2])

Solución.- En los dos casos Δq = - 10^{-6} C.
Condensador de 1 μF: $\Delta v_{C1} = \Delta q/C_1 = -10^{-6}\text{C}/10^{-6}\text{ F} = -1$ V; Condensador de 1 nF: $\Delta v_{C2} = \Delta q/C_1 = -10^{-6}\text{C}/10^{-9}\text{ F} = -1000$ V

Ejemplo 3. ¿Qué tensiones y corrientes tendrán los condensadores en los siguientes circuitos? (Ref. [2])



Solución: $I_C = 0$, $V_C = V$



Solución: $I_C = 0$, $V_C = V/2$

Asociación de condensadores en serie.- La capacidad equivalente se determina a partir de la relación:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum \frac{1}{C_i}$$

Asociación de condensadores en paralelo.- La capacidad equivalente se determina sumando las capacidades individuales:

$$C_{eq} = \sum C_i$$

Expresión de la tensión en términos de la corriente:

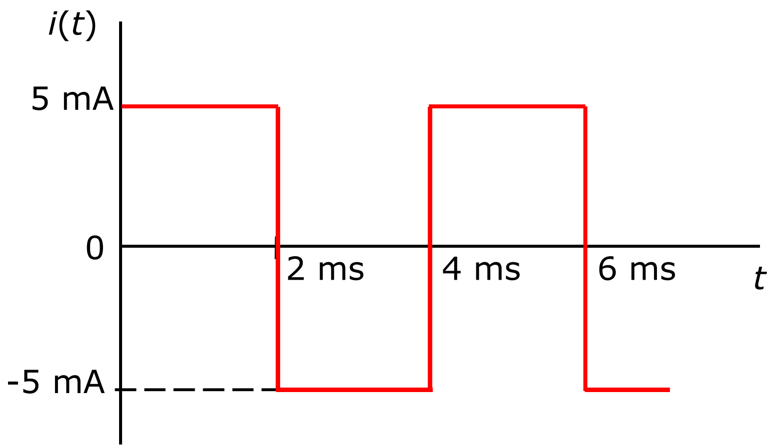
$$i_C = \frac{dq}{dt} \quad \leftrightarrow \quad q(t) = \int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)\,d\tau$$

Suponemos $q(t \to -\infty) = 0$

$$v_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{\int_{-\infty}^{t} i_C(\tau)\,d\tau}{C} = \frac{1}{C}\left[\int_{-\infty}^{0} i_C(\tau)\,d\tau + \int_{0}^{t} i_C(\tau)\,d\tau\right] = \frac{1}{C}\left[q(0) + \int_{0}^{t} i_C(\tau)\,d\tau\right]$$

$$\rightarrow v_C(t) = v_C(0) + \frac{1}{C}\int_{0}^{t} i_C(\tau)\,d\tau$$

Ejemplo 4.- Conectamos entre los terminales de un condensador de 1μF una fuente independiente de corriente. La forma de onda de la corriente se representa en la figura. Determinar y representar la tensión en bornes del condensador como función del tiempo. Suponer que el condensador está inicialmente descargado. Es decir, $q(t = 0) = 0$. (Ref. [2])



Ejemplo 4.- Solución:

• En el intervalo que va de t = 0 a t = 2 ms el condensador se carga con una corriente de 5 mA. Además $v_C(0)$ = 0. Por tanto:

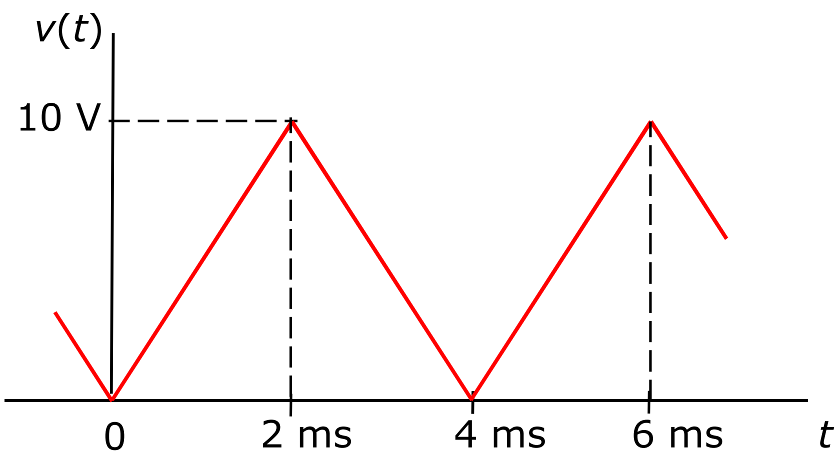
$$v_C(t) = v_C(0) + \frac{1}{C}\int_0^t i_C(\tau)d\tau = \frac{1}{C}\int_0^t 5\cdot10^{-3}d\tau = \frac{5\cdot10^{-3}t}{10^{-6}} = 5\cdot10^{3}t$$ (v_C en voltios, t en segundos)

Esta función corresponde a una rampa de pendiente + $5\cdot10^3$ V/s. La tensión vale 10 V cuando t = 2 ms.

• Entre t = 2 ms y t = 4 ms, haciendo el cambio $t' = t - 2$ ms, tendremos:

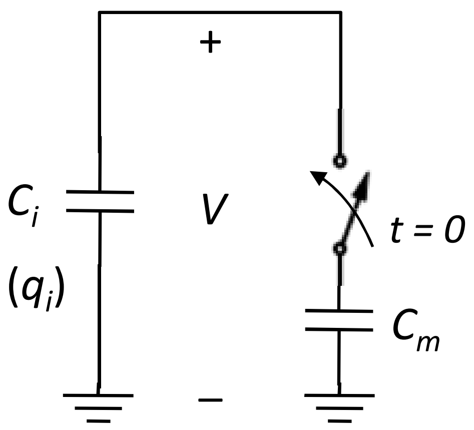
$$v_C(t') = v_C(t'=0) + \frac{1}{C}\int_0^{t'} i_C(\tau)d\tau = 10 + \frac{1}{C}\int_0^{t'}\left(-5\cdot10^{-3}\right)d\tau = 10 - 5\cdot10^{3}t'$$ (v_C en voltios, t' en segundos)

Ahora la función corresponde a una rampa decreciente (de pendiente $-5\cdot10^3$ V/s). La tensión inicial es 10 V y se reduce a 0 cuando t = 4 ms.



Ejemplo 5. En los circuitos VLSI (circuitos integrados de muy alta escala de integración) se produce un fenómeno conocido como *charge sharing*. (ref. [2])

Los condensadores se pueden emplear para almacenar información: un "1" lógico si están cargados, un "0" si están descargados.
Supongammos que un condensador C_i almacena una carga q_{i0} con una tensión entre los terminales de 5 V ("1" lógico).
Para acceder a la información hay que medir la tensión en C_i. Pero el circuito empleado para la medida equivale a un condensador C_m (inicialmente descargado).
Al cerrar el interruptor la carga de C_i se reparte entre los dos condensadores, disminuyendo la tensión en C_i. Si la tensión fuera menor que un cierto nivel umbral la medida se falsearía, porque la tensión no correspondería a un "1" lógico.



En el instante inicial se cierra el interruptor: ¿qué tensiones tendrán después los condensadores?

Antes de cerrar el interruptor C_i está cargado a una tensión V_i = 5 V y C_m descargado. Por tanto, en t < 0 la carga total en el circuito es:

$$q_T = q_{i0} + q_{m0} = q_i = C_i V_i = 5C_i$$

Al cerrar el interruptor la carga total se reparte entre C_i y C_m, que estarán en paralelo, luego*:*

$$q_T = C_i V_i = C_i V_f + C_m V_f \rightarrow V_f = \frac{C_i}{C_i + C_m} V_i = \frac{5C_i}{C_i + C_m}$$

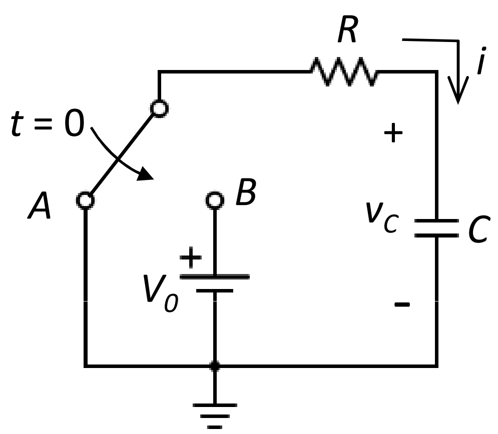
El efecto de reparto de carga tendrá poca influencia si $C_m << C_i$.

Antes habíamos dicho que la tensión en los condensadores no puede variar de forma discontinua, en contra de lo que suponemos que ocurre al cerrarse el interruptor.

Pero en realidad la tensión no varía de forma discontinua. Si hubiéramos tenido en cuenta las resistencias ofrecidas por los cables y el interruptor veríamos que la redistribución de carga se produce de forma continua. Es decir, la tensión alcanza el valor final transcurrido un cierto tiempo. Para poder justificarlo se necesita analizar el comportamiento transitorio del circuito, pero esto se verá después.

1.5 Circuitos RC: respuesta a señales en escalón (Refs. [2] y [3])

La tensión aplicada al circuito RC de la figura toma dos valores posibles, 0 o V_0. En el instante t = 0 el interruptor pasa de la posición A a la B. Supongamos que el condensador está inicialmente descargado, es decir, $q(0) = 0$ y $v_C(0) = 0$. Tras cerrar el interruptor circulará corriente por el circuito y el condensador empezará a acumular carga. Por tanto la tensión en el condensador irá en aumento.
Veamos cómo evolucionan esta tensión y la corriente de carga. Aplicando la ley de Kirchoff de tensiones:



$$\left.\begin{aligned} V_0 &= iR + v_C \\ i &= C\frac{dv_C}{dt} \end{aligned}\right\} \rightarrow V_0 = RC\frac{dv_C}{dt} + v_C$$

Esta ecuación diferencial se puede resolver siguiendo el proceso habitual:

(1) Se resuelve la ecuación homogénea: $RC\frac{dv_C}{dt} + v_C = 0$. Se ensaya una solución exponencial: $v_C = Ke^{at}$ Sustituyendo:

$$RC\frac{d}{dt}\left(Ke^{at}\right) + Ke^{at} = 0 \rightarrow e^{at}\left(aRC + 1\right) = 0$$

La última relación se verifica solo si se anula el paréntesis, es decir, si $a = -1/RC$. Así, la solución de la ecuación homogénea es de la forma: $v_{Ch} = Ke^{-t/RC}$, donde K es una constante arbitraria.

(2) Ahora se determina una solución particular v_{Cp} de la ecuación original. Se comprueba fácilmente que $v_{Cp} = V_0$.

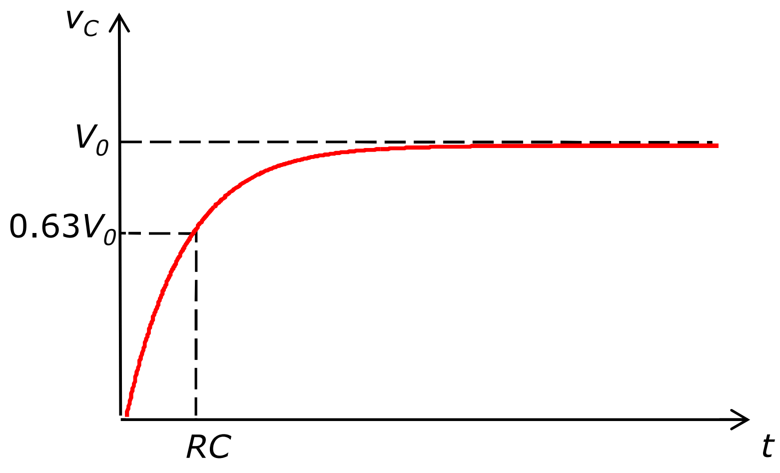
(3) La solución matemática de la ecuación diferencial se obtiene sumando las soluciones v_{Cp} y v_{Ch}: $v_C = Ke^{-t/RC} + V_0$

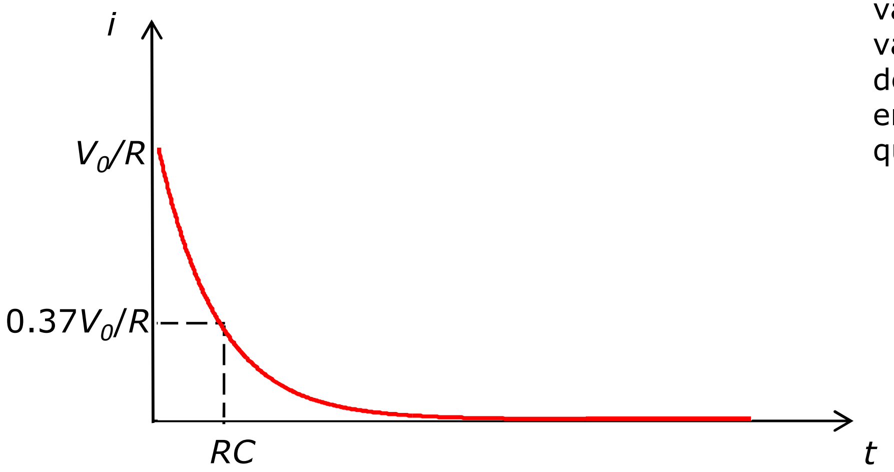
(4) La solución física se obtiene imponiendo la condición inicial $v_C(0) = 0$ (el condensador está inicialmente descargado):

$$v_C(t=0) = 0 = Ke^0 + V_0 = K + V_0 \rightarrow K = -V_0$$

Por tanto: $v_C = V_0\left(1 - e^{-t/RC}\right)$. La solución incluye un *término transitorio* (el término exponencial, que acaba por extinguirse) y un *término permanente*, V_0.

La corriente de carga se expresa como: $i = C\dfrac{dv_C}{dt} = \dfrac{V_0}{R}e^{-t/RC}$





Interpretación:

En el instante t = 0 la carga almacenada por el condensador es nula y por tanto v_C = 0. La corriente en ese instante es igual a V_0/R, y el condensador empieza a cargarse con esta corriente. La tensión en el condensador aumenta progresivamente, de forma que disminuye la caída de tensión en la resistencia y también la corriente. Cuando ha transcurrido un tiempo suficiente el condensador está prácticamente cargado a la tensión V_0 y bloquea el paso de corriente en el circuito, comportándose como un circuito abierto.

El producto *RC* recibe el nombre de ***constante de tiempo*** y determina con qué rapidez se produce la carga del condensador. En el instante t = *RC* la tensión ha alcanzado cerca del 63 % del valor final, mientras que la corriente se ha reducido al 37 % del valor inicial. Si la capacidad *C* aumenta, aumenta la constante de tiempo: esto significa que el condensador tarda más tiempo en cargarse. Y lo mismo sucede si aumenta la resistencia *R*, ya que se limita más la corriente de carga,

Podemos comprobar que el producto *RC* tiene dimensiones de tiempo mediante análisis dimensional:

[R · C] = [(V/I) · (Q/V)] = [Q / I] = [(I · T) / I] = [T]

[Ω · F] = [(V/A) · (C/V)] = [C / A] = [(A · s) / A] = [s]

A continuación vamos a analizar el comportamiento del circuito si inicialmente el condensaddor está cargado a la tensión V_0 y el interruptor vuelve a la posición A. El condensador ahora empieza a descargarse. En este caso para determinar la tensión v_C y la corriente i hay que resolver una ecuación diferencial homogénea. Como veremos, la corriente i va en sentido contrario al indicado en el esquema, puesto que es una corriente de descarga. Siguiendo el mismo procedimiento que antes:

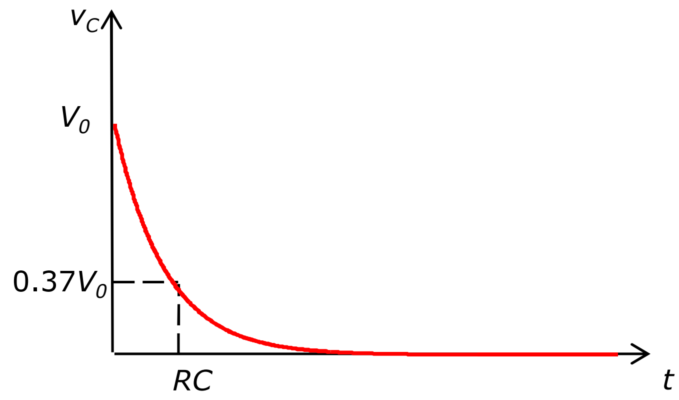
$$\left.\begin{aligned} iR + v_C &= 0 \\ i &= C\frac{dv_C}{dt} \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad RC\frac{dv_C}{dt} + v_C = 0$$

