Macroeconomía III (Grado en Economía)

Universidad de La Laguna

Tema 3. Modelos de Crecimiento Endógeno

Juan Acosta Ballesteros

Carlos Bethencourt Marrero

Gustavo A. Marrero Díaz

Fernando Perera Tallo

Departamento de Análisis Económico

Universidad de La Laguna

TEMA 3.
MODELOS DE CRECIMIENTO ENDÓGENO

1. Introducción

En los modelos que se han analizado hasta ahora, o bien no se genera crecimiento permanente debido a la existencia de rendimientos decrecientes a escala en el capital físico, o bien el crecimiento a largo plazo se genera por un factor exógeno. En este último la fuente del crecimiento permanente es el cambio técnico, cuya velocidad es constante y exógena y, por tanto, no se ve afectado por ninguna de las decisiones que toman los agentes. Como consecuencia, la tasa de crecimiento a largo plazo no depende ni de las preferencias de los consumidores ni de ninguna variable relacionada con la política económica.

En este tema se presentan los primeros modelos de crecimiento endógeno que, a diferencia de los modelos neoclásicos, generan crecimiento permanente de las variables per capita endógenamente. Dicho crecimiento depende de las actuaciones de los agentes, por lo que la tasa de crecimiento a largo plazo está en función de parámetros relacionadas con las preferencias de los hogares y con medidas de política económica. Por esta razón, estos modelos resultan mucho más apropiados para analizar los factores que afectan al crecimiento a largo plazo. En primer lugar, se trata el modelo de crecimiento AK (Rebelo, 1991) que asume una función de producción lineal, por lo que evita los rendimientos decrecientes en la acumulación de capital. En segundo lugar, se reinterpreta el modelo AK suponiendo que, además de capital físico, en las economías se acumula capital humano. Para ello se plantea un modelo en el que el capital humano y el capital físico se producen empleando la misma tecnología (modelo de un sector)[1]. En este caso, los agentes deben decidir, no sólo cuánto consumen en cada momento, sino también cuánto invierten en capital humano y en capital físico.

En tercer lugar, se presenta un modelo en el que las mejoras en la productividad del capital se producen mediante la introducción del aprendizaje por la práctica (Arrow, 1962) que se genera cuando las empresas invierten. El nuevo conocimiento que se genera con el aprendizaje se difunde al conjunto de las empresas de la economía (Romer, 1986). En cuarto lugar se considera el modelo propuesto por Barro (1990), basado en la introducción de factores de producción de provisión pública, donde se estudia la relación entre el gasto público y la tasa de crecimiento. En quinto lugar se considera el efecto de las externalidades usando el modelo AK.

Por último, se presenta una versión simplificada del modelo de Romer (1990) en el que la fuente de crecimiento es la investigación y desarrollo tecnológico. En dicho modelo hay empresas que crean nuevos bienes intermedios, aumentando así la productividad del sector de bienes finales y generando, de esta manera, crecimiento permanente. Para que estas empresas tengan incentivos a innovar, tienen que disfrutar durante algún tiempo (que en el modelo es ilimitado) de una patente que les permita obtener alguna rentabilidad de su inversión en I+D. Así, estas empresas podrán obtener beneficios debido a que disfrutan de una situación de monopolio en la que otras empresas no pueden entrar debido a la protección de la patente. No obstante, la existencia de monopolios en el sector de bienes intermedios implica que el nivel de producción de dichos bienes es subóptimo, lo que repercute en la productividad del sector de bienes finales y, como consecuencia, afecta a las tasas de crecimiento, que son inferiores a las que habría en el óptimo de Pareto.

2. La primera generación de modelos de crecimiento endógeno

2.1. Del crecimiento exógeno al crecimiento endógeno

En los modelos neoclásicos de crecimiento, la productividad marginal decreciente del capital conlleva que el crecimiento se agote, pero, como se explicó, este resultado no se sostiene empíricamente. Por ello, se hace necesaria alguna fuente de progreso tecnológico que haga posible que la producción real per cápita presente una senda de crecimiento sostenida. Hasta la aparición de los modelos de crecimiento endógeno, este ‘progreso tecnológico’ se consideraba algo exógeno, es decir, la tecnología mejora con el tiempo pero no se puede explicar qué origina este progreso. Precisamente, los modelos de crecimiento endógeno intentar dar un paso adelante en esta comprensión, haciendo que el crecimiento no se agote porque los agentes económicos realizan acciones como pueden ser dedicar recursos a innovación, a educación, a infraestructuras públicas, etc.

Para entender la intuición del resultado de una gran parte de los modelos de crecimiento endógeno que veremos en este tema, hemos de tener claro desde el comienzo que ahora el estado estacionario no va a estar definido por ‘niveles’ a los que convergen las variable en términos per cápita de la economía. Los estados estacionarios en este tipo de economías se deben interpretar como ‘sendas de equilibrio en las que las variables per capita

[1] En el apéndice se presenta el modelo de Uzawa (1965) y Lucas (1988) en el que la tecnología que produce el capital y el bien de consumo es diferente que la que genera capital humano (modelo de dos sectores).

crecen a una tasa constante (no necesariamente iguales entre si) y positiva'. A este tipo de equilibrio se le conoce como la 'senda de crecimiento equilibrado de la economía'[2].

Para dar una primera intuición del resultado de la primera familia de modelos de crecimiento endógeno que veremos en el tema, retomemos las dos condiciones de optimalidad: Ramsey-Keynes y la restricción de recursos. A continuación se muestran estas condiciones cuando la elasticidad de sustitución intertemporal (EIS) es constante:

$$f'[k(t)] - \delta = \sigma \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} + \rho \qquad [3.1]$$

$$\dot{k}(t) = f[k(t)] - c(t) - (n+\delta)k(t) \qquad [3.2]$$

Despejando las tasas de crecimiento del capital y el consumo en términos per cápita:

$$v_c(t) = \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\sigma}\{f'(k(t)) - \rho - \delta\} \qquad [3.3]$$

$$v_k(t) = \frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = \frac{f(k(t))}{k(t)} - \frac{c(t)}{k(t)} - (n+\delta) \qquad [3.4]$$

Después de analizar los modelos neoclásicos de crecimiento de los temas 1 y 2, ya sabemos que si $f'(k(t)) \to 0$ a medida que k crece, las tasas de crecimiento del consumo per cápita y del capital per cápita son constantes en el estado estacionario. Por ello, si queremos que las tasas de crecimiento del consumo y el capital sean constantes y positivas, una <u>*condición necesaria*</u> es que, a medida que *k(t)* tienda a infinito, $f'(k(t))$ tiene que converjer a una constante, que podemos denotar por *A*, que sea positiva. Además, como se aprecia en [3.4], esta constante ha de ser suficientemente grande, más concretamente superior a $\rho + \delta$. De este modo, tendremos que la tasa de crecimiento a lo largo de la senda de crecimiento equilibrado del consumo per capita vendrá dada por:

$$v_c = \frac{1}{\sigma}\{A - \rho - \delta\} > 0$$

Si la tasa de crecimiento del capital per cápita es constante en el estado estacionario, a partir de la ecuación [3.4], tenemos que

$$v_k = \frac{f(k^*(t))}{k^*(t)} - \frac{c^*(t)}{k^*(t)} - (n+\delta) > 0\,.$$

[2] Nótese que cuando todas las variables crecen a la misma tasa, en el estado estacionario se verifica que los ratios de las variables son constantes.

Dado que, como veremos, *f(k)* y *k* crecen a la mista tasa, el ratio *f(k)/k* es constante, por lo que la única posibilidad para que se de que v_k sea también constante es que el ratio *c(t)/k(t)* sea constante también. Esto implica que, necesariamente, en el estado estacionario el consumo y el capital per capita (y también la producción, el ahorro y la inversión por habitante) crezcan a la misma tasa, dada por:

$$v = \frac{1}{\sigma}\left\{A - \rho - \delta\right\} > 0 \qquad [3.5]$$

Este resultado es el precursor del primer modelo de crecimiento endógeno, en el que se supone que la función de producción viene representada por la siguiente tecnología:

$$Y(t) = AK(t) \Rightarrow y(t) = Ak(t),$$
$$A > \delta + \rho$$

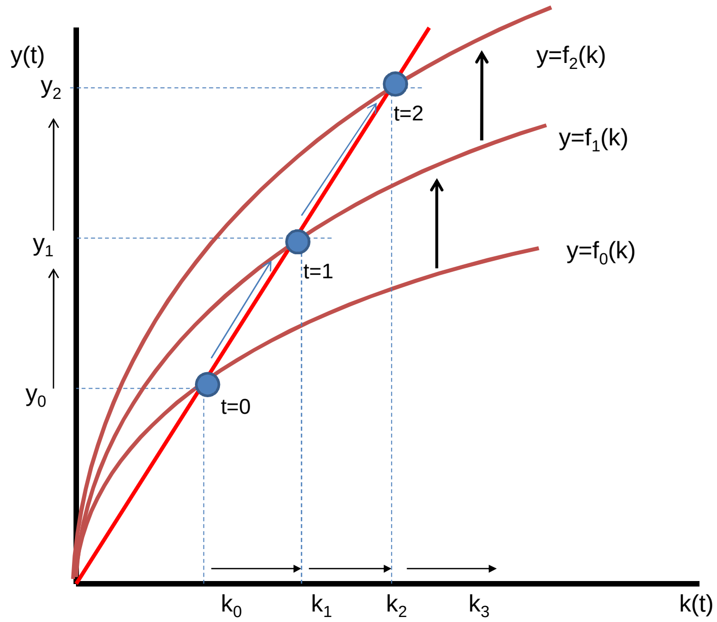
A esta tecnología se le conoce como *AK*. La productividad marginal del capital en este caso es igual a *A>0*, por lo que no existe el problema de rendimientos decrecientes del capital. Entendido lo anterior, el resultado es obvio: si el capital presenta rendimientos constantes a escala, y su productividad marginal es suficientemente grande, la economía experimentará crecimiento sostenido en el largo plazo.

Antes de mostrar el detalle del modelo *AK* en el apartado 2.2, es conveniente matizar varias cosas.

En primer lugar, esta tecnología *AK* implica que el parámetro α de la función de producción neoclásica sea igual a 1. Sin embargo, esto no es consistente con lo observado para las economías reales, donde la participación del las rentas del capital en el total es claramente inferior a 1 (alrededor de 0,36 para la economía norteamericana). Así, a pesar de que las implicaciones del modelo AK son consistentes con lo observado (las variables en per capita crecen a tasa constante), su especificación de partida no es realista. ¿Cómo compatibilizar ambas cosas? Esto es, por un lado que la función de producción privada presente rendimientos decrecientes; por otro lado, que cuando se resuelva el equilibrio competitivo, en la economía agregada, la función de producción presente rendimientos constantes a escala. Los modelos presentados en este tema muestran varias situaciones en las que se pueden compatibilizar ambas ideas.

La explicación más básica es la que usa el propio modelo *AK* en su motivación: en realidad el capital de la función de producción ha de entenderse en ‘sentido amplio’, como una amalgama de distintos capitales físicos y humano. Aunque simple, esta explicación otorga una de las claves de estos modelos. Trabajos más elaborados modifican la función de producción neoclásica incluyendo un conjunto de factores productivos, endógenos al modelo, que complementan al capital físico y permite que aumentar su productividad marginal a medida que aumenta el capital, impidiendo que esta se reduzca a cero. De alguna manera, estos modelos hacen endógeno la fuente de crecimiento. Estos factores productivos tienen que ver con el conocimiento (modelo de learning-by-doing, apartado 2.4), las infraestructuras públicas (apartado 2.5) o el capital humano (apartado 2.3).

El gráfico 1 resume muy bien la idea de estos modelos iniciales de crecimiento endógeno. La función de producción presenta rendimientos decrecientes en el capital. Pero a medida que aumenta el capital, la productividad marginal del capital se incrementa de manera endógena (desplaza la función de producción hacia arriba). Así, en lugar de movernos sobre la misma función de producción, vamos saltando de función en función de producción. La consecuencia es que la economía se mueve sobre una línea recta, obteniendo las mismas implicaciones del modelo *AK*.



2.2 El modelo AK

En este apartado se plantea y resuelve el modelo *AK* en el mismo contexto dinámico de equilibrio general expuesto en el tema 2. El modelo *AK* supone una función de producción que es lineal en un único factor de producción, el capital,[3]

$$Y(t) = AK(t) \qquad A > 0 \qquad [3.6]$$

que expresada en términos *per cápita* queda

$$y(t) = Ak(t) \qquad [3.7]$$

donde A es una constante, K denota el capital agregado y k el capital *per cápita*.

Planteando este problema de modo similar al del modelo Cass-Koopmans del tema 2, pero usando la función de producción [3.7] y una función instantánea de utilidad con elasticidad de sustitución intertemporal constante, tenemos lo siguiente:

$$\max_{c(t)} \int_0^\infty \left[\frac{c(t)^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} \right] e^{-(\rho - n)t} dt$$

$$s.a. \quad \dot{k}(t) = Ak(t) - c(t) - (n+\delta)k(t)$$

$$k(0) > 0$$

[3] La introducción del modelo lineal en la nueva literatura del crecimiento endógeno se atribuye a Rebelo (1991).

El Hamiltoniano de este problema es

$$H(t)=e^{-(\rho-n)t}\left[\frac{c(t)^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}\right]+\mu(t)\{Ak(t)-c(t)-(n+\delta)k(t)\}$$

μ(t) es el multiplicador dinámico de Lagrange, que mide la renuncia en términos de utilidad a la que hay que hacer frente para acumular una unidad adicional de capital. Para encontrar la solución se determinan las condiciones de primer orden habituales:

$$\frac{\partial H(t)}{\partial c(t)}=0$$

$$\frac{\partial H(t)}{\partial k(t)}=-\dot{\mu}(t)$$

$$\frac{\partial H(t)}{\partial \mu(t)}=\dot{k}(t)$$

Además, de la condición de transversalidad:

$$\lim_{t\to\infty} k(t)\mu(t)=0$$

Tomando las correspondientes derivadas, las condiciones de primer orden son:

$$e^{-(\rho-n)t}c(t)^{-\sigma}-\mu(t)=0 \qquad [3.8]$$

$$\mu(t)\{A-(n+\delta)\}=-\dot{\mu}(t) \qquad [3.9]$$

$$\dot{k}(t)=Ak(t)-c(t)-(n+\delta)k(t) \qquad [3.10]$$

Para eliminar *μ(t)*, al igual que en el tema 2, se toman logaritmos neperianos de la expresión [3.8] y se deriva respecto al tiempo:

$$ln\,\mu(t)=-(\rho-n)t-\sigma\,ln\,c(t)\rightarrow\frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)}=-(\rho-n)-\sigma\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}$$

Sustituyendo en [3.7]se obtiene la ecuación de Ramsey Keynes:

$$\sigma\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}+\rho=A-\delta \qquad [3.11]$$

El miembro de la izquierda de [3.9] es el beneficio obtenido del consumo y el de la derecha recoge el beneficio o rendimiento obtenido de la inversión. El beneficio del consumo depende de la tasa de descuento, que refleja el hecho de que los individuos prefieren consumir cuanto antes mejor, y de la tasa de crecimiento del consumo, que se tiene en cuenta para lograr un consumo lo más estable posible. En efecto, si la tasa de crecimiento es positiva, la gente está dispuesta a desplazar una parte del consumo que realizará en el futuro al presente para lograr así un consumo más estable. El miembro de la derecha es el rendimiento de la inversión, que se reduce a la productividad marginal neta del capital y es igual a $A-\delta$ (este rendimiento es independiente del *stock* de capital).

De forma equivalente,

$$v_c(t)=\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}=\frac{1}{\sigma}(A-\rho-\delta)=v*_c \qquad [3.12]$$

La expresión [3.12] indica que el consumo crece a una tasa constante en todo momento. Para que se puedan obtener tasas positivas de crecimiento, es necesario suponer que $A>\rho+\delta$.

La tasa de crecimiento del capital se obtiene a partir de la ecuación de transición [3.10].

$$v_k(t)=\frac{\dot{k}(t)}{k(t)}=A-\frac{c(t)}{k(t)}-(n+\delta) \qquad [3.13]$$

Para que sea constante, es necesario que la ratio $\frac{c(t)}{k(t)}$ también lo sea, y esto sucede siempre que las tasas de crecimiento del consumo y el capital per cápita sean iguales. Por tanto, la tasa de crecimiento de la economía, a la que denotamos genéricamente *v**, verifica que $v*_c=v*_k=v*$.

Esta tasa de crecimiento ha de ser positiva, pero también tiene que estar acotada superiormente.

Sustituyendo [3.10] en la condición de transversalidad y suponiendo que la economía está en la senda de crecimiento equilibrado,

$$k(t)=k(0)e^{v^*t}$$

$$c(t)=c(0)e^{v^*t}$$

obtenemos que

$$\lim_{t\to\infty}e^{-(\rho-n)t}k(0)e^{v^*t}c(0)^{-\sigma}e^{-\sigma v^*t}=k(0)c(0)^{-\sigma}\lim_{t\to\infty}e^{\left[v^*(1-\sigma)-(\rho-n)\right]t}=0$$

Para que el límite sea cero, el exponente ha de ser negativo:

$$\left[v^*(1-\sigma)-(\rho-n)\right]<0$$

$$v^*<(\rho-n)/(1-\sigma)$$

Esta restricción también ha de cumplirse para que la función de utilidad intertemporal esté acotada superiormente y el problema de optimación tenga por tanto solución. Sustituyendo el valor de la tasa de crecimiento en estado estacionario, esta condición puede expresarse como una restricción que debe cumplirse entre los parámetros del modelo:

$$\begin{aligned}&\frac{(1-\sigma)}{\sigma}(A-\rho-\delta)-(\rho-n)<0\\&\frac{1}{\sigma}(A-\delta-\rho)<A-\delta-n\end{aligned} \qquad [3.14]$$

Por último, podemos calcular el ratio consumo-capital en estado estacionario. Dado que *c(t)* y *k(t)* crecen a la misma tasa en estado estacionario, el ratio de ambas variables es constante y lo podemos calcular combinando [3.12] con [3.13]:

$$v^* = \frac{1}{\sigma}(A-\rho-\delta)$$

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = A - \frac{c(t)}{k(t)} - (n+\delta) = v^* \Rightarrow$$

$$\left(\frac{c}{k}\right)^* = A-(n+\delta)-v^* = A-n-\delta-\frac{1}{\sigma}(A-\rho-\delta)$$

Este valor de *c/k* es positivo debido a la restricción en los parámetros impuesta en [3.14].

2.3. Reinterpretación del modelo AK: un modelo simple con capital físico y humano

Una manera fácil de enriquecer el modelo *AK* (y evitar el problema conceptual que supone asumir que la participación del capital en la economía es 1) es considerar la existencia de capital humano (*H*) y capital físico (*K*) en la función de producción. Así, tenemos que:

$$Y(t) = F[K(t), H(t)]$$

H(t) corresponde al 'trabajo efectivo' (número de unidades de eficiencia totales) del conjunto de la mano de obra de la economía, de modo que $H(t) = h(t)L(t)$. Es decir, el capital humano global es el producto de *L(t)*, el número de trabajadores, y *h(t)*, que representa las unidades de trabajo efectivo (el capital humano) del individuo representativo (número de unidades de eficiencia que aporta cada trabajador) , que le hace ser más o menos productivo.

$$Y(t) = F\left[K(t), h(t)L(t)\right] = AK(t)^{\alpha}\left[h(t)L(t)\right]^{1-\alpha}, A>0, \alpha\in(0,1) \qquad [3.15]$$

Simplifiquemos el modelo asumiendo que n=0. Así, el producto en términos per capita depende del capital físico y humano por trabajador

$$y(t) = Ak(t)^{\alpha}h(t)^{1-\alpha}, A>0, \alpha\in(0,1) \qquad [3.16]$$

Por simplicidad, asumimos que el proceso de acumulación del capital humano es el mismo que el del capital físico y , también, consideraremos que las tasas de depreciación son iguales:

$$\dot{h}(t) = i_h(t) - \delta h(t) \qquad [3.17]$$

El problema de la familia productora queda:

$$\max_{c(t)} \quad \int_0^{\infty}\left[\frac{c(t)^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}\right]e^{-\rho t}\,dt$$

$$s.a. \quad \dot{k}(t) = A\,k(t)^{\alpha}h(t)^{1-\alpha} - c(t) - \delta k(t) - i_h(t)$$

$$\dot{h}(t) = i_h(t) - \delta h(t)$$

$$k(0), h(0) > 0$$

El Hamiltoniano de este problema es

$$H(t)=e^{-\rho t}\left[\frac{c(t)^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}\right]+\mu_k(t)\left\{A\,k(t)^{\alpha}h(t)^{1-\alpha}-c(t)-\delta k(t)-i_h(t)\right\}+$$
$$+\mu_h(t)\left\{i_h(t)-\delta h(t)\right\}$$

donde $\mu_k(t)$ es el multiplicador dinámico de Lagrange asociado a la acumulación de capital físico y $\mu_h(t)$ el asociado a la acumulación del capital humano. En este problema tenemos dos variables de control, $c(t)$ y $i_h(t)$, y dos variables de estado, $k(t)$ y $h(t)$. Para encontrar la solución se determinan las condiciones de primer orden habituales:

$$\begin{aligned}
&i)\quad \frac{\partial H(t)}{\partial c(t)}=0\Leftrightarrow e^{-\rho t}c(t)^{-\sigma}=\mu_k(t)\\
&ii)\quad \frac{\partial H(t)}{\partial i_h(t)}=0\Leftrightarrow \mu_h(t)=\mu_k(t)\\
&iii)\quad \frac{\partial H(t)}{\partial k(t)}=-\dot{\mu}_k(t)\Leftrightarrow \mu_k(t)\left[\alpha Ak(t)^{\alpha-1}h(t)^{1-\alpha}-\delta\right]=-\dot{\mu}_k(t)\\
&iv)\quad \frac{\partial H(t)}{\partial h(t)}=-\dot{\mu}_h(t)\Leftrightarrow \mu_k(t)(1-\alpha)Ak(t)^{\alpha}h(t)^{-\alpha}-\mu_h(t)\delta=-\dot{\mu}_h(t)\\
&v)\quad \frac{\partial H(t)}{\partial \mu_k(t)}=\dot{k}(t)\Leftrightarrow A\,k(t)^{\alpha}h(t)^{1-\alpha}-c(t)-\delta k(t)-i_h(t)=\dot{k}(t)\\
&vi)\quad \frac{\partial H(t)}{\partial \mu_h(t)}=\dot{h}(t)\Leftrightarrow i_h(t)-\delta h(t)=\dot{h}(t)
\end{aligned} \qquad [3.18]$$

En primer lugar, notemos la condición ii).[4] Los precios sombra de ambos tipos de capital han de ser iguales en equilibrio. Esto se debe a que ambos tipos de capital afectan similarmente a la función de producción y hemos asumido el mismo proceso de acumulación. Esta condición simplifica enormemente las condiciones de optimalidad, ya que podemos considerar en todas ellas que tenemos tan sólo un multiplicador y, por tanto,

$$\mu_h(t)=\mu_k(t)=\mu(t)$$
$$\dot{\mu}_k(t)=\dot{\mu}_h(t)=\dot{\mu}(t)$$

Usando esto, podemos combinar las condiciones iii) y iv), obteniendo una condición de arbitraje entre ambos tipos de capital: en equilibrio, la productividad marginal del capital físico (neta de su depreciación) ha de ser igual a la del capital humano (neta de su propia depreciación):

$$\alpha Ak(t)^{\alpha-1}h(t)^{1-\alpha}-\delta=(1-\alpha)Ak(t)^{\alpha}h(t)^{-\alpha}-\delta \qquad [3.19]$$

De esta condición, obtenemos una condición implícita para calcular el ratio $k(t)/h(t)$ en equilibrio, que después será usado para obtener la tasa de crecimiento de la economía,

$$\alpha A\left(\frac{k(t)}{h(t)}\right)^{\alpha-1}=(1-\alpha)A\left(\frac{k(t)}{h(t)}\right)^{\alpha} \qquad [3.20]$$

[4] Como condiciones de optimalidad, también existen las condiciones de transversalidad: una para k(t) y otra para h(t). Sus interpretaciones son las habituales.

Despejando:

$$\frac{k(t)}{h(t)} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \qquad [3.21]$$

El ratio óptimo de capital físico sobre el humano es el ratio de sus elasticidades, que, al suponer la misma tasa de depreciación, es la única diferencia de estos dos tipos de capitales. Además, notemos que es constante para todo t.

Ya sólo queda averiguar cuál es la tasa de crecimiento de la economía. Para ello, como siempre, obtenemos la condición de Ramsey-Keynes, combinando la condición i) con la iii) (también podrían obtenerse usando la iv). Operando de la forma habitual, llegamos a:

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\sigma}\left[\alpha A\left(k(t)/h(t)\right)^{\alpha-1} - \delta - \rho\right] \qquad [3.22]$$

Y sustituyendo el valor del ratio k(t)/h(t), tenemos que:

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\sigma}\left[\alpha A\left(\frac{\alpha}{(1-\alpha)}\right)^{\alpha-1} - \delta - \rho\right] \qquad [3.23]$$

La tasa de crecimiento de las variables per cápita es constante. A pesar de que ambos tipos de capital (factores que se acumulan) presentan rendimientos decrecientes, muestran rendimientos constantes en el agregado. El motivo es que, como ambos factores se acumulan y son complementarios en la función de producción, la economía crece a tasa constante en estado estacionario. Nótese que esta intuición ya fue expuesta cuando presentamos el modelo AK básico, al interpretar el capital en 'sentido amplio'. En este modelo con capital humano y físico hemos formalizado esta idea.

2.4. El modelo de aprendizaje por la práctica (learning-by-doing)

En este apartado desarrollamos el modelo de aprendizaje por la práctica (learning-by-doing), el cual permite combinar la idea de la productividad marginal decreciente en el capital privado en la función de producción privada con la existencia de rendimientos constantes a escala en la función de producción agregada. Este modelo no considera la existencia de capital humano, como en el modelo anterior. Tan sólo existe capital físico.

El concepto de aprendizaje por la práctica fue introducido en la literatura por **Arrow** (1962) y **Sheshinski** (1967), según el cual la producción de bienes genera la acumulación de conocimientos en las empresas y conduce al aumento de la productividad del capital. **Romer (1986)** introdujo esta idea en modelos de crecimiento neoclásicos y desarrollo uno de los primeros modelos de crecimiento endógeno existentes en la literatura. Este modelo, sus ideas y sus implicaciones, reabrió el interés sobre los modelos de crecimiento endógeno.

En el trabajo de Romer, que no considera la acumulación de capital físico sino la de conocimiento, supone que cuando una empresa invierte genera un proceso de aprendizaje (debido a la práctica) que se difunde a todas las empresas de la economía sin que sea posible que la empresa individual lo evite. Esta idea del 'spillover' del conocimiento es muy importante en economía, al ser el origen de muchas de las teorías existentes en lo relacionado con el conocimiento y el capital físico, o con la educación y el capital humano, o con los procesos de investigación y la adopción de nuevas tecnología e inventos.

En este apartado se plantea un modelo sencillo en el que se produce un proceso de aprendizaje por la práctica, que se desborda de forma inmediata al conjunto de la economía y afecta a todas las empresas en forma de que permite mejorar la productividad del capital. Este modelo, en su versión más sencilla, asume que el proceso de acumulación de conocimiento es un sub-producto del proceso de acumulación de capital. Esta hipótesis implica suponer que el conocimiento es un bien 'sin rivalidad': una vez una nueva tecnología es descubierta, su conocimiento puede ser usado de manera inmediata por otras empresas. Un planteamiento alternativo, que se tratará en el apartado 3, considera que la empresa que logra el nuevo conocimiento puede utilizar una patente para proteger este conocimiento y tener la exclusividad durante un tiempo de la tecnología desarrollada.

Supongamos una economía sin crecimiento en la población (*n=0*) y donde la tasa de depreciación es cero, δ*=0*. Para entender mejor lo que hay detrás del proceso de desbordamiento del conocimiento que fundamenta este modelo, supongamos que existe un número muy elevado de empresas, todas idénticas entre sí. Dado que todas las empresas son idénticas, y para simplificar el modelo de Romer (quizás en exceso, pero sin perder la intuición de los resultados), trabajemos con una empresa representativa:

$$\begin{aligned}
&Y(t) = F\left(K(t), \tilde{L}(t)\right) = \left[K(t)\right]^{\alpha}\left[LA(t)\right]^{1-\alpha} \\
&\tilde{L}(t) = A(t)L: \text{ trabajo 'efectivo' de la empresa} \\
&L\text{: número trabajadores (oferta perfectamente inelástica)} \\
&A(t)\text{: variable que mide el grado de conocimiento 'global' de la economia}
\end{aligned} \qquad [3.24]$$

La empresa decidirá sobre *K(t)* en [3.24], pero tomará *A(t)* como dado, que es común a todas las empresas y representa una medida agregada del estado de conocimiento de la economía. Sin embargo, este A(t) no es exógeno, sino que evoluciona de manera endógena con la economía[5], ya que *A(t)* se relaciona con un proceso de aprendizaje vinculado a la inversión bruta agregada en la economía. La inversión bruta es considerada como un índice de experiencia acumulada de la economía (un proceso de aprendizaje con la práctica):

$$\mathrm{A(t)} = \mathrm{B}\int_{-\infty}^{t} \mathrm{I(s)ds} = \mathrm{B}\Psi(\mathrm{t}) = \mathrm{BK(t)}, \qquad [3.25]$$

en donde tenemos que $\Psi(t)$ es el estado de conocimiento de la economía, que será igual a *K(t)* al haber supuesto que la tasa de depreciación de la economía es cero. La expresión para el caso de depreciación distinta de cero es mucho más compleja, pero la idea es la misma: el índice de experiencia depende del *stock* de capital total.[6] Es importante enfatizar que el K(t) de la expresión [3.25] no será decidido por la empresa, sino que es tomado como exógeno. Por esto, y para no confundirlo con el capital que sí decide la empresa, seguiremos usando la notación de $\Psi(t)$ para este estado del conocimiento.

$$\mathrm{Y(t)} = \left[\mathrm{K(t)}\right]^{\alpha}\left[\mathrm{B}\Psi(\mathrm{t})\mathrm{L}\right]^{1-\alpha}$$

que expresada en términos *per cápita* queda:

$$\mathrm{y(t)} = \left[\mathrm{k(t)}\right]^{\alpha}\left[\mathrm{B}\Psi(\mathrm{t})\right]^{1-\alpha}$$

[5] Lucas (1988) desarrolla un modelo similar al de Romer pero suponiendo capital humano en lugar de físico.

[6] Se podría suponer una forma más general en la que $\mathrm{A(t)} = \left[\mathrm{BK(t)}\right]^{\phi}$. Sin embargo, sólo si ϕ=1 existe un sendero de crecimiento constante en el que la economía crece a una tasa constante.

Resolveremos a continuación el problema de la familia-productora (equivalente al equilibrio competitivo, como vimos en el tema anterior). Antes de pasar a la solución, dejemos claro la siguiente idea. A pesar de que el nivel de conocimiento global de la economía se ve afectado por el capital que invierten las empresas a nivel individual, las empresas no van a tener en cuenta este hecho a la hora de resolver su problema. La razón es que al ser un número muy grande, las empresas no van a internalizar este hecho, ya que consideran que su aportación al capital agregado de la economía (al conocimiento agregado) es pequeño, además de no ser los únicos beneficiarios. Este es un claro ejemplo de cómo la actuación individualista de los agentes (y la imposibilidad de coordinación) evita beneficiarse de la externalidad (positiva en este caso) que la acumulación de capital genera sobre la economía a través del conocimiento.

En este caso, si los agentes privados internalizaran (tuvieran en cuenta) la externalidad, acumularían más capital de manera individual. Esto ayudaría a aumentar más el nivel de conocimiento de la economía, que permitiría aumentar la productividad no sólo del capital de la empresa individualmente sino la de todas. Pero esto no se tiene en cuenta a nivel individual, lo que tendrá como consecuencia que el capital que se acumule en el equilibrio competitivo (el problema de la familia-productora) sea inferior al Pareto-óptimo. En este sentido, el problema del planificador sí tendrá en cuenta la externalidad que el capital privado ejerce sobre el conocimiento de la economía y esta a su vez sobre la productividad individual.

A continuación resolvemos el problema de la familia-productora y obtenemos la tasa de crecimiento de la economía:

$$\max_{c(t)} \int_0^\infty \left[\frac{c(t)^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}\right] e^{-\rho t}\,dt$$

$$s.a. \quad \dot{k}(t) = [k(t)]^\alpha [B\Psi(t)]^{1-\alpha} - c(t)$$

$$k(0) > 0$$

La variable de control es *c(t)*, la de estado *k(t)*, mientras que $\Psi(t)$ es exógena. Derivando las condiciones de primer orden del Hamiltoniano correspondiente se obtiene

$$e^{-\rho t} c(t)^{-\sigma} - \mu(t) = 0$$

$$\mu(t)\left\{\alpha\left[\frac{B\Psi(t)}{k(t)}\right]^{(1-\alpha)}\right\} = -\dot{\mu}(t)$$

$$\dot{k}(t) = [k(t)]^\alpha [\Psi(t)]^{1-\alpha} - c(t)$$

Operando convenientemente

$$v_c(t) = \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\sigma}\left\{\alpha\left[\frac{B\Psi(t)}{k(t)}\right]^{(1-\alpha)} - \rho\right\}$$

En este momento, una vez se han obtenido las condiciones de primer orden, es cuando sustituimos el valor del conocimiento de la economía, que es una función del capital, $\Psi(\mathrm{t}) = \mathrm{K}(\mathrm{t}) = \mathrm{Lk}(\mathrm{t})$. Así, la tasa de crecimiento queda,

$$v_c{*} = \frac{1}{\sigma}\left\{\alpha B^{1-\alpha} L^{1-\alpha} - \rho\right\} \qquad [3.26]$$

Es fácil probar que el capital y la producción *per cápita* crecen a la misma tasa constante. Por tanto, se obtiene un resultado similar al del modelo *AK*. Esto es evidente si se tiene en cuenta que el supuesto de que $A(t) = B\Psi(t) = BK(t) = BLk(t)$ conduce a que la función de producción sea del tipo *AK*

$$y(t) = B^{1-\alpha}L^{1-\alpha}k(t)$$

Resumimos en este punto el sencillo mecanismo por el que las economías crecen de forma permanente. Cada vez que se acumula capital, las empresas ganan experiencia y la eficiencia del trabajo crece. De esa manera no se observan rendimientos decrecientes en la acumulación del capital.

Aun así, este modelo proporciona un resultado nuevo: la tasa de crecimiento depende de la población total de la economía. Este efecto de escala[7] implica que los países más poblados crecen más rápido. Por este motivo se ha de suponer que la población no crece, ya que de lo contrario tendríamos un crecimiento explosivo en la economía. Por supuesto, el crecimiento también es mayor cuanto mayor sea el parámetro B, que recoge la magnitud del aprendizaje.

Por lo comentado anteriormente, la solución obtenida por las familias productoras no es óptimo de Pareto. Más concretamente, el motivo es que cuando una empresa individual invierte considera que la producción de la economía crece en la cuantía $\alpha B^{1-\alpha}L^{1-\alpha}$ por cada unidad de capital. Sin embargo, en el óptimo de Pareto, se tiene en cuenta que la decisión de invertir afecta a la experiencia acumulada y, por tanto, a la eficiencia del trabajo y cuantifica el aumento de la producción en $B^{1-\alpha}L^{1-\alpha}$.

El óptimo de Pareto se obtiene sustituyendo la restricción presupuestaria de las familias productoras por:

$$\dot{k}(t) = k(t)B^{1-\alpha}L^{1-\alpha} - c(t)$$

Como comentamos anteriormente, el planificador sí internaliza la externalidad que ejerce el capital privado sobre el conocimiento global de la economía. El problema coincide con el del modelo *Ak*, en el que $A = B^{1-\alpha}N^{1-\alpha}$. En consecuencia, la tasa de crecimiento del consumo es:

$$v_c^{PO} = \frac{1}{\sigma}\left\{B^{1-\alpha}L^{1-\alpha} - \rho - \delta\right\} \qquad [3.27]$$

Por tanto, la economía crece a una tasa [3.26], que es menor que la Pareto-óptima [3.27] porque la productividad marginal del capital que perciben los agentes es menor que la real. Una solución podría consistir en incentivar la inversión mediante la aplicación de algún subsidio que se financiase con la aplicación de un impuesto de cuantía fija. De esta manera, el incentivo a invertir coincidiría con la verdadera rentabilidad de hacerlo.

Muy brevemente, ilustremos este hecho con un ejemplo. Supongamos el problema de las familias-productoras, considerando la posibilidad de un impuesto (o una subvención) sobre la renta. Para equilibrar el presupuesto, suponemos que el impuesto o la subvención resultante se equilibra con un impuesto (o transferencia) lump-sum, *Tr(t)*. El problema es el siguiente:

[7] Si la tasa de crecimiento de la economía está relacionada con la población, sólo existe equilibrio estacionario en este modelo si la población es constante. Por este motivo se ha supuesto que L es constante.

$$\max_{c(t)} \quad \int_0^\infty \left[\frac{c(t)^{1-\sigma}-1}{1-\sigma} \right] e^{-\rho t}\, dt$$

$$s.a. \qquad \dot{k}(t) = [k(t)]^\alpha \, [B\Psi(t)]^{1-\alpha} \, (1-\tau) - c(t) + Tr(t)$$

$$k(0) > 0$$

Para generalizar el estudio, permitimos que τ pueda ser positivo (un impuesto) o negativo (una subvención). Procediendