Macroeconomía III (Grado en Economía)

Universidad de La Laguna

Tema 2. El modelo Neoclásico con tasa de ahorro endógena

Juan Acosta Ballesteros

Carlos Bethencourt Marrero

Gustavo A. Marrero Díaz

Fernando Perera Tallo

Departamento de Análisis Económico

Universidad de La Laguna

TEMA 2.
EL MODELO NEOCLÁSICO CON TASA DE AHORRO ENDÓGENA

1. Introducción

En el tema 1 se presentó el modelo de Solow, que es un modelo neoclásico de crecimiento en el que la tasa de ahorro es exógena. Este modelo es muy usado para describir, pero no debería ser usado para hablar de optimalidad ni para evaluar políticas. La razón principal es que en Solow la tasa de ahorro se asume que es constante y exógena. Para poder abordar cuestiones de optimalidad, las decisiones de ahorro han de ser el resultado de la solución de un problema de optimización dinámica, en el que al consumidor le preocupe tanto el presente como el futuro, dado que ahorrar no es otra cosa que transferir recursos desde el consumo presente hacia el consumo al futuro.

La endogeneización de las decisiones de ahorro (o de consumo intertemporal) es la principal aportación del modelo que veremos en este tema: el modelo de Ramsey/Cass-Koopmans. Muy resumidamente, este modelo explica cómo los agentes deciden cuánto quieren consumir en cada momento del tiempo a través de la maximización de su utilidad en un problema de elección intertemporal.

Como se verá, la existencia de rendimientos decrecientes en la acumulación de capital va a seguir originando que el crecimiento se agote, por lo que este nuevo modelo no va a permitir solucionar las carencias empíricas detectadas en el modelo de Solow sin progreso tecnológico. Sin embargo, va a proporcionar un modelo mucho mejor fundamentado teóricamente que describe la elección intertemporal en un modelo de equilibrio general dinámico. Además, este modelo servirá de base a los modelos de crecimiento endógeno que se tratarán en el Tema 3.

Usaremos este modelo para:

- Presentar los fundamentos de los modelos dinámicos de equilibrio general, amplísimamente utilizados para estudiar políticas óptimas, crecimiento económico y entender el comportamiento intertemporal de los agentes.
- En el marco más básico (sin gobierno, sin externalidades, sin sector exterior, etc.) aprenderemos a analizar el estado estacionario (equilibrio a largo plazo) y cómo caracterizar las dinámicas de transición de la economía (la senda de un estado estacionario a otro).
- Discutiremos la optimalidad de las asignaciones que se derivan del equilibrio competitivo. Para ello aprenderemos a resolver y a comparar las asignaciones resultantes del equilibrio competitivo y del problema de un planificador benevolente.
- Introduciremos un sector público que recauda impuestos para estudiar la incidencia que sobre las decisiones óptimas tienen los diferentes tipos de impuestos (sobre el consumo, sobre la renta, sobre el capital, etc.)
- Por último, estudiaremos la incidencia que tiene la existencia de un bien que se importa (ya sea para consumo final o como factor productivo).

El esquema del tema es el siguiente. En el apartado 2 se plantea y resuelve el problema de elección intertemporal. En el apartado 3 se obtiene el equilibrio estacionario y se deduce la dinámica del modelo. En el apartado 4 se discuten las diferencias esenciales del problema de la familias-productivas y del planificador. En los apartados 5 y 6 se considera la incidencia de los impuestos y la economía abierta.

2. Elección óptima de la tasa de ahorro: el modelo de Ramsey/Cass-Koopmans

En este tema se modeliza el comportamiento de agentes que deciden su consumo en el tiempo. Tal y como se explicó en el tema 1, esa elección de consumo en cada instante del tiempo determinará el ahorro y, como consecuencia, la inversión neta. Por ello, el modelo dinámico que resuelven los agentes de esta economía debe tener en cuenta la restricción de recursos (o de rentas reales) de la economía.

La descripción de esta economía ha de hacerse en base a: su tecnología (la función de producción neoclásica), los recursos iniciales (el valor inicial de la riqueza per cápita, $k(0)$) y las preferencias, que vienen dadas por una función de utilidad intertemporal.

Existen varios tipos de agentes: familias (consumidores), empresas (productores), gobierno (sólo lleva a cabo política fiscal) y en algunos casos también se considera el sector exterior.

Otros supuestos básicos del modelo son los siguientes:

- Los agentes viven infinitos periodos. Este supuesto puede interpretarse como que la familia consiste en un continuo de generaciones que van naciendo y muriendo sucesivamente y las generaciones pasadas se preocupan por las futuras.

- Estos agentes toman decisiones dinámicamente. Esto es, se preocupan no sólo por el presente, sino también por el futuro, y las decisiones que toman hoy afectan a los recursos que tendrán disponibles en el futuro y, por tanto, a su bienestar futuro.
- No existe incertidumbre en el modelo, es decir, los agentes hacen previsiones 'perfectas' (idea de expectativas racionales) de las sendas futuras de precios, impuestos, etc.
- No existe heterogeneidad entre los agentes que viven en la economía. Así, resolvemos el problema de lo que se conoce como agente representativo. Esto equivale a la idea de que existen muchos que son iguales. Así, este tipo de modelos será útil para analizar sólo aspectos de eficiencia en la asignación de recursos y no para estudiar aspectos de desigualdad y de equidad.
- Por último, supondremos que las empresas operan en un entorno competitivo (los factores se remuneran en base a su productividad marginal y los beneficios son cero) y las familias son las dueñas, en última instancia, de las empresas y del capital. Esto permite utilizar a la **familia-productora** como un agente ('doble') que facilita mucho la resolución de los problemas.

2.1. El problema de optimización dinámica y las condiciones de optimalidad

En el modelo de Solow se ha supuesto que los agentes ahorran una parte constante de su renta sin cuestionar la racionalidad de este comportamiento. En este apartado se describirá la actuación de una economía en la que a los agentes se les permite determinar la trayectoria de consumo de forma óptima. El modelo se debe a *Ramsey* (1928) y posteriormente fue perfeccionado por *Cass* (1965) y *Koopmans* (1965).

Para continuar con un planteamiento sencillo del problema, supondremos que la elección óptima de producción, consumo e inversión es llevada a cabo por **familias-productoras**. La idea es que ahora no se trata de una regla de decisión exógena (como en Solow), sino de seguir aquélla que consigue el mejor resultado en términos de bienestar para el agente que resuelve el problema (la familia-productora en este caso). En cualquier caso, hay que dejar claro que el resultado al que vamos a llegar utilizando familias productoras es el mismo que podríamos obtener planteando un modelo con mercados descentralizados, tal y como se muestra en el apéndice del tema.

Las **preferencias** de la familia-productora estarán representadas por una función de utilidad que valora el consumo en cada momento del tiempo. Se supone que esta función de utilidad presenta la siguiente forma, donde c(t) es el consumo *per cápita* en el momento t.

$$u[c(t)] \;\; ; \;\; u'(c) > 0 \;\; ; \;\; u''(c) < 0 \;\; ; \;\; \lim_{c \to 0} u'(c) = +\infty \qquad [2.1]$$

En cada momento del tiempo existirán *L(t)* personas, por lo que la utilidad de la sociedad, suponiendo que la tasa de crecimiento de la población es *n>0*, queda[1]

$$L(t)u[c(t)] = u[c(t)]e^{nt} \qquad [2.2]$$

[1] Tenemos que $L(t) = L(0)e^{nt}$ donde *L(0)* es la población en el momento inicial. Supondremos que *L(0)=1*.

El **problema de las familias-productoras** consistirá en maximizar la siguiente función de utilidad total, que contempla el flujo de utilidad que se espera desde el momento actual hasta el final del periodo de planificación.

$$\max_{c(t)} \int_0^{\infty} e^{-\rho t} u[c(t)] e^{nt}\, dt$$

$$s.a. \quad \dot{k}(t) = f[k(t)] - c(t) - (n+\delta)k(t) \qquad [2.3]$$

$$k(0) > 0$$

donde $\rho > 0$ es la tasa de descuento subjetiva de la utilidad o tasa de preferencia temporal, que mide el grado de impaciencia en el consumo de los agentes. También se puede decir que la tasa de preferencia temporal representa el hecho de que los individuos, aunque altruistas con respecto a sus descendientes, prefieren el consumo propio más que el de sus hijos, es decir, el tipo de descuento representa el grado de egoísmo paterno en un mundo con altruismo intergeneracional.

Es importante tener e cuenta que para que para que la utilidad sea finita (es decir, para que la función objetivo del problema [2.3] no sea infinita) se debe imponer la restricción de que los términos del interior de la integral se aproximen a cero cuando *t* tiende a infinito. Esto requiere que $\rho > n$. Como se verá, esta restricción del valor de la tasa de preferencia temporal será importante para garantizar la eficiencia dinámica del equilibrio estacionario de este modelo.

Nótese que la restricción dinámica del problema [2.3] es precisamente la restricción de recursos que dedujimos en el tema 1. Esta es una condición de factibilidad en la relación consumo-capital, dados los recursos existentes en la economía y la tecnología.

Las condiciones de optimalidad (también denominadas de primer orden) se obtienen a partir del siguiente Hamiltoniano:[2]

$$H(t) = e^{-(\rho-n)t} u[c(t)] + \mu(t)\{f[k(t)] - c(t) - (n+\delta)k(t)\}$$

donde $\mu(t)$ es el multiplicador dinámico de Lagrange, que mide la renuncia en términos de utilidad a la que hay que hacer frente para acumular una unidad adicional de capital. Las condiciones de optimalidad de este problema son las siguientes:

$$\frac{\partial H(t)}{\partial c(t)} = 0$$

$$\frac{\partial H(t)}{\partial k(t)} = -\dot{\mu}(t)$$

$$\frac{\partial H(t)}{\partial \mu(t)} = \dot{k}(t)$$

A las que hay que añadir la condición de transversalidad, que comentaremos más adelante.

[2] En clase se explicará en mayor detalle el significado del Hamiltoniano, que en definitiva es algo similar a un Lagrangiano pero en un contexto de optimización dinámica. No se dará un curso de optimización dinámica. Tan sólo se presentará la forma de resolver estos problemas y las intuiciones de sus condiciones.

Operando:

$$e^{-(\rho-n)t}u'[c(t)]-\mu(t)=0 \rightarrow \mu(t)=e^{-(\rho-n)t}u'[c(t)]$$

$$\mu(t)\{f'[k(t)]-(n+\delta)\}=-\dot{\mu}(t) \qquad [2.4]$$

$$\dot{k}(t)=f[k(t)]-c(t)-(n+\delta)k(t)$$

Para eliminar *μ(t)*, se toman logaritmos neperianos de la primera ecuación de [2.4] y se deriva respecto al tiempo:

$$ln\,\mu(t)=-(\rho-n)t-ln(u'[c(t)]) \rightarrow \frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)}=-(\rho-n)-\frac{u''[c(t)]}{u'[c(t)]}\dot{c}(t)$$

Después, se sustituye en la segunda ecuación de [2.4], obteniéndose

$$-\frac{u''[c(t)]}{u'[c(t)]}\dot{c}(t)=f'[k(t)]-\rho-\delta$$

o, de forma equivalente,

$$\left[-\frac{c(t)u''[c(t)]}{u'[c(t)]}\right]\frac{\dot{c}(t)(t)}{c(t)}=f'[k(t)]-\rho-\delta \qquad [2.5]$$

Definiendo la elasticidad de la utilidad marginal respecto del consumo como

$$\sigma[c(t)]=\left[-\frac{c(t)u''[c(t)]}{u'[c(t)]}\right]>0 \qquad [2.6]$$

Así, la condición [2.5] queda:

$$f'[k(t)]-\delta=\sigma[c(t)]\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}+\rho \qquad [2.7]$$

A esta condición se la conoce como la **condición de Ramsey-Keynes** o condición de optimalidad de la decisión de consumo intertemporal (o de consumo-ahorro). La expresión anterior expresa que la ganancia por dejar de consumir una unidad de bien en el instante actual hoy y destinarla a inversión (parte izquierda de la ecuación) ha de igualar el coste de dejar de consumir esa unidad de bien (parte derecha de la ecuación). La ganancia viene dada por el producto marginal neto. El coste proviene de la impaciencia de los agentes (medido por la tasa de preferencia temporal) que les lleva a preferir consumir lo antes posible. Además, la preferencia de los agentes por trayectorias de consumo planas hace que cuando $\dot{c}(t)>0$ exista un menor aliciente a invertir. Lo contrario sucede cuando se espera que el consumo disminuya en el futuro ($\dot{c}(t)<0$).

Al resolver el problema de optimalidad intertemporal, las familias están ordenando el consumo en el tiempo asegurándose que cuando en un período retiran una unidad de consumo *per cápita* y la destinan a inversión, la satisfacción que se obtiene de un mayor consumo en el período siguiente compensa la satisfacción perdida hoy. Con este criterio, reasignarán el consumo entre los periodos hasta que no haya ganancias por hacerlo.

La condición [2.7] (optimalidad intertemporal) junto con la restricción de recursos o ecuación de transición (restricción del problema [2.3]) son las dos condiciones necesarias para poder caracterizar la solución del problema de la familia-productora.

La condición de transversalidad

Además de las dos condiciones anteriores, en este tipo de modelos dinámicos ha de imponerse una condición adicional que permita poder caracterizar la senda de equilibrio óptimo, tal y como se explicará en el siguiente apartado. Esta condición es lo que se conoce como ***condición de transversalidad*** y viene dada por:

$$\lim_{t\to\infty} k(t)\mu(t) = \lim_{t\to\infty} k(t)u'\left[c(t)\right]e^{-(\rho-n)t} = 0 \qquad [2.8]$$

En este caso, la condición de transversalidad indica que el valor presente del *stock* de capital (el capital por su precio sombra, que es el multiplicador) que los agentes dejarán al final del periodo de planificación ha de ser igual a cero. No es posible que sea negativo y que sea positivo claramente no es óptimo, ya que los agentes acumulan capital para el futuro, pero cuando no hay futuro nunca es óptimo dejar sin usar algo que tenga valor. Más adelante veremos la relevancia de esta condición para poder establecer la trayectoria de equilibrio del modelo.

3. El Estado estacionario y la dinámica de transición

3.1. El estado estacionario o equilibrio a largo plazo

La tecnología de este modelo es la misma que presentamos en el tema 1 cuando analizamos el modelo de Solow. Por ello, también ahora, los rendimientos decrecientes en la acumulación de capital conducen a que el crecimiento se agote. De este modo, usando un razonamiento similar al del tema 1, se puede llegar la conclusión de que el estado estacionario (EE) en esta economía viene caracterizado por un nivel constante de consumo y de capital per capita. Esto es:

$$\dot{c}(t) = \dot{k}(t) = 0$$

Las dos condiciones que resumen la evolución óptima (y factible) de c y k vienen dadas por 2.13 y 2.9 (además de la condición de Transversalidad). Las volvemos a escribir para facilitar la exposición:

$$f'\left[k(t)\right] - \delta = \sigma\left[c(t)\right]\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} + \rho \qquad [2.9]$$

$$\dot{k}(t) = f[k(t)] - c(t) - (n+\delta)k(t) \qquad [2.10]$$

Así, para caracterizar el estado estacionario, imponemos que $\dot{c}(t) = \dot{k}(t) = 0$ en estas dos condiciones, y nos queda (los asteriscos denotan que las variables son de equilibrio estacionario):

- El producto marginal del capital en el estado estacionario iguala a la suma de la tasa de preferencia temporal y la tasa de depreciación del capital físico.

$$f'(k^*) = (\rho + \delta) \qquad [2.11]$$

- La curva que proporciona la restricción de recursos de la economía en estado estacionario (que analizamos en el tema 1). Su interpretación es que el stock de capital per cápita queda inalterado en el tiempo si se consume exactamente la producción que queda después de descontar la depreciación del capital per cápita:

$$c^* = f(k^*) - (n+\delta)k^* \qquad [2.12]$$

Como la condición [2.11] no depende del consumo, sino tan sólo de *k*, de ella se puede obtener directamente el estado estacionario del capital. Sustituyendo ese valor en [2.12] se obtiene el consumo de equilibrio.

La representación gráfica del equilibrio estacionario se muestra en el gráfico 1. La representación de la ecuación $\dot{c} = 0$,[2.11], en el plano *(c,k)* es una línea vertical (un valor de *k* independiente del valor de *c*). La ecuación [2.12], como ya sabemos desde el tema 1, es una curva en forma de U-invertida que determina los valores de *k* y *c* para los cuales $\dot{k} = 0$. La intersección de ambas curvas determina la localización exacta del estado estacionario, dado que éste es el punto en el que se verifica simultáneamente que $\dot{c} = 0$ y $\dot{k} = 0$. El equilibrio estacionario es, por tanto, compatible con la condición de optimalidad intertemporal y la restricción de recursos de la economía.

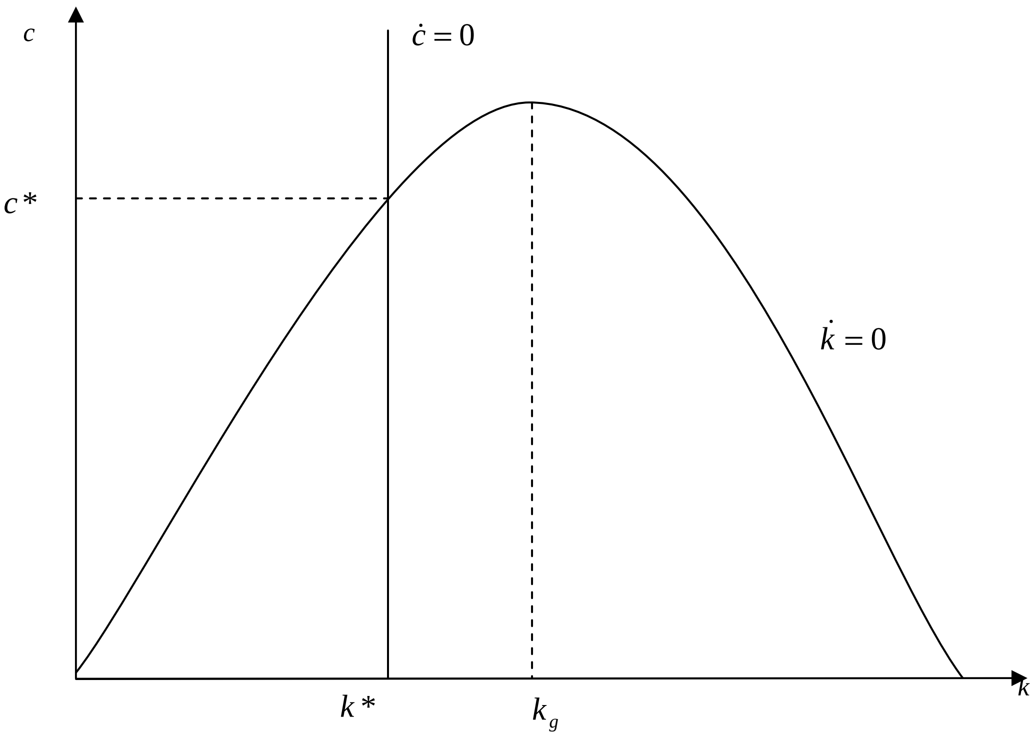

Gráfico 1: El equilibrio estacionario

La eficiencia dinámica del modelo de Ramsey/Cass-Koopmans

En el tema 1 aprendimos a identificar los equilibrios dinámicamente eficientes y los ineficientes. Sabemos, por tanto, que los puntos que quedan a la izquierda de la regla de oro son eficientes.

En el gráfico 1 se ha representado un equilibrio estacionario que es eficiente. Realmente, es fácil demostrar que en el modelo de Ramsey/Cass-Koopmas sólo es posible obtener equilibrios eficientes. El razonamiento es el siguiente:

$$k^* < k_g \quad \rightarrow \quad f'(k^*) > f'(k_g)$$

Además sabemos que en el equilibrio estacionario se verifica [2.11]:

$$f'(k^*) = \rho + \delta$$

Y que en el máximo de la curva $\dot{k} = 0$ se cumple:

$$f'(k_g) = n + \delta$$

Por tanto, siempre que la tasa de preferencia temporal supere a la tasa de crecimiento de la población el estado estacionario será eficiente:

$$f'(k^*) > f'(k_g) \quad \rightarrow \quad \rho + \delta > n + \delta \quad \rightarrow \quad \rho > n$$

Puesto que $\rho > n$, podemos asegurar que el estadio estacionario siempre será eficiente en este modelo. Por tanto, la recta $\dot{c} = 0$ siempre debe representarse a la izquierda del capital de la regla de oro.

3.2. La dinámica de la economía fuera del estado estacionario: el diagrama de fases

Las ecuaciones [2.9] y [2.10] (además de la condición de transversalidad) definen el comportamiento dinámico en el tiempo del consumo y del capital, es decir, la solución de este sistema de ecuaciones describe la trayectoria temporal que seguirán ambas variables en el equilibrio. El gráfico 2 muestra cómo se comporta el capital per cápita fuera del estado estacionario.

Por una parte, desde el tema 1 sabemos que cuando la economía está por encima de la curva $\dot{k} = 0$ se está consumiendo más de lo que es factible para dejar el capital per cápita inalterado y, como consecuencia, el stock de capital per cápita se reducirá. Cuando se consume menos de lo que indica esta curva, el capital per cápita tiende a aumentar.

Por otra parte, la evolución del consumo per cápita se obtiene de la condición de Ramsey-Keynes, [2.9]. Despejando:

$$v_c(c(t),k(t)) = \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\sigma[c(t)]}\{f'[k(t)] - \rho - \delta\} = \frac{1}{\sigma[c(t)]}\{f'[k(t)] - f'[k^*]\}$$

Nótese que cuando la economía se encuentra con niveles de capital inferiores al el estado estacionario el consumo es creciente, ya que cuando *k(t)<k**, tenemos que $f'[k(t)] < f'[k^*]$ y, en consecuencia, $v_c>0$. Es decir, la trayectoria óptima de consumo es creciente para esos niveles de capital. La explicación de este resultado es la siguiente, si los agentes esperan situarse a largo plazo sobre el capital correspondiente al estado estacionario, cuando se parte de un nivel de capital inferior, las expectativas son que el capital crecerá en el futuro y, por tanto, hay expectativas de ampliación de las posibilidades de consumo futuras. En consecuencia, la trayectoria de consumo es creciente en el tiempo.

Por un razonamiento similar, podemos probar que cuando el capital per cápita supera su valor de estado estacionario, el consumo será decreciente en el tiempo.

Reuniendo lo dicho, las curvas $\dot{c}=0$ y $\dot{k}=0$ dividen el espacio en cuatro regiones. La dinámica de cada una de esas regiones se representa por flechas, tal y como se observa en el gráfico 2. Este esquema para estudiar la dinámica de la solución se denomina **diagrama de fases**.

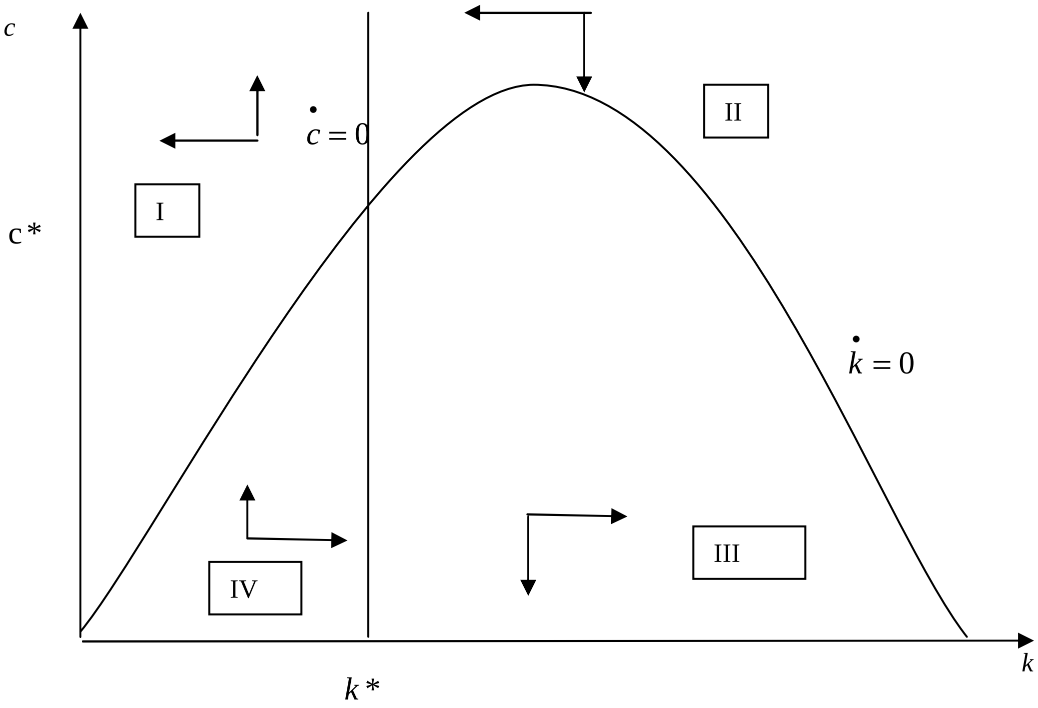

Gráfico 2: Diagrama de fases

El tipo de equilibrio que describen estas ecuaciones es lo que se denomina **equilibrio de punto de silla**, que se caracterizan por tener una única trayectoria al equilibrio de estado estacionario. El resto de trayectorias llevan a largo plazo a situaciones que no son equilibrio (no son fruto de la resolución del problema de optimización). Esto genera un resultado muy importante: *la única trayectoria convergente al estado estacionario es precisamente la que resulta de resolver el problema dinámico que hemos planteado*; *cualquier otra trayectoria que no termine convergiendo en el equilibrio estacionario no es óptima.* Nótese que este resultado facilita mucho las cosas a la hora de analizar cambios en las economías y realizar ejercicios de política. Si tuviéramos muchas trayectorias que convergieran al estado estacionario, no sabríamos cual es la óptima. En este caso, al tener un equilibrio de punto de silla, tenemos claro que la única trayectoria convergente en la óptima.

Para entender mejor el resultado de punto de silla y poder caracterizar la trayectoria convergente, situémonos en alguno de los cuadrantes que delimitan las curvas $\dot{c}=0$ y $\dot{k}=0$.

Por ejemplo, si la economía parte del cuadrante I, es fácil observar que esta terminará por converger a k(t)=0 y a un nivel de c(t) muy grande. Pero todas estas trayectorias incumplen la condición de factibilidad (se produce cero y se consume infinito). Por su parte, si partimos del cuadrante III, la dinámica nos lleva a una situación de c(t)=0 y de k(t) muy grande. Pero esta situación, aunque factible, incumple la condición de transversalidad, al ser la utilidad marginal de c=0 infinito (el valor del capital en el infinito no será cero). Así, los únicos cuadrantes consistentes con una trayectoria convergente son el II y el IV. Pero no cualquier punto que parta de estos cuadrantes convergerá al estado estacionario. Por ejemplo, si el punto de partida es el cuadrante II, pero está muy cerca de la U-invertida y alejado de la línea vertical, en muy pocos periodos la economía pasará al cuadrante III y nos iremos a una solución que incumple la condición de transversalidad. Un razonamiento análogo podemos hacer para puntos del cuadrante IV. En conclusión: dado *k(0)*, existe un solo valor de *c(0)* que sitúe a la economía en una senda convergente al estado estacionario que, además, es la única consistente con las condiciones de optimalidad.

Para entender mejor el resultado de punto de silla y poder caracterizar la trayectoria convergente usaremos el gráfico 3, que se ha representado empleando una función de utilidad con elasticidad intertemporal de sustitución constante[3].

Tal y como se presenta en el gráfico, sólo existe una única trayectoria de convergencia al estado estacionario. Además, comprobaremos que la trayectoria que maximiza la utilidad y, por tanto, la trayectoria de consumo que elegirán los agentes es precisamente la única trayectoria de convergencia.

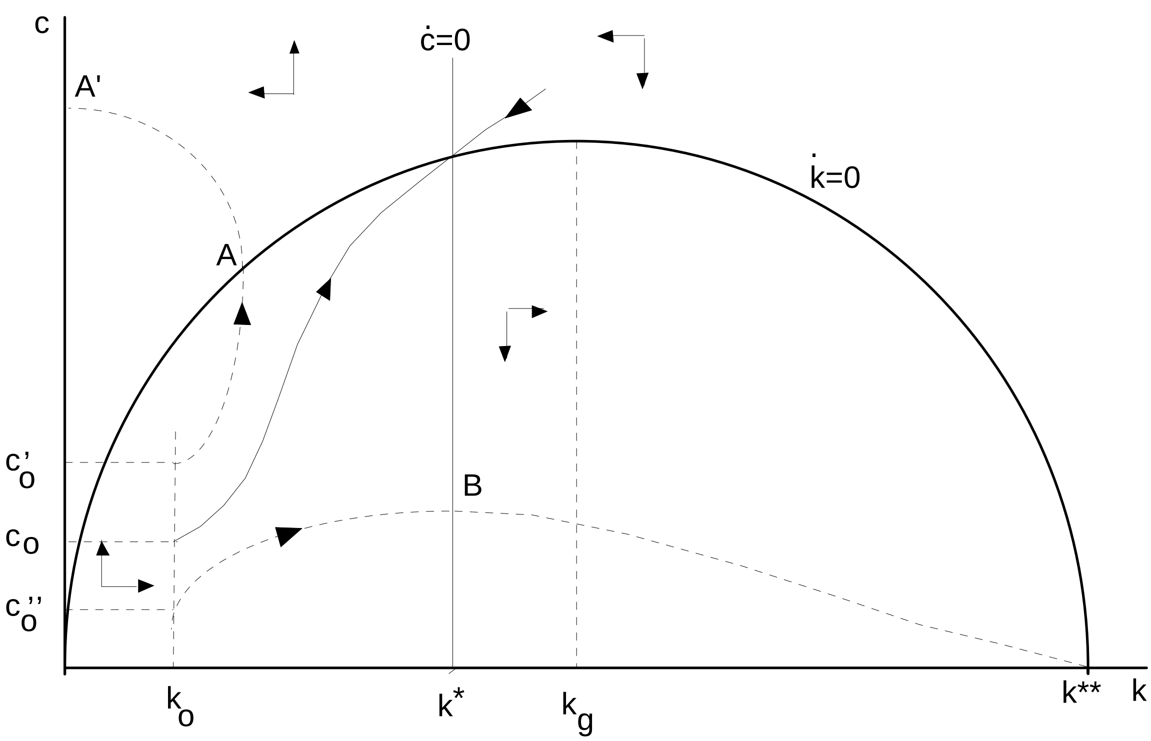

Gráfico 3: La dinámica del modelo

[3] Para facilitar la exposición hemos supuesto que la función de utilidad es $u(c(t))=\frac{c(t)^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} \quad 0<\sigma<1$. Esta función de utilidad se le llama función instantánea de utilidad con elasticidad de sustitución constante, también denominada función con elasticidad intertemporal constante o con aversión relativa al riesgo constante. La función logarítmica presenta una elasticidad de sustitución igual a 1.

En el gráfico 3 se representa una economía con capital inicial k_o menor que k^*. Sea c_o el valor del consumo que corresponde a este volumen de capital en la trayectoria punto de silla. Si los agentes escogen un nivel de consumo algo superior tal como c'_o, este nivel de consumo permitiría en los primeros momentos acumular capital y, al mismo tiempo, incrementar el consumo *per cápita*. No obstante, la elección de consumo es tal que, pasado algún tiempo, la economía se encontraría en un punto como **A** en el cual el consumo elegido sólo permite reponer el capital que se ha depreciado. Si los deseos de consumo permanecieran constantes, la economía permanecería en **A** para siempre. No obstante, en **A** los agentes desean incrementar el consumo y, por tanto, se empezará a invertir una cantidad inferior a la necesaria para reponer el capital y, por consiguiente, el capital comienza a disminuir. Dado que los agentes siguen deseando incrementar su consumo, el capital seguirá disminuyendo hasta llegar al punto **A'** en el cual todo el capital se habrá consumido y, a partir de ese momento, el nivel de consumo será cero. Es decir, la economía, a partir de un determinado momento finito, quedaría atrapada para siempre en el origen. Por tanto, la utilidad que se obtendría de esta elección sería la que implica a corto plazo unos niveles de consumo elevados y, a partir de un cierto momento y para siempre, un consumo igual a cero.

Si con un capital *per cápita* k_0, se elige un nivel de consumo ligeramente inferior c''_o. En los primeros momentos se reproducirá una pauta de consumo y acumulación de capital crecientes aunque, en este caso, el consumo crece más lentamente en favor de una acumulación de capital más rápida. Al cabo de cierto tiempo, la economía alcanzará un punto como **B** en el cual los agentes no desean incrementar el nivel de consumo, pero, dado que el nivel de consumo alcanzado es muy bajo, se seguirá acumulando capital. A partir de ese momento, con más capital los agentes disminuyen su consumo, lo que a su vez permite acumular más capital en el tiempo. La tendencia a largo plazo es alcanzar un punto como **k****, donde el nivel de capital alcanzado es tan grande que el consumo ha de ser cero para permitir su reposición. En este caso, la economía ha mantenido unos niveles de consumo muy bajos que les ha llevado a acumular demasiado capital.

Si la economía elige un nivel de consumo inicial tal como c_o, intuitivamente se aprecia que, en términos de utilidad, ofrece unos resultados mejores que los dos anteriores. En primer lugar, ofrece una pauta de consumo más estable en el tiempo que la que ofrece la primera trayectoria comentada y ofrece mayores niveles de consumo que la trayectoria comentada en segundo lugar. Es decir, si las familias tuvieran que ir eligiendo niveles de consumo desde c''_o hacia arriba observarían que todas las trayectorias que comienzan con consumos inferiores a c_o ofrecen niveles de consumo en el tiempo cada vez menores. Si eligen niveles de consumo superiores a c_o obtendrían consumos mayores, pero poco estables en el tiempo, puesto que en algún momento se agotaría el capital y se reduciría a cero.

En las dos trayectorias descritas se obtiene que el consumo per cápita acaba siendo cero, por lo que no se verifica la condición de transversalidad (ya que a utilidad marginal del consumo tiende a infinito cuando el consumo es cero). Por tanto, **la elección óptima exige que la economía se sitúe sobre la única trayectoria de convergencia.**

4. El problema del planificador: el primer teorema de la economía del bienestar

El equilibrio estacionario que hemos obtenido utilizando a las familias productoras es idéntico al que se alcanzaría si planteáramos una economía con mercados descentralizados en la que operan economías domésticas y empresas intercambiando bienes y factores productivos[4]. En otras palabras, son dos formas distintas de obtener el equilibrio competitivo de la economía.

Inmediatamente surge la cuestión de si este equilibrio competitivo es óptimo en el sentido de Pareto. En este caso, la respuesta es simple, pues, en una economía tan sencilla como la que hemos modelizado, el primer teorema de la economía del bienestar garantiza que las asignaciones resultantes del equilibrio competitivo son pareto-óptimas. Es decir, como existe competencia perfecta en todos los mercados, no hay externalidades ni bienes públicos y no existe sector público que distorsione con su actuación el comportamiento de los agentes, se cumplen los supuestos de este teorema. Lo que viene a decir este importante resultado es que, bajo estas condiciones, y si el objetivo es la eficiencia (no hablamos de equidad), el mercado es capaz de asignar los recursos de la forma más eficientemente posible.

Si deseásemos verificar este resultado tendríamos que comparar el equilibrio competitivo con el resultado al que llegaría un planificador social, que es el óptimo paretiano. La cuestión es que el problema que resuelve el planificador en este caso es exactamente el mismo que el de las familias productoras.

Sin embargo, a partir de este momento surgirán muchos escenarios en los que ambos problemas sean distintos y, por tanto, el equilibrio competitivo se alejará de la optimalidad paretiana. Por ello, es importante dar la intuición sobre las principales diferencias entre el problema de las familias-productoras y el del planificador. Haciendo problemas en clase se acabará entendiendo mucho mejor estas diferencias.

En general, dada una determinada economía, con sus propias características (reflejadas por las preferencias, la tecnología, la existencia o no de gobierno, de impuestos, de externalidades, de sector exterior, etc.), vamos a poder resolver dos tipos de problemas: 1) el de la economía real, que en nuestro caso está asociado al del equilibrio competitivo o al de las familias-productoras (en el apéndice se demuestra que son equivalentes); 2) el del planificador, que permite caracterizar las asignaciones pareto-óptimas de la economía. Enfatizamos que este último problema no se corresponde al de una economía real. El interés de su resolución está en usarlo como punto de referencia y poder así hacernos la pregunta ¿son las asignaciones del equilibrio competitivo pareto óptimas? Para responder tenemos que comparar las condiciones de optimalidad obtenidas del problema del planificador con las obtenidas del problema de las familias-productivas. Si son iguales, concluiremos que las asignaciones derivadas del equilibrio competitivo (fruto de las fuerzas del mercado) son pareto-óptimas.

Cuando no lo sean surgen nuevas preguntas, ¿cuánto se aleja nuestra economía de la eficiencia paretiana? ¿En qué dirección nos debemos mover para acercarnos al pareto-óptimo? ¿Existe alguna medida de política que permita alcanzar el pareto-óptimo? En este caso, el papel del gobierno para corregir las ineficiencias será crucial. Lo relevante en este caso es determinar qué política es capaz de corregir las ineficiencias y de hacer que las asignaciones sean eficientes. A este ejercicio de política se le conoce como políticas 'Ramsey'.

[4] En el apéndice se muestra este resultado.

De manera muy intuitiva y muy preliminar, las diferencias principales entre el problema del planificador y de la familia-productora son los siguientes. La manera en que debemos plantear le problema del planificador es el siguiente: *'el planificador maximiza la utilidad de la familia, sujeta a la restricción de **recursos** de la economía'*. En este caso, nótese que hablamos de recursos, por lo que esta restricción igualará el total de recursos disponibles (netos de la depreciación) al uso de esos recursos (en unidades físicas), por ejemplo en consumo y en acumulación de capital. Si existieran otros posibles usos (por ejemplo, usar recursos para sanidad, o educación o gastos en infraestructuras, etc.), el planificador también los consideraría.

Para el planificador sólo existen preferencias (función de utilidad), tecnología (la función de producción) y recursos ($k(0)$, por ejemplo). En ningún caso se consideran impuestos, precios, salarios, etc. Por su parte, el problema de la familia-productora deberá plantearse de la siguiente manera: *'maximizar la utilidad de la familia, sujeta a la restricción de **rentas** (en unidades físicas) de la familia productora'*. En el modelo básico inicial que estamos tratando en este tema, nótese que la renta (en bienes) de la familia productora es precisamente lo que se produce en la economía. Esta familia-productora, además, tiene que hacer frente a la depreciación (ya que es dueña del capital). Y los usos de esas rentas tiene que decidir si usarlos en bienes de consumo o en acumular más capital.

En este sentido, es muy fácil darse cuenta que con el modelo básico que hemos considerado hasta ahora los dos problemas son exactamente el mismo, aunque la manera de interpretarlos es distinto. Así, es obvio que el primer teorema del bienestar se cumple en este caso.

Para entender un poco mejor la diferencia entre el problema del planificador y de la familia-productora, pongamos un ejemplo (que no resolveremos ahora). Supongamos que la función de utilidad depende de dos bienes, *c(t)* y de *g(t)*, pero la familia productora tan sólo decide sobre *c(t)* (*g(t)* es, por ejemplo, gasto en sanidad). En el equilibrio competitivo (el mundo real) este gasto en sanidad es financiado por un impuesto de cuantía fija, que denotamos por *T(t)*. ¿Cómo serían ahora los problemas de la familia productora y el del planificador?

El problema del planificador:

$$\begin{aligned} &\max_{c(t),g(t)} \int_0^\infty e^{-(\rho-n)t}\, u\left[c(t), g(t)\right] dt \\ &s.a. \quad f\left[k(t)\right]-(n+\delta)k(t)=\dot{k}(t)+c(t)+g(t) \qquad [2.13] \\ &\qquad k(0)>0 \end{aligned}$$

En este problema, las variables de control son *c(t)* y *g(t)*, y la de estado sigue siendo *k(t)*. El planificador considera la decisión conjunta de *c(t)* y *g(t)* y la acumulación de capital, dado los recursos existentes netos de la depreciación, las preferencias y los recursos existentes. De este problema se obtienen las asignaciones pareto-óptimas.

El problema de la familia-productora:

$$\begin{aligned} &\max_{c(t)} \int_0^\infty e^{-(\rho-n)t}\, u\left[c(t), g(t)\right] dt \\ &s.a. \quad f\left[k(t)\right]-(n+\delta)k(t)-T(t)=\dot{k}(t)+c(t) \qquad [2.14] \\ &\qquad k(0)>0 \end{aligned}$$

La variable de estado es claramente $k(t)$. Pero la variable de control es sólo $c(t)$. La familia productora NO decide sobre $g(t)$ (ni tampoco sobre $T(t)$), aunque sí le afecta, pero no decide sobre ello. Será el gobierno, en base a la recaudación, el que establezca la cantidad de $g(t)$ en la economía. Las familias siempre toman como dadas las variables de política (impuestos, gastos públicos, subvenciones, etc.) ¿Será la cantidad pareto-óptima? Para responder a esta pregunta habrá que compararlo con el resultado del problema del planificador.

Por último, enfaticemos que no debemos confundir el planificador con el gobierno. El gobierno es otro agente que participa de la economía real (del problema de la familia productora). En este tipo de modelos, su misión será la de poner impuestos, subvenciones y gastar en gasto público que afecta a la utilidad o a la función de producción. En general, su problema es el que denominamos antes como problema de Ramsey, que consiste en diseñar la política que corrija las ineficiencias que se deriven en el equilibrio competitivo. Todo esto lo entenderemos mejor en futuras lecciones y haciendo ejercicios.

5. La incidencia de los impuestos

A continuación vamos a introducir un gobierno de la manera más sencilla posible. El objetivo es entender la incidencia que tienen los diferentes tipos de impuestos sobre la decisiones de consumo intertemporal y, por tanto, sobre la evolución y estado estacionario del consumo y del capital de la economía.

Consideremos varios aspectos antes de comenzar con el análisis. Primero, las subvenciones pueden verse como impuestos con tipos negativos, por lo que la explicación de los efectos de los impuestos es la inversa de los de las subvenciones. En segundo lugar, y centrándonos ya sólo en impuestos, el establecimiento de un impuesto siempre va a tener un efecto renta negativo. El objetivo de este epígrafe no es entender este efecto renta, que es trivial, sino la incidencia que los diferentes tipos de impuestos tienen sobre las decisiones intertemporales de los agentes. Por ello, y con el fin de no mezclar ambos efectos, eliminaremos el efecto renta. Esto se consigue suponiendo que los impuestos que paga la familia-productora son devueltos a las propias familias en forma de transferencias (por ejemplo, ayudas a hijos, subsidios de desempleo, etc.). Como estamos suponiendo que todas las familias son iguales, esto no genera ningún efecto redistribuidor que podría afectar de distinta manera a unos que a otros. Las transferencias que hace el gobierno a las familias suponemos que son de cuantía fija y son recursos sin contrapartida. Por ello, a lo largo de este apartado denotaremos a estas transferencia de cuantía fija por $Tr(t)>0$.

Los tipos de impuestos que vamos a considerar son los siguientes:

- Cuantía fija (impuestos lump-sum): $T(t)$, no dependen ni del consumo, ni de la renta, etc.
- Indirectos o sobre el consumo: $\tau_c\, c(t)$, donde τ_c es el tipo marginal (entre cero y uno) del impuesto (el IVA, por ejemplo)
- Impuestos directos sobre la renta total (bruta): $\tau_y\, f(k(t))$, donde τ, entre cero y uno, es el tipo marginal medio impositivo de las rentas totales (del trabajo y el capital)
- Impuestos sobre la riqueza: $\tau_k\, k(t)$, es un impuesto que se aplica sobre el stock de capital existente en la economía. Su tipo marginal también ha de estar entre cero y uno.

- Impuesto sobre la inversión neta: $\tau\ \dot{k}(t)$
- Impuesto sobre la inversión bruta: $\tau\ [\dot{k}(t)+(\delta+n)k(t)]$

Siempre vamos a suponer (en este tema y el siguiente) que el presupuesto de los gobiernos es equilibrado (no pueden endeudarse ni ahorrar). En el caso que estamos tratando, esto implica que el monto total de *Tr(t)* tiene que ser siempre igual a la recaudación impositiva total realizada en cada periodo de tiempo *t*.

Impuestos sobre la renta

Usemos un ejemplo para ilustrar la incidencia de este tipo de impuestos sobre la economía. Supongamos la función de producción neoclásica. Además, existe sector público y la población crece a una tasa *n>0*. La función de utilidad instantánea es $\frac{c(t)^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}$, donde $\sigma>0$, σ diferente de 1 (ya que en este caso la función sería la logarítmica). El gobierno recauda un impuesto sobre la renta, con tipo impositivo τ fijo, que dedica en su totalidad a conceder transferencias a las familias.

Planteemos y resolvamos el problema de las familias-productoras. Este consiste en maximizar el flujo de utilidad que se espera desde el momento actual hasta el final del periodo de planificación, sujeta a su restricción de rentas (la ecuación de transición del capital). Esta restricción queda:

$$f\left[k(t)\right]-(n+\delta)k(t)-\tau f\left[k(t)\right]+Tr(t)=\dot{k}(t)+c(t)$$

La parte izquierda son las rentas netas de depreciación e impuestos e incluyendo las transferencias (con signo negativo lo que se paga y con positivo lo que te dan). A la derecha están los posibles usos de esas rentas netas, que sean decididas por las familias-productoras: consumo y acumulación de capital. Así, la variable de control es $c(t)$ y la de estado *k(t)*. Todas las variables de política son tomadas como dadas (exógenas). Reordenando esta condición obtenemos la habitual ecuación de transición del capital:

$$\dot{k}(t)=f\left[k(t)\right](1-\tau)-(n+\delta)k(t)-c(t)+Tr(t)$$

Así, el problema queda de la siguiente manera:

$$\max_{c(t)} \quad \int_0^\infty \left[\frac{c(t)^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}\right]e^{-(\rho-n)t}\ dt$$

$$s.a. \quad \dot{k}(t)=(1-\tau)f\left[k(t)\right]-c(t)-(n+\delta)k(t)+Tr(t) \qquad [2.15]$$

$$k(0)>0$$

Calculamos las condiciones de primer orden a partir del Hamiltoniano:

$$H(t)=\left[\frac{c(t)^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}\right]e^{-(\rho-n)t}+\mu(t)\left\{(1-\tau)f\left[k(t)\right]-c(t)-(n+\delta)k(t)+Tr(t)\right\} \qquad [2.16]$$

donde μ(t) es el multiplicador dinámico de Lagrange, que mide la renuncia en términos de utilidad a la que hay que hacer frente para acumular una unidad adicional de capital.

Calculando las condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial H(t)}{\partial c(t)} = 0 \rightarrow c(t)^{-\sigma} e^{-(\rho-n)t} - \mu(t) = 0 \rightarrow \mu(t) = c(t)^{-\sigma} e^{-(\rho-n)t} \qquad [2.17]$$

$$\frac{\partial H(t)}{\partial k(t)} = -\dot{\mu}(t) \rightarrow \mu(t)\{(1-\tau)f'[k(t)]-(n+\delta)\} = -\dot{\mu}(t) \qquad [2.18]$$

$$\frac{\partial H(t)}{\partial \mu(t)} = \dot{k}(t) \rightarrow \dot{k}(t) = (1-\tau) f\left[k(t)\right] - c(t) - (n+\delta)k(t) + Tr(t) \qquad [2.19]$$

Operando de la forma habitual (tomando logaritmos neperianos de la expresión [2.17] y derivando respecto al tiempo):

$$ln\,\mu(t) = -(\rho - n)t - \sigma\, ln\, c(t) \rightarrow \frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)} = -(\rho-n) - \sigma\frac{\dot{c}(t)}{c(t)},$$

Combinando esta expresión con la [2.18], se obtiene la ecuación de Ramsey-Keynes, cuya interpretación, como es habitual, es que los agentes elegirán en todo momento el consumo per cápita que consiga que los beneficios de ahorrar una unidad adicional igualen los beneficios de consumirla. En otras palabras, el producto marginal del capital después de impuestos y neto de depreciación del capital debe igualar a la tasa de preferencia temporal teniendo en cuenta que los agentes prefieren trayectorias de consumo planas.

$$(1-\tau)f'[k(t)] - \delta = \rho + \sigma\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} \qquad [2.20]$$

Por último, teniendo en cuenta que las transferencias vienen dadas por $Tr(t) = \tau f\left[k(t)\right]$, la expresión [2.19] queda reducida a:

$$\dot{k}(t) = f[k(t)] - c(t) - (n+\delta)k(t) \qquad [2.21]$$

Hemos de destacar en este punto que la restricción presupuestaria del gobierno la hemos tomado como dada al resolver el problema de la familia-productora (esto es, al derivar el Hamiltoniano). Una vez tenemos las condiciones de optimalidad, para calcular cómo evolucionan las variables en esta economía, sí tenemos que considerar esta restricción presupuestaria. Sin embargo, en ningún caso hemos de imponer esta condición antes de resolver las condiciones de optimalidad, al ser considerada como exógena.

Puesto que el producto marginal del capital es decreciente ante aumento del capital per cápita, el crecimiento se agota. En estas circunstancias, el equilibrio estacionario se define, como siempre en este tema, de la siguiente manera:

$$\dot{c} = 0 \rightarrow (1-\tau)f'[k(t)] = \delta + \rho \qquad [2.22]$$

$$\dot{k} = 0 \rightarrow c(t) = f[k(t)] - (n+\delta)k(t) \qquad [2.23]$$

Las ecuaciones [2.22] y [2.23] definen el equilibrio competitivo de la economía, en el que el capital per cápita es aquel que consiga que el producto marginal del capital después de impuestos y neto de depreciación iguale a la tasa de descuento de la utilidad. La otra condición de optimalidad es la de transversalidad, pero esta no cambia respecto a la del contexto básico analizado en el apartado 2 de este tema.

En este punto hay que hacer notar que el impuesto sobre la renta que hemos considerado no afecta a la curva $\dot{k}=0$, ya que se está eliminado el efecto renta negativo que genera el impuesto, al devolver su monto total en forma de transferencias. Sin embargo, altera a la condición de Ramsey-Keynes, es decir, sí está afectando a la decisión intertemporal del consumidor. Cuando esto ocurre podemos concluir que el impuesto es distorsionante, en el sentido de que afecta a la decisión intertemporal de consumo presente versus consumo futuro (o consumo ahorro). ¿En qué sentido? Es fácil darse cuenta, a partir de la condición [2.22], que el estado estacionario del capital es menor cuanto mayor es el tipo marginal impositivo. La razón es que un mayor tipo marginal sobre la renta aumenta el coste de acumular capital para los siguientes periodos, lo que lleva a los consumidores a sustituir en mayor medida consumo futuro a favor del consumo presente. En este sentido decimos que el aumento del impuesto genera un efecto sustitución que eleva el consumo presente a costa de consumo futuro, al desincentivar la acumulación de capital físico.

Todo lo expuesto se entiende perfectamente si representamos cómo afecta un aumento del tipo marginal impositivo en el diagrama de fases. Primero representamos las expresiones [2.22] y [2.23] en el gráfico 4. El punto de intersección entre ambas curvas proporciona, como siempre, el equilibrio estacionario de la economía.

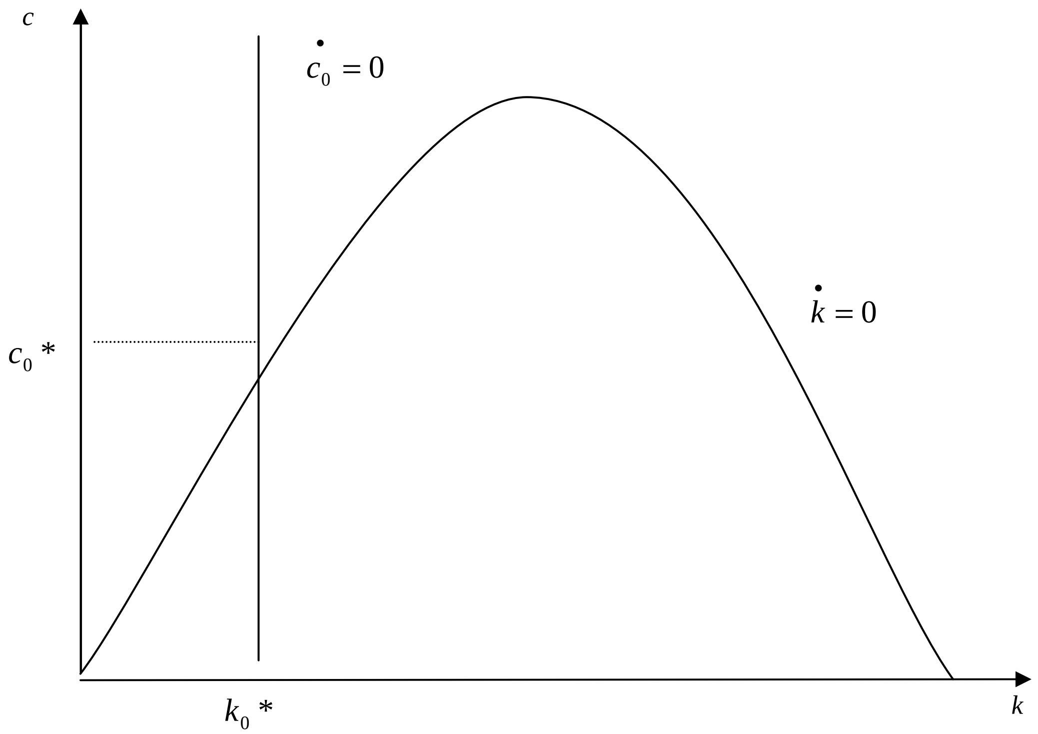

Gráfico 4: El equilibrio estacionario

Como ya hemos razonado, un aumento de τ no afecta a la curva $\dot{k}=0$, ya que la mayor recaudación impositiva es compensada con un incremento de las transferencias. Sin embargo, la curva $\dot{c}=0$ se desplaza hacia la izquierda, ya que el aumento de la tarifa impositiva reduce el rendimiento de ahorrar y hace necesaria una reducción del stock de capital per cápita para que el producto marginal después de impuestos y neto de depreciación iguale a la tasa de preferencia temporal. Por ello, el nuevo equilibrio estacionario se sitúa (gráfico 5) con menores capital y consumo per cápita. Lo que está ocurriendo es que, al reducirse la rentabilidad de ahorrar, los agentes aumentan en el corto plazo su gasto en consumo (efecto sustitución a largo plazo). De este modo, la economía se sitúa en la nueva trayectoria de convergencia. A partir de este momento, la economía se dirige paulatinamente (a lo largo de la trayectoria de convergencia) al nuevo estado estacionario a medida que va reduciéndose el stock de capital per cápita y el consumo per cápita.

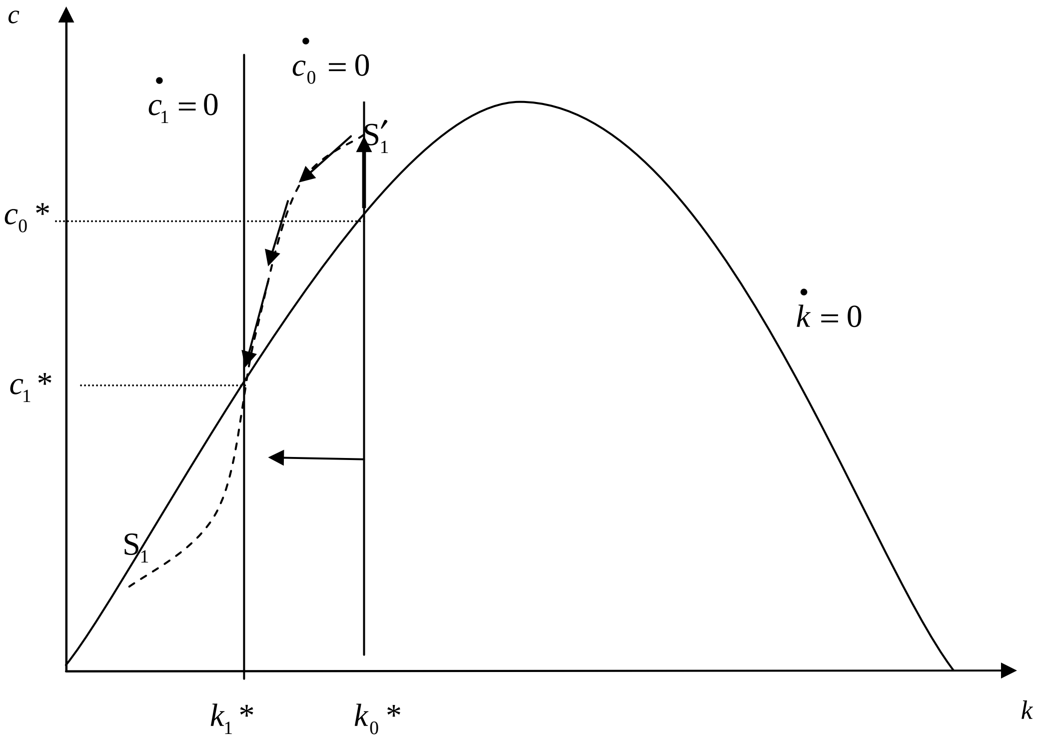

Gráfico 5: Aumento del impuesto sobre la renta que se devuelve en forma de transferencias

A continuación, presentamos los resultados de los demás impuestos, pero omitimos los detalles del análisis, que dejamos para que el alumno los desarrolle por su cuenta. Tan sólo mostramos los resultados finales y algunos comentarios relevantes. Para simplificar la notación, siempre usaremos τ para referirnos al tipo impositivo correspondiente. En caso de que en un problema hubiesen dos o más tipos de impuestos, obviamente (al menos que se diga lo contrario), habría que distinguirlos poniéndoles subíndices, por ejemplo. Se considera siempre la misma función de utilidad, y la condición de transversalidad y la condición inicial coinciden con las que se ha empleado hasta ahora.

Impuesto sobre el consumo

Restricción:

$$f\left[k(t)\right]-(n+\delta)k(t)-\tau c(t)+Tr(t)=\dot{k}(t)+c(t)$$

Reescribiendo:

$$\dot{k}(t)=f\left[k(t)\right]-(n+\delta)k(t)-(1+\tau)c(t)+Tr(t)$$

Nótese que en este caso el tipo marginal impositivo sobre el consumo aparece con signo positivo, ya que encarece la adquisición del bien de consumo.

Condiciones de optimalidad una vez sustituida la restricción presupuestaria del gobierno, que es $\tau c(t)=Tr(t)$,

$$f'\left[k(t)\right]-\delta=\rho+\sigma\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}$$

$$\dot{k}(t)=f\left[k(t)\right]-(n+\delta)k(t)-c(t)$$

Comentarios. La condición de Ramsey-Keynes no se ve afectada por el impuesto sobre el consumo. Esto implica que no distorsiona la decisión intertemporal de los agentes (no existe efecto sustitución entre consumo presente y futuro). Sólo existiría un efecto renta igual para todos los periodos de tiempo si el impuesto no se devolviera en forma de transferencias. Pero como sí se devuelve, tampoco se da este efecto renta.

Impuesto sobre la riqueza

Restricción:

$$f\left[k(t)\right]-(n+\delta)k(t)-\tau k(t)+Tr(t)=\dot{k}(t)+c(t)$$

Reescribiendo:

$$\dot{k}(t)=f\left[k(t)\right]-(n+\delta+\tau)k(t)-c(t)+Tr(t)$$

Condiciones de optimalidad una vez sustituida la restricción presupuestaria del gobierno, que es $\tau k(t)=Tr(t)$,

$$f'\left[k(t)\right]-\delta-\tau=\rho+\sigma\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}$$

$$\dot{k}(t)=f\left[k(t)\right]-(n+\delta)k(t)-c(t)$$

Comentarios. La condición de Ramsey-Keynes se ve afectada por el impuesto sobre el capital. Comparando con el impuesto sobre la renta, su efecto es aún más directo. Esto implica la gran distorsión que tiene este impuesto sobre la decisión intertemporal de los agentes (existe un efecto sustitución importante). Como el impuesto se devuelve en forma de transferencia, no se da un efecto renta.

Impuesto sobre la inversión neta:

Restricción:

$$f\left[k(t)\right]-(n+\delta)k(t)-\tau\dot{k}(t)+Tr(t)=\dot{k}(t)+c(t)$$

Reescribiendo:

$$\dot{k}(t)=\frac{1}{1+\tau}\left\{f\left[k(t)\right]-(n+\delta)k(t)-c(t)+Tr(t)\right\}$$

Condiciones de optimalidad una vez sustituida la restricción presupuestaria del gobierno, que es $\tau\dot{k}(t)=Tr(t)$,

$$\frac{f'\left[k(t)\right]}{1+\tau}-\delta=\rho+\sigma\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}$$

$$\dot{k}(t)=f\left[k(t)\right]-(n+\delta)k(t)-c(t)$$

Comentarios. La condición de Ramsey-Keynes se ve afectada por el impuesto sobre la inversión neta. Esto implica que el impuesto distorsiona la decisión intertemporal de los agentes (existe un efecto sustitución importante) y desincentiva la acumulación de capital. Como el impuesto se devuelve en forma de transferencia, no se da un efecto renta.

Un comentario final sobre la incidencia de los impuestos y asignaciones pareto-óptimas

En este contexto, dado que no existe ningún bien que el gobierno tenga que financiar, la asignación pareto óptima viene dada por las condiciones [2.9] (optimalidad intertemporal) y la [2.10] (restricción de recursos), que recordemos eran

$$f'\left[k(t)\right]-\delta=\rho+\sigma\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}$$

$$\dot{k}(t)=f\left[k(t)\right]-(n+\delta)k(t)-c(t)$$

Si comparamos estás dos condiciones con las condiciones derivadas del problema de la familia productora bajo los distintos escenarios impositivos considerados, fácilmente vemos que el establecimiento de un impuesto sobre el consumo es el único que permite alcanzar, en esta situación, la asignación pareto óptima. En los demás casos, la única manera es reducir el tipo marginal a cero.

La incidencia de los impuestos y el papel del sector público lo retomaremos en el tema 3. Entonces veremos que, bajo determinadas condiciones de la economía, que lo óptimo desde el punto de vista de la política fiscal puede ser establecer un impuesto (o una subvención) sobre la renta, o sobre el capital.

6. Economía abierta

El modelo básico de Ramsey/Cass-Koopmans se puede ampliar para que tenga en cuenta la existencia de bienes importados. Dado que todo está medido en unidades físicas, el precio del bien exterior viene expresado por la relación real de intercambio (RRI), que denotaremos por θ en todo el tema. La RRI mide el precio (real) de los bienes extranjeros expresados en la cantidad de bienes nacionales necesarios para intercambiar una unidad de bien extranjero. Así, cuanto mayor sea la RRI, más caro será el bien extranjero en términos de los bienes nacionales; dicho de otro modo, más competitivos serán nuestros productos en relación a los extranjeros. Para simplificar, siempre se supondrá que la balanza de pagos está equilibrada en todo momento, lo que hace que no haya ni exceso ni defecto de ahorro del sector exterior.

Estos bienes extranjeros que se importan pueden tener diferentes usos: pueden ser de consumo final (afectan directamente a la función de utilidad instantánea), intermedios (afectan a la función de producción pero no se acumulan) o de capital (afectan a la función de producción y sí se acumulan). En este apartado vamos a considerar la primera de las posibilidades:

Bien de importación que se emplea como bien de consumo final

Empecemos señalando que se siguen manteniendo los supuestos habituales según los cuales la función de producción en términos per capita es $y = Ak(t)^{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, $A>0$. La población crece a la tasa n y la tasa de depreciación del capital es δ.

La función de utilidad debe ser ampliada para incluir al bien de importación, ya que es consumido por las economías domésticas. Para simplificar la exposición, supongamos una función de utilidad logarítmica, separable:

$$u[c(t),m(t)] = \ln c(t) + \gamma \ln m(t) \qquad \gamma > 0 \qquad [2.24]$$

c(t) es el consumo de productos nacionales y $m(t)$ es el consumo de productos extranjeros, ambos expresados en términos per cápita. El parámetro γ mide la preferencia relativa que tiene el consumidor representativo de *m(t)* respecto a *c(t)*. Así, si $\gamma = 1$ el consumidor es totalmente indiferente entre consumo nacional e importado; si $\gamma = 1$ a igualdad de cantidades le otorga más utilidad consumir *m(t)* que *c(t)*; si $\gamma < 1$, ocurre lo contrario.

El problema de las familias-productoras, como siempre, consiste en maximizar el flujo de utilidad que se obtiene desde el momento actual hasta el final del periodo de planificación, teniendo en cuenta que ρ ($\rho>0$) es la tasa de descuento subjetiva de la utilidad. En este caso, las familias-productoras eligen *c(t)* y *m(t)* (ambas son variables de control para las familias productoras y también para el planificador).

La restricción de rentas (reales) de las familias-productivas en el contexto básico es el siguiente: lo que se produce, neto de la depreciación (parte izquierda de la ecuación) se puede destinar a los siguientes posibles usos: *c(t)*, θm(t) o en $\dot{k}(t)$,

$$Ak(t)^{\alpha} - (n+\delta)k(t) = c(t) + \theta m(t) + \dot{k}(t)$$

Despejando, se obtiene la ecuación de transición, que indica que la variación del stock de capital per cápita corresponde a la cantidad de bienes de capital (per cápita) que se pueden adquirir con los recursos que quedan después de descontar de la producción per cápita, el consumo de bien nacional, la adquisición del bien de consumo importado y la depreciación del capital per cápita:

$$\dot{k}(t) = Ak(t)^{\alpha} - c(t) - \theta m(t) - (n+\delta)k(t) \qquad [2.25]$$

Por último, se añade la restricción de que el capital per cápita inicial debe ser positivo. Por tanto, el problema que resuelven las familias productoras es:

$$\begin{aligned} &\max_{c(t),m(t)} \quad \int_0^{\infty} e^{-(\rho-n)t}\left[\ln c(t) + \gamma \ln m(t)\right]\, dt \\ &s.a. \quad \dot{k}(t) = Ak(t)^{\alpha} - c(t) - \theta m(t) - (n+\delta)k(t) \\ &k(0) > 0 \end{aligned} \qquad [2.26]$$

Las familias productoras resuelven el siguiente Hamiltoniano:

$$H(t) = \left[\ln c(t) + \gamma \ln m(t)\right] e^{-(\rho-n)t} + \mu(t)\left\{Ak(t)^{\alpha} - c(t) - \theta m(t) - (n+\delta)k(t)\right\} \qquad [2.27]$$

donde μ(t) es el multiplicador dinámico de Lagrange, que mide la renuncia en términos de utilidad a la que hay que hacer frente para acumular una unidad adicional de capital.

Calculando las condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial H(t)}{\partial c(t)} = 0 \rightarrow \frac{1}{c(t)} e^{-(\rho-n)t} - \mu(t) = 0 \rightarrow \mu(t) = \frac{e^{-(\rho-n)t}}{c(t)} \qquad [2.28]$$

$$\frac{\partial H(t)}{\partial m(t)} = 0 \rightarrow \frac{\gamma}{m(t)} e^{-(\rho-n)t} - \mu(t)\theta = 0 \rightarrow \mu(t) = \frac{\gamma e^{-(\rho-n)t}}{\theta m(t)} \qquad [2.29]$$

$$\frac{\partial H(t)}{\partial k(t)} = -\dot{\mu}(t) \rightarrow \mu(t)\left\{\alpha Ak(t)^{\alpha-1} - n - \delta\right\} = -\dot{\mu}(t) \qquad [2.30]$$

$$\frac{\partial H(t)}{\partial \mu(t)} = \dot{k}(t) \rightarrow \dot{k}(t) = Ak(t)^{\alpha} - c(t) - \theta m(t) - (n+\delta)k(t) \qquad [2.31]$$

A estas condiciones hay que añadir la de transversalidad:

$$\lim_{t\to\infty} \mu(t)k(t) = 0$$

Al tener dos variables de control, aparece una nueva condición de primer orden. Esto da lugar a que, además de la condición de optimalidad intertemporal que relaciona la decisión entre consumo presente y futuro (que se puede expresar tanto en términos de *c(t)* como de *m(t)*), se obtenga una condición para cada instante de tiempo t que proporciona el consumo relativo de las dos variables de control existentes: *c(t)* y *m(t)*. Esta condición se obtiene igualando las expresiones [2.28] y [2.29]:

$$\frac{e^{-(\rho-n)t}}{(1+\tau)c(t)} = \frac{\gamma e^{-(\rho-n)t}}{\theta m(t)}$$

Despejando se obtiene la relación que debe existir entre el consumo del bien extranjero y el del bien nacional:

$$m(t) = \frac{\gamma c(t)}{\theta} \qquad [2.32]$$

Como bien sabemos de cursos intermedios de microeconomía, cuando un individuo gasta su renta entre dos bienes, maximiza su utilidad igualando la relación marginal de sustitución entre ambos bienes (RMS) con la ratio de precios (precio relativo). Aplicando esta regla a nuestro caso, se obtiene una condición que coincide con la expresión [2.32]:

$$RMS_{c,m} = \frac{u_c^{'}(c,m)}{u_m^{'}(c,m)} = \frac{p_c}{p_m} \quad \rightarrow \quad \frac{\frac{1}{c(t)}}{\frac{\gamma}{m(t)}} = \frac{1}{\theta} \quad \rightarrow \quad m(t) = \frac{\gamma c(t)}{\theta}$$

En la expresión [2.32], se aprecia que aumentos en γ o reducciones de la relación real de intercambio dan lugar a un incremento en el número de unidades del bien de consumo importado en relación al consumo de bien nacional.

Tomando logaritmos neperianos de la expresión [2.28] y derivando respecto al tiempo:

$$\ln \mu(t) = -(\rho - n)t - \ln c(t) \rightarrow \frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)} = -(\rho - n) - \frac{\dot{c}(t)}{c(t)},$$

Combinando esta expresión con la [2.30], se obtiene la ecuación de Ramsey-Keynes que, como es habitual, sostiene que los agentes elegirán en todo momento el consumo per cápita que consiga que los beneficios de ahorrar una unidad adicional igualen los beneficios de consumirla.

$$\alpha A k(t)^{\alpha-1} - \delta = \rho + \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} \qquad [2.33]$$

Las otras ecuaciones que determinan la dinámica del modelo son la ecuación de transición [2.31] y la condición de optimalidad [2.32], que relaciona la decisión óptima entre *c(t)* y *m(t)*,

Calculemos a continuación la condición de estado estacionario. Puesto que el producto marginal del capital es decreciente, el crecimiento se agota. En estas circunstancias, el equilibrio competitivo se obtiene cuando el consumo per cápita y el capital per cápita son constantes. De este modo, las expresiones [2.33] y [2.32] quedan:

$$\dot{c} = 0 \rightarrow \alpha A k(t)^{\alpha-1} = \rho + \delta \qquad [2.34]$$

$$\dot{k} = 0 \rightarrow 0 = Ak(t)^{\alpha} - c(t) - \theta m(t) - (n+\delta)k(t) \qquad [2.35]$$

Para poder representar la dinámica de transición en el plano *c(t)* y *k(t)*, usamos [2.32] para sustituir el valor de *m(t)* en términos de *c(t)*,

$$\dot{k} = 0 \rightarrow 0 = Ak(t)^{\alpha} - c(t) - \theta \frac{\gamma c(t)}{\theta} - (n+\delta)k(t)$$

Despejando:

$$\dot{k} = 0 \rightarrow c(t) = \frac{Ak(t)^{\alpha} - (n+\delta)k(t)}{1+\gamma} \qquad [2.36]$$

Las ecuaciones [2.34] y [2.36] definen el equilibrio competitivo de la economía en el plano *(c,k)*, en el que el capital per cápita es aquel que consigue que el producto marginal del capital, neto de depreciación, iguale a la tasa de descuento de la utilidad. El consumo per cápita es aquel que permite mantener el stock de capital per cápita inalterado en el estado estacionario.

Las expresiones [2.34] y [2.36] se han representado en el gráfico 1. El punto de intersección entre ambas curvas proporciona el equilibrio competitivo de la economía.

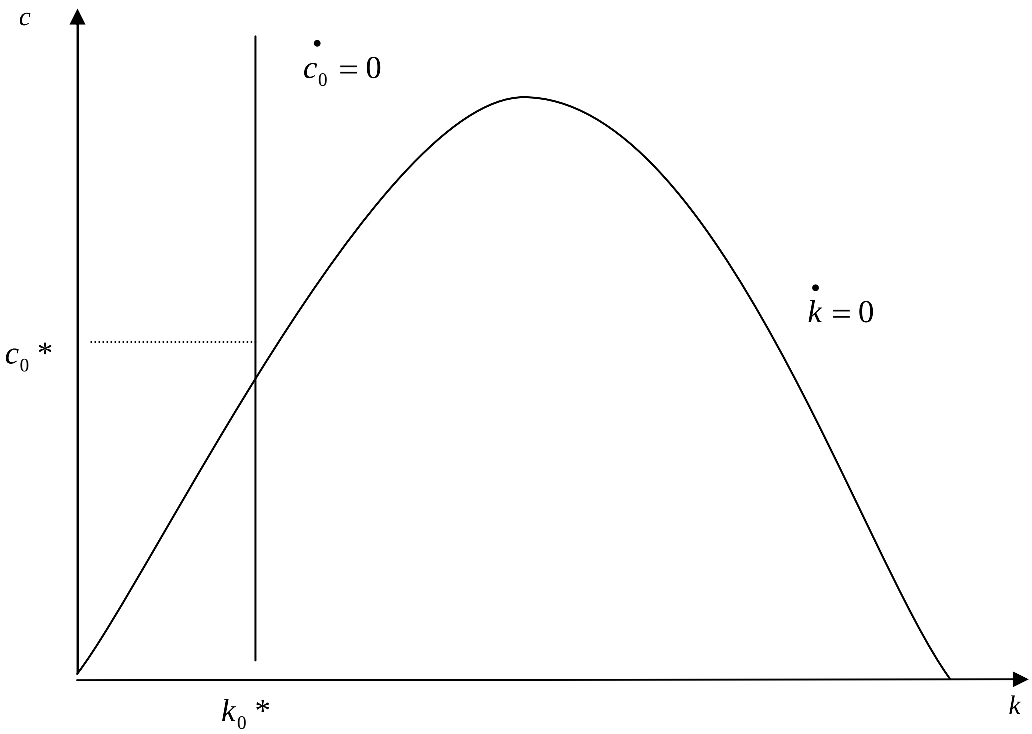

Gráfico 6: El equilibrio estacionario

Por último, destacar que dado que las familias productivas deciden sobre *m(t)* y su presencia no genera ningún tipo de distorsión que afecte a la asignación de los recursos, el equilibrio competitivo es pareto-óptimo y el primer teorema del bienestar se cumple en este caso.

Al permitir que las familias adquieran en el extranjero bienes para su consumo, han aparecido en el modelo dos variables exógenas nuevas: el parámetro de utilidad relativa γ y la RRI. Consideremos brevemente los efectos de cambios en cualquiera de ellas sobre la economía.

Efecto de una variación en la relación real de intercambio

A partir de las ecuaciones [2.34] puede apreciarse que la RRI no aparece en la condición de consumo intertemporal[5]. Esto quiere decir que la curva $\dot{c} = 0$ no se desplaza y que, por lo tanto, no afecta a la acumulación de capital físico en estado estacionario. La RRI tampoco aparece en la ecuación de la curva $\dot{k} = 0$, es decir, cambios en la RRI no provocan ningún efecto renta que altere los niveles de consumo, ni en la transición ni en estado estacionario. Todo ello que indica que el equilibrio estacionario del gráfico 6 no se ve alterado.

[5] Esto se debe a la separabilidad y a los logaritmos en la función de utilidad de *c(t)* y *m(t)*.

¿Quiere decir esto que cambios en la RRI no afectan en nada a la economía? La respuesta es NO. Si miramos la ecuación [2.32] se aprecia que genera cambios en la cantidad de bienes importados *m(t)*. Si, por ejemplo, aumenta la RRI, las importaciones se hacen más caras en términos reales y se importa menos cantidad, de modo que el valor de las importaciones permanezca constante[6].

Efecto de un cambio en γ

El parámetro de utilidad relativa γ tampoco aparece en [2.34], por lo que la curva $\dot{c}=0$ del gráfico 7 no se desplaza y el stock de capital per cápita en el estado estacionario no se altera. Sin embargo, un cambio en γ si afecta a la función $\dot{k}=0$. Si, por ejemplo, se produce un incremento de γ, los bienes importados pasan a ser más atractivos en relación a los bienes nacionales, por lo que la U-invertida se desplaza hacia abajo y se produce una sustitución directa de *c(t)* a favor de *m(t)*. De hecho, puede apreciarse en [2.32] que las familias importan más por unidad de bien nacional.

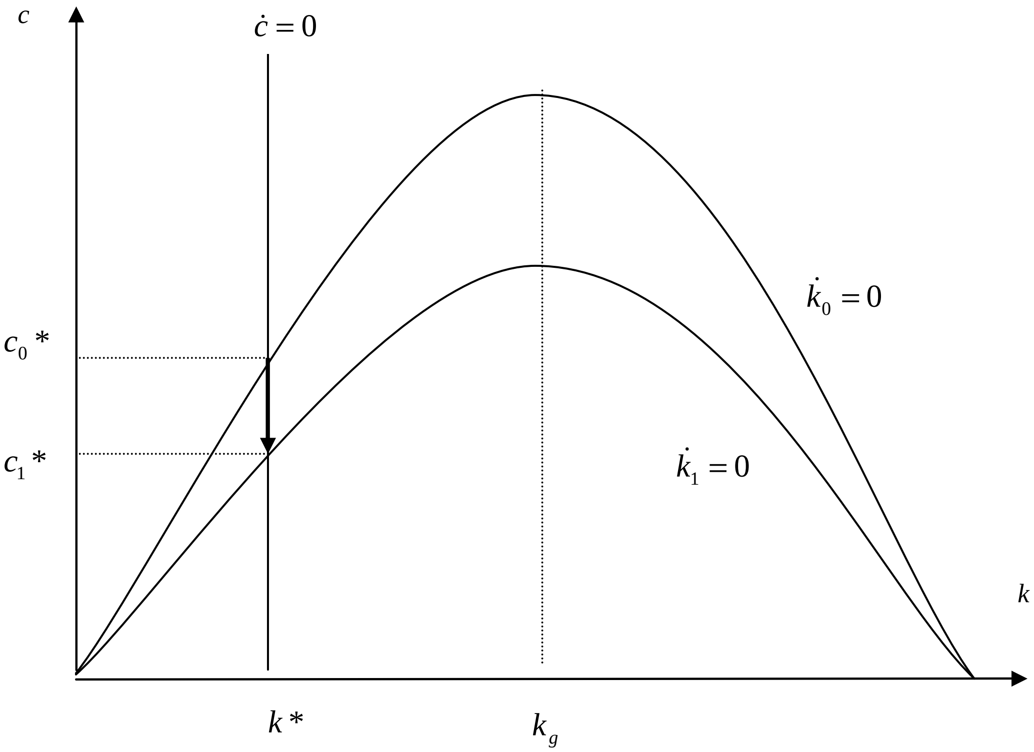

Gráfico 7: Efecto de un aumento de γ

En resumen, cuando aumenta la preferencia por bienes importados, las familias gastan una parte mayor de su renta en bienes extranjeros y, como consecuencia, reducen el número de unidades de bien nacional que adquieren. Este ajuste no afecta al stock de capital ni a la producción per cápita del estado estacionario.

[6] Nuevamente, este resultado se debe a la falta de complementariedad de c(t) con m(t) en la función de utilidad. Sin embargo, emplear otra función de utilidad dificulta mucho los cálculos.

Apéndice: El modelo de Ramsey/Cass-Koopmans y los mercados competitivos

El planteamiento realizado hasta ahora contempla el proceso de decisión de consumo, ahorro y producción como un proceso conjunto llevado a cabo por las familias productoras. En este apartado se comprobará que, bajo el supuesto de mercados completamente competitivos en los que los agentes interactúan libremente, se dan exactamente los mismos resultados respecto de consumo, inversión y crecimiento. Para ello será preciso, previamente, especificar el comportamiento de las economías domésticas y de las empresas para, posteriormente, definir y analizar las condiciones de equilibrio en el mercado de bienes y en el mercado de trabajo.

Familias

El comportamiento de las economías domésticas es el resultado de un proceso de decisión entre consumo y acumulación de riqueza financiera. Seguiremos suponiendo que la oferta de trabajo es exógena y crece a la tasa constante *n*. Dados unos salarios reales, *w*, y un rendimiento de la riqueza, *r*, la acumulación de riqueza, en términos reales, viene dada (normalizando el precio del bien a *p=1*) por

$$\dot{B} = wL - C + rB \qquad [2.37]$$

Definiendo $b = B/L$, la expresión [2.37] puede reescribirse en términos *per cápita* como

$$\dot{b} = w - c + (r - n)b \qquad [2.38]$$

Por tanto, [2.38] nos indica que la riqueza financiera de las economías domésticas crece en función del ahorro de cada período, es decir, por la diferencia entre los ingresos que provienen del trabajo y de la riqueza y los gastos en consumo y asignación de riqueza a las nuevas personas que entran en la economía. La riqueza financiera sirve, en este sentido, para transferir capacidad de consumo entre períodos. En definitiva, el problema de las economías domésticas consiste en

$$\max_{c(t)} \int_0^{\infty} e^{-\rho t} u(c(t)) e^{nt} dt$$

$$s.a. \quad \dot{b}(t) = w(t) - c(t) + (r(t) - n)b(t)$$

$$b(0) > 0$$

Con lo que el Hamiltoniano es

$$H(t) = e^{-(\rho - n)t} u[c(t)] + \mu(t)[w(t) - c(t) + (r(t) - n)b(t)]$$

La solución del problema viene dado por las condiciones de primer orden junto a la condición de transversalidad:

$$\lim_{t \to \infty} b(t)\mu(t) = 0$$

Operando con las condiciones de primer orden

$$e^{-(\rho - n)t} u'[c(t)] - \mu(t) = 0$$

$$\mu(t)(r(t) - n) = -\dot{\mu}(t) \qquad [2.39]$$

$$\dot{b}(t) = w(t) - c(t) + (r(t) - n)b(t)$$

Para eliminar μ(t) se deriva la primera ecuación de [2.39] respecto del tiempo y se sustituye en la segunda ecuación obteniéndose

$$\sigma[c(t)]\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = r(t) - \rho \qquad [2.40]$$

Empresas

Las empresas contratan trabajo y capital a sus precios competitivos y venden su producción en el mercado al precio *p(t)* que normalizamos a 1. Su objetivo es maximizar sus beneficios en todo momento del tiempo.

$$\Gamma = F(L,K) - wL - (\delta + r)K$$

Las condiciones de primer orden son

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial L} = F_N(L^d, K) - w = 0$$
$$\frac{\partial\Gamma}{\partial K} = F_K(L^d, K) - (\delta + r) = 0$$

teniendo en cuenta la función de producción y sus propiedades, las condiciones de primer orden pueden reescribirse en términos *per cápita* (dividiendo por L^d)

$$\begin{aligned} &f(k) - kf'(k) = w \\ &f'(k) = (\delta + r) \end{aligned} \qquad [2.41]$$

Que, considerando el tiempo, quedan:

$$\begin{aligned} &f(k(t)) - k(t)f'(k(t)) = w(t) \\ &f'(k(t)) = (\delta + r(t)) \end{aligned} \qquad [2.42]$$

Equilibrio competitivo

El equilibrio en el mercado de trabajo se consigue cuando oferta y demanda de trabajo se igualan ($L^d = L$). Puesto que la oferta de trabajo es exógena, dado un *stock* de capital, la primera ecuación de [2.42] define el nivel de salario necesario para incentivar a las empresas a contratar la oferta de trabajo disponible.

La demanda de capital por parte de las empresas es satisfecha por las economías domésticas de tal forma que debe existir equilibrio en el mercado de activos ($b=k$).

$$b(t) = k(t) \;\Rightarrow\; \dot{b}(t) = \dot{k}(t) \qquad [2.43]$$

Por tanto, despejando el tipo de interés de la segunda condición de óptimo de [2.42] y sustituyendo en [2.40] nos queda la ecuación de Ramsey-Keynes del problema de la familia-productora que obtuvimos en el apartado 2.

$$\left[-\frac{c(t)u''[c(t)]}{u'[c(t)]}\right]\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = f'[k(t)] - \rho - \delta \qquad [2.44]$$

Por su parte, partiendo de la expresión [2.38] expresada en función del tiempo

$$\dot{b}(t) = w(t) - c(t) + (r(t) - n)b(t) \qquad [2.45]$$

puede sustituirse en ella el salario y el tipo de interés que se obtiene a partir de [2.42]. Finalmente, teniendo en cuenta [2.43], se obtiene la restricción del problema de las familias-productoras en el contexto básico.

$$\dot{k}(t) = f\left[k(t)\right] - c(t) - (n+\delta)k(t)$$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS Y BIBLIOGRAFÍA

Abramovitz, M. (1956) "Resource and Output Trends in the United states since 1870", *American Economic Review* 46 (May): 5-23.

Barro, R. y X. Sala-i-Martín (2000), *Crecimiento Económico*, Ed. Reverté.

Cass, D. (1965): "Optimum growth in an aggregative model of capital accumulation", *Review of Economic Studies*, vol. 32, julio, pp. 233-240.

De La Fuente, A. (1992): "Historie d'A: crecimiento y progreso técnico", *Investigaciones Económicas*, vol. 16, nº 3, pp.331-391.

Dolado, J.; González-Páramo, J. y Roldán, J. (1994): "Convergencia económica entre las provincias españolas: evidencia empírica (1955-1989)", *Moneda y Crédito*, nº 198, pp. 81-119.

Koopmans, T. (1965): "On the concept of optimal economic growth", en *Scientific Papers of Tjalling C. Koopmans*, Springer, New York.

Ramsey, F. (1928): "A mathematical theory of saving", *Economic Journal*, vol. 38, diciembre, pp. 543-559.

Romer, D. (2006): *Macroeconomía Avanzada*, McGraw-Hill, 3ª edición.

Sala-i-Martin, X. (2000): *Apuntes de crecimiento económico*, segunda edición, Antoni Bosch, Barcelona.

Solow, R.M. (1956): "A contribution to the theory of economic growth", *Quarterly Journal of Economics*, vol. 70, nº 1, pp. 65-94.

Solow, R.M. (1957): "Technical Change and the Aggregate Production Function" *Review of Economics and Statistics* 39, pp. 312-320.

Solow, R.M. (2000): *Growth theory. An exposition*, segunda edición, Oxford University Press, Nueva York.

Sorensen, P.B. y Whitta-Jacobsen H. J. (2008): *Introducción a la macroeconomía avanzada (Volumen 1:crecimiento económico)*, Mac Graw-Hill, Madrid.

Swan, T.W. (1956): "Economic growth and capital accumulation", *Economic Record*, vol. 43, nº 2, pp. 334-361.