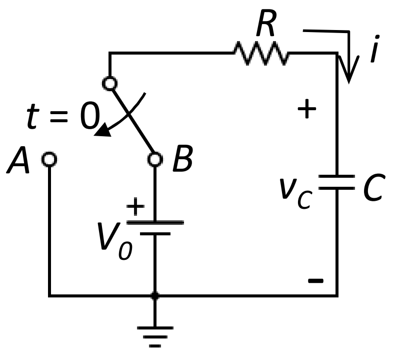
$$v_C = Ke^{at}$$

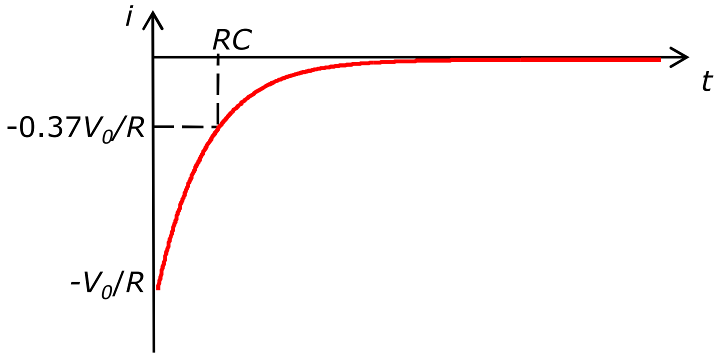
$$RC\frac{d}{dt}\left(Ke^{at}\right) + Ke^{at} = 0 \rightarrow e^{at}\left(aRC + 1\right) = 0 \rightarrow a = -\frac{1}{RC}$$

$$v_C = Ke^{-t/RC} \qquad v_C\left(t=0\right) = V_0 = Ke^0 = K$$

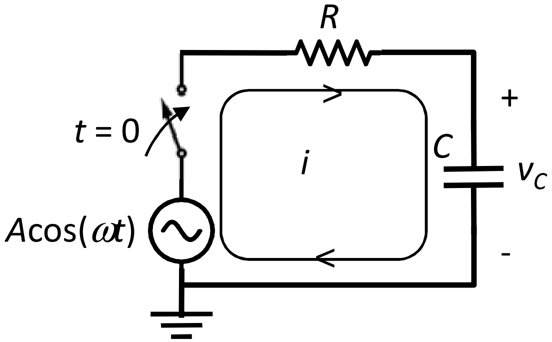
$$\rightarrow \quad v_C = V_0 e^{-t/RC}\ ; \quad i = C\frac{dv_C}{dt} = -\frac{V_0}{R}e^{-t/RC}$$







1.6 Circuitos RC: respuesta a señales senoidales (Refs. [2] y [3])



La respuesta de los circuitos electrónicos a señales senoidales tiene una gran importancia en el campo de la Ingeniería Electrónica. Nosotros no entraremos en detalle: solo trataremos un caso. Más adelante, cuando se analicen los circuitos amplificadores, se emplearán algunas de las nociones que se revisan en este apartado.

Empezamos planteando la ecuación KVL como se hizo antes

$$\left.\begin{array}{l} A\cos(\omega t) = iR + v_C \\ i = C\dfrac{dv_C}{dt} \end{array}\right\} \quad RC\frac{dv_C}{dt} + v_C = A\cos(\omega t)$$

(1) La solución de la ecuación homogénea se ha obtenido antes: $v_{Ch} = Ke^{-t/RC}$

(2) Para encontrar la solución particular se ensaya:

$$v_{Cp} = a sen(\omega t) + b\cos(\omega t)$$

Sustituimos v_{Cp} en la ecuación diferencial, lo que nos permite determinar los coeficientes *a* y *b*. El proceso se Indica a continuación:

$$RC\frac{d}{dt}\left[a sen(\omega t) + b\cos(\omega t)\right] + a sen(\omega t) + b\cos(\omega t) = A\cos(\omega t)$$

$$(aRC\omega + b)\cos(\omega t) + (-bRC\omega + a)sen(\omega t) = A\cos(\omega t)$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} RC\omega a + b = A \\ a - RC\omega b = 0 \end{array}\right\}; \quad a = \frac{ARC\omega}{1+(RC\omega)^2}; \quad b = \frac{A}{1+(RC\omega)^2}$$

$$\rightarrow v_{Cp} = \frac{A}{1+(RC\omega)^2}\left[RC\omega sen(\omega t) + \cos(\omega t)\right]$$

La solución particular v_{CP} se puede expresar de otra forma:

$$v_{Cp} = \frac{A}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}} cos(\omega t - \varphi)$$

Para determinar el desfase φ primero utilizamos la identidad trigonométrica: cos(p+q) = cos(p) · cos(q) – sen(p) · sen(q)

$$v_{Cp} = \frac{A}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}} cos(\omega t - \varphi) = \frac{A}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}} [cos(\omega t)cos(\varphi) + sen(\omega t)sen(\varphi)]$$

Ahora volvemos a escribir la expresión que se ha obtenido antes (página 15):

$$v_{Cp} = \frac{A}{1+(RC\omega)^2} [RC\omega sen(\omega t) + cos(\omega t)]$$

Identificando los coeficientes que multiplican los factores $sen(\omega t)$ y $cos(\omega t)$, tendremos:

$$\left.\begin{aligned} \frac{A}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}} cos(\varphi) = \frac{A}{1+(RC\omega)^2} \rightarrow cos(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}} \\ \frac{A}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}} sen(\varphi) = \frac{A}{1+(RC\omega)^2} RC\omega \rightarrow sen(\varphi) = \frac{RC\omega}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}} \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{sen(\varphi)}{cos(\varphi)} = tg(\varphi) = RC\omega$$

Resumiendo: $$v_{Cp} = \frac{A}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}} cos(\omega t - \varphi)$$

$$\varphi = arctg(\omega RC)$$

La amplitud y el desfase de v_{Cp}, por tanto, dependen de la frecuencia.

(3) La solución matemática de la ecuación diferencial viene dada por: $v_C = v_{Ch} + v_{Cp} = Ke^{-t/RC} + \frac{A}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}} cos(\omega t - \varphi)$

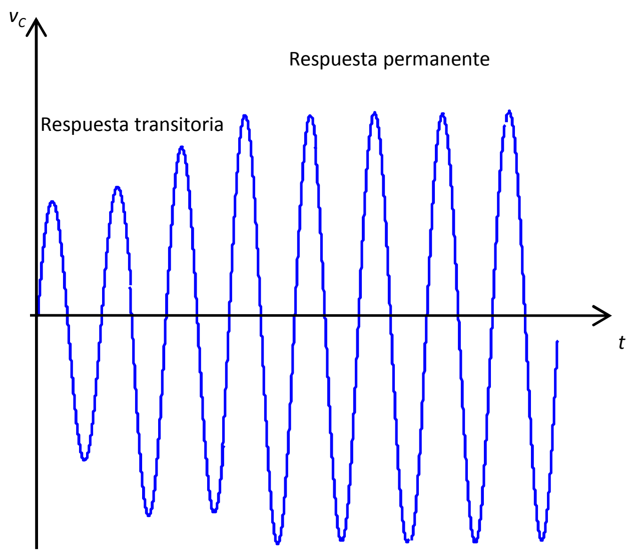
(4) Y la solución física se determina imponiendo la condición inicial $v_C(0) = 0$:

$$v_C(0) = K + \frac{A}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}} cos(-\varphi) = 0 \quad \rightarrow K = -\frac{A}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}} cos(\varphi) = -\frac{A}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}} = -\frac{A}{1+(RC\omega)^2}$$

Finalmente: $$v_C = v_{Ch} + v_{Cp} = -\frac{A}{1+(RC\omega)^2} e^{-t/RC} + \frac{A}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}} cos(\omega t - \varphi)$$

El término con la exponencial (la solución de la ecuación homogénea) recibe el nombre de *respuesta natural* porque no depende de la excitación (en este caso una señal senoidal). La respuesta natural se amortigua casi por completo transcurridas 4-5 constantes de tiempo, por lo que también se conoce como *respuesta transitoria*.

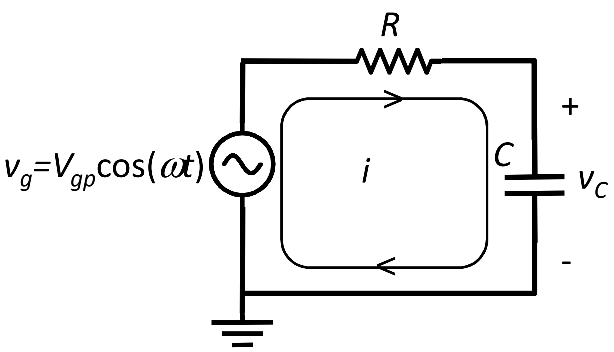
El segundo término se conoce como *respuesta forzada*: está determinado por la excitación y también por los parámetros del circuito. Cuando se ha extinguido la respuesta transitoria, se dice que el circuito ha alcanzado el *régimen permanente*: como el término que "sobrevive" es la respuesta forzada, también se habla de *respuesta permanente, o de régimen permanente.*



Circuitos RC: respuesta a señales senoidales (notación fasorial)

Cuando estemos interesados en determinar la respuesta permanente resulta mucho más cómodo expresar las corrientes o tensiones como *fasores*. Un fasor es un número complejo determinado por la amplitud (módulo) y la fase (argumento)de una onda senoidal:

Señales en el dominio del tiempo: $v_g = V_{gp}\cos(\omega t) = Re\left(\hat{V}_g e^{j\omega t}\right)$; $v_c = V_{cp}\cos(\omega t + \phi) = Re\left(\hat{V}_c e^{j\omega t}\right)$

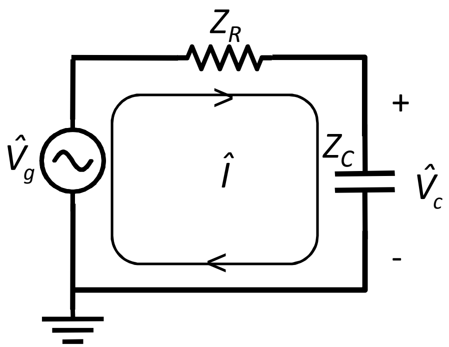


Fasores: $\hat{V}_g = V_{gp} = V_{gp\angle 0°}$ $\hat{V}_c = V_{cp}e^{j\phi} = V_{cp\angle\phi}$

Podemos, por ejemplo, determinar el fasor correspondiente a la corriente aplicando *la ley de Ohm generalizada*: $\hat{I} = \dfrac{\hat{V}_g}{Z_R + Z_C}$

En la expresión anterior Z_R y Z_C representan las ***impedancias*** de la resistencia y el condensador, dadas por: $Z_R = R;\quad Z_C = \dfrac{1}{j\omega C} = -\dfrac{j}{\omega C} = jX_C$

(X_C = -1/ωC es la *reactancia* del condensador)



También se puede determinar el fasor correspondiente a la tensión en el condensador: $\hat{V}_c = \hat{I}Z_C = \dfrac{\hat{V}_g}{R + \dfrac{1}{j\omega C}}\left(\dfrac{1}{j\omega C}\right) = \dfrac{\hat{V}_g}{j\omega RC + 1}$

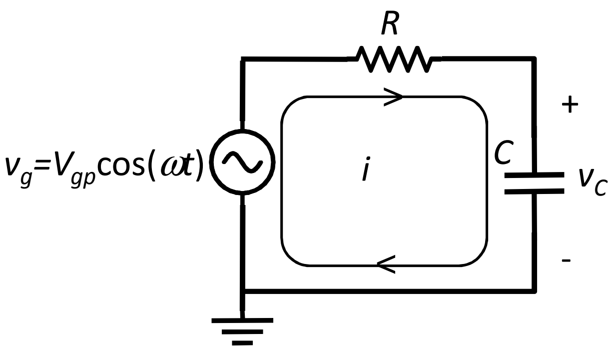
La amplitud y el desfase de la tensión en el condensador serán:

$$V_{cp} = \left|\hat{V}_c\right| = \left|\frac{\hat{V}_g}{j\omega RC + 1}\right| = \frac{\left|\hat{V}_g\right|}{\left|j\omega RC + 1\right|} = \frac{V_{gp}}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}}$$

$$\phi = arg\left(\hat{V}_c\right) = arg\left(\frac{\hat{V}_g}{j\omega RC + 1}\right) = arg\left(\hat{V}_g\right) - arg(j\omega RC + 1) = 0° - arctg(\omega RC) = -arctg(\omega RC)$$

La señal de tensión en el dominio del tiempo queda determinada una vez conocidas amplitud y desfase.

Respuesta a señales senoidales: filtro RC pasa-bajas



Vamos a tratar a v_c como la señal de salida del circuito. ¿Cómo responde a la excitación senoidal v_g de la entrada?. A la vista de la expresión de la amplitud

$$V_{cp} = \frac{V_{gp}}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}} \quad ,$$

podemos plantearnos qué ocurre en los casos límite de frecuencias bajas y altas.

En el límite $\omega \rightarrow 0$ las amplitudes de la entrada y la salida coinciden: esto era de esperar, ya que el condensador se comporta como un circuito abierto en continua.

En el límite $\omega \rightarrow \infty$ la amplitud de la salida tiende a 0. ¿Qué ocurre? A frecuencias muy altas la reactancia tiende a 0 y el condensador comporta casi como un cortocircuito.

Los circuito que se comportan de este modo se conocen como *filtros pasa-bajas*, puesto que permiten la transmisión de las señales de muy baja frecuencia (o en DC) desde la entrada a la salida.

La *función de transferencia* (que se denota como *H*) se define como la razón entre el fasor de la señal de salida y el de la señal de entrada. El módulo de *H* representa el cociente entre amplitudes y vendrá dado por:

$$|H| = \frac{1}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}}$$

Respuesta a señales senoidales: filtro RC pasa-bajas

• Si representamos $|H|$ en función de la frecuencia obtenemos *la curva de respuesta en magnitud* (o en amplitud).

•También se puede representar $|H|$ en *decibelios* (dB):

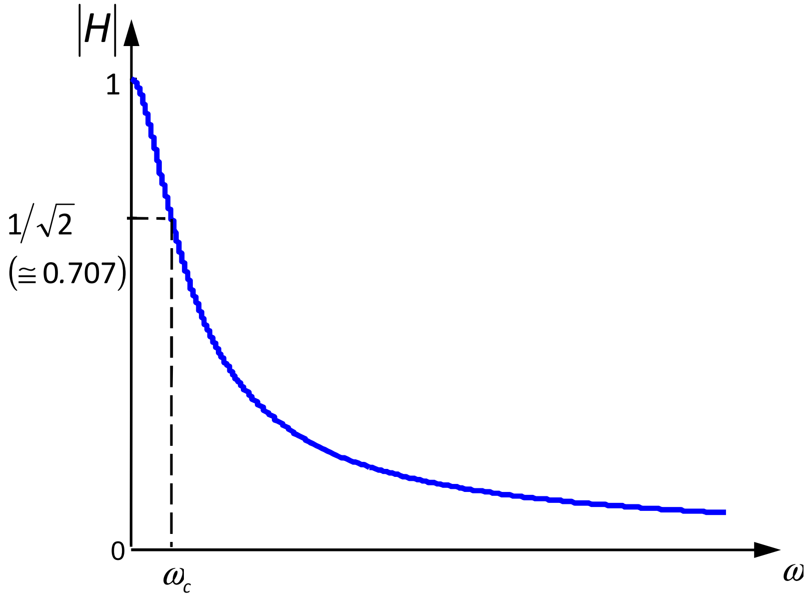
$$|H|\ (\text{dB}) = 20\cdot\log_{10}|H|$$

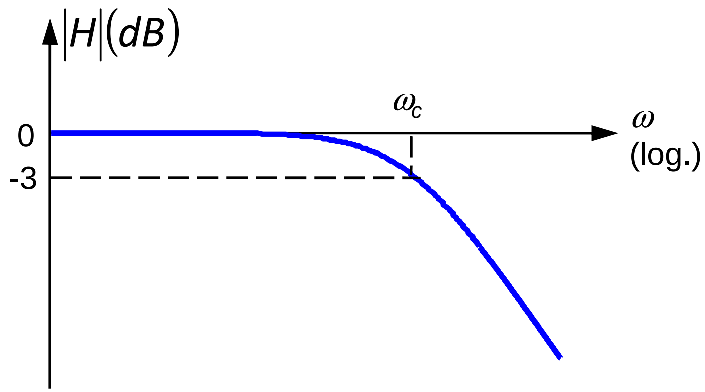
En la representación de $|H!$ en dB se suele emplear una escala logarítmica para las frecuencias.

• Se define la *frecuencia de corte* a 3 dB (ω_c) como aquella a la que $|H|$ se reduce en un factor igual a $\sqrt{2}$ respecto al máximo (igual a 1). Una reducción igual a este factor se corresponde con una reducción en 3 dB.

•La frecuencia de corte está determinada por los componentes del circuito:

$$|H(\omega=\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega_c RC)^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \omega_c = \frac{1}{RC} \qquad \left(f_c = \frac{1}{2\pi RC}\right)$$

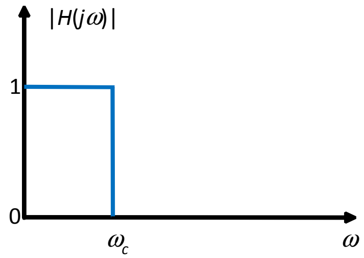




Respuesta a señales senoidales: filtro RC pasa-bajas

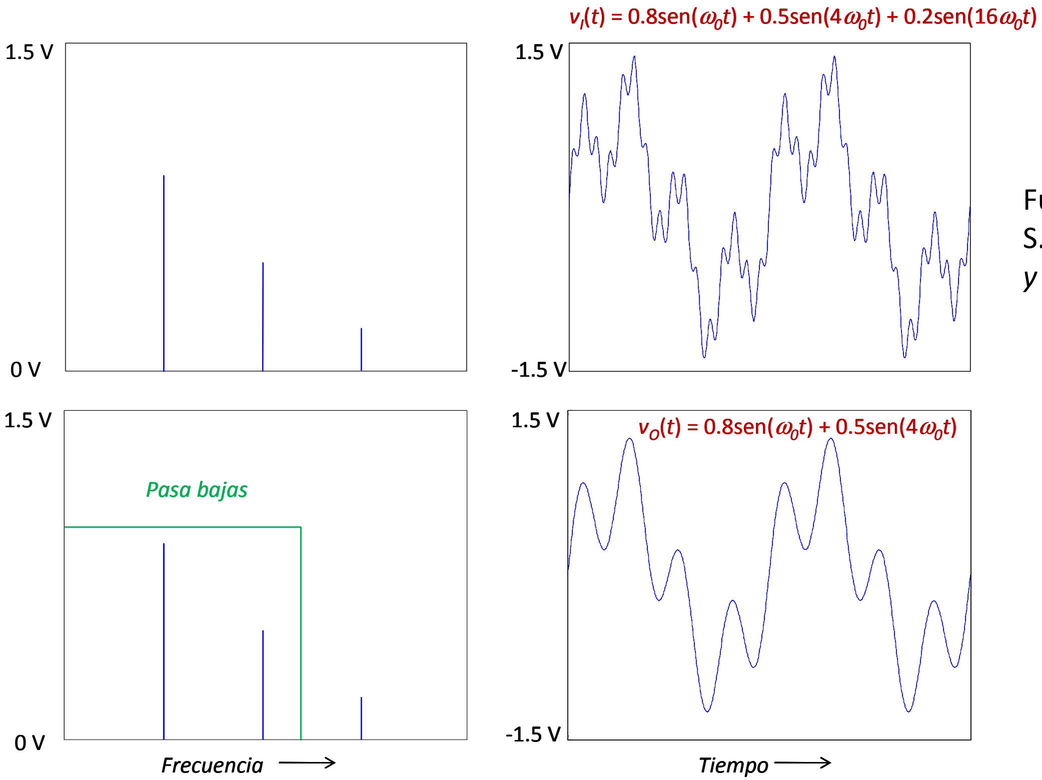
- En un filtro ideal la magnitud de la respuesta sería igual a 1 por debajo de la frecuencia de corte, y cero por encima (respuesta de tipo *brickwall*). El filtro RC que hemos estudiado se desvía de este comportamiento porque solo incluye un condensador: se trata de un filtro de primer orden. Hay que incorporar más secciones RC para que tenga un orden mayor y se aproxime al caso ideal.

Actualmente este tipo de soluciones se emplean menos porque se han desarrollado algoritmos para el procesado digital de las señales.



Respuesta de un filtro pasa-bajas ideal

- En las siguientes gráficas se observa el efecto del filtrado sobre una señal con tres componentes de frecuencias ω_0, $4\omega_0$ y $16\omega_0$. La componente de mayor frecuencia se rechaza al ser la frecuencia de corte menor que $16\omega_0$.



Fuente:
S. Franco: *Diseño con amplificadores operacionales y circuitos integrados lineales*, McGraw-Hill, 1998).

1.7 Bobinas (inductores)

(refs. [2], [3], [4])

•Las bobinas o inductores son componentes que pueden almacenar energía en forma de campo magnético.

•Sabemos que, de acuerdo con la ley de Ampére, las corrientes pueden crear campos magnéticos. Y que los campos magnéticos variables en el tiempo inducen tensiones en los circuitos, de acuerdo con la ley de Faraday. La consecuencia que se deriva de ambos fenómenos es que una corriente variable puede inducir una tensión.

•Esta propiedad se pone de manifiesto en los inductores, que pueden construirse utilizando un núcleo de material magnético (por ejemplo, acero magnético) sobre el que se arrolla la bobina (de hilo de cobre esmaltado, por ejemplo).

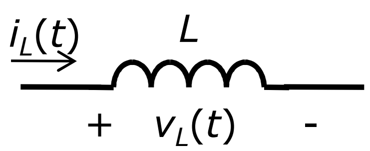
•La tensión y la corriente en un inductor se relacionan de acuerdo con la expresión: $v_L = L\dfrac{di_L}{dt}$,

donde *L* representa el *coeficiente de autoinducción* o *inductancia* del inductor.

•De esta relación se desprenden dos propiedades:

(1) No puede haber variaciones discontinuas en la corriente: la derivada se haría infinita, así como la tensión, lo que carece de sentido.

(2) Si la corriente i_L tiene un valor constante la bobina se comporta como un cortocircuito, ya que se anula la derivada y por tanto se anula la caída de tensión.



Símbolo

1.7 Bobinas (inductores)

(refs. [2], [3], [4])

En el análisis de circuitos de corriente alterna senoidal en los que se empleen inductores, se debe utilizar la siguiente expresión para la impedancia: $Z_L = jX_L = j\omega L$ ($X_L = \omega L$ es la *reactancia*)

Cualquier bucle en un circuito presenta una cierta inductancia, aunque se suele ignorar (también los cables o hilos de conexión ofrecen una pequeña resistencia al paso de la corriente, pero esta resistencia no se suele tener en cuenta).

Cuando se necesita emplear un inductor, este se puede construir arrollando una bobina de hilo de cobre (o solenoide) sobre un núcleo magnético. La inductancia se calcula a partir de la expresión:

$$L = \frac{\mu N^2 \pi R^2}{l},$$

donde μ representa la permeabilidad del núcleo, N el número de vueltas de la bobina, R el radio de la bobina y l la longitud del núcleo.

Para determinar la inductancia equivalente de una asociación de inductores conectados en serie se emplea la

expresión: $L_{eq} = \sum L_i$

Y si van conectados en paralelo: $\frac{1}{L_{eq}} = \sum \frac{1}{L_i}$

1.8 Transformadores

(refs. [2], [3])

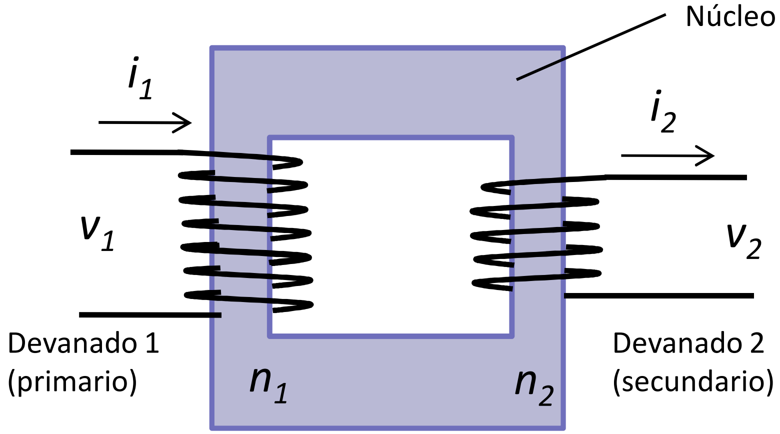
• Como su nombre indica, los transformadores permiten la transformación de señales alternas (de tensión o corriente) en otras señales alternas de diferente amplitud.

• Para el transporte a largas distancias de la energía producida en las centrales eléctricas se debe elevar la tensión porque así se reducen las pérdidas en los cables conductores, que son proporcionales al cuadrado de la corriente. Esto permite además emplear cables con calibres menores.

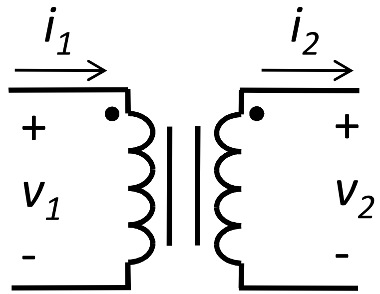
•Pero muchos equipos electrónicos deben alimentarse con fuentes de tensión mucho menor. En este caso se emplean transformadores reductores de tensión .

•Un transformador está constituido por dos bobinas (devanados) arrolladas sobre un núcleo, de manera que están acopladas magnéticamente. La bobina con n_1 vueltas a la que se le aplica la tensión v_1, considerada como la entrada del transformador, recibe el nombre de *primario*. La otra bobina (con n_2 vueltas) recibe el nombre de *secundario*.

•Al aplicar una tensión alterna v_1 en la entrada se genera una corriente i_1 también alterna, con lo que se induce un campo magnético variable en el tiempo. Como el núcleo se fablica empleando un material ferromagnético, el campo magnético queda confinado en el interior de este último. El campo magnético a su vez induce la tensión v_2 del secundario. Si se conecta una carga en el secundario, por ella podrá circular una corriente i_2.



•El símbolo del transformador se muestra más abajo. Los puntos sirven para identificar terminales con la misma polaridad: si en el primario el terminal marcado con el punto es positivo respecto al que no está marcado, lo mismo ocurre en el secundario.



• En un transformador ideal se verifican las siguientes relaciones: $v_2 = \left(\frac{n_2}{n_1}\right) v_1 = n v_1$; $p_2 = p_1$

•A la primera relación se llega aplicando la ley de Faraday (más información en la referencia [2]). El factor $n = n_2/n_1$ que relaciona v_1 y v_2 se denomina *relación de transformación* o *relación de espiras*.

•De acuerdo con la segunda relación, la potencia instantánea entregada al primario coincide con la recibida por el secundario. Dicho de otro modo, el transformador ideal se limita a transferir la potencia (no la almacena ni tampoco la disipa).

•Combinando ambas relaciones se deduce fácilmente la relación entre las corrientes:

$$\left.\begin{array}{l} v_2 = n v_1 \rightarrow n = \dfrac{v_2}{v_1} \\ p_2 = p_1 \rightarrow v_2 i_2 = v_1 i_1 \rightarrow i_2 = i_1 \dfrac{v_1}{v_2} \end{array}\right\} \rightarrow i_2 = \frac{i_1}{n}$$

•Las relaciones anteriores ponen de manifiesto que si un transformador reduce la tensión entonces eleva la corriente, y viceversa.

•Es importante recalcar que las relaciones obtenidas para tensiones y corrientes solo tienen validez si estas últimas varían en el tiempo. No se pueden aplicar con tensiones o corrientes continuas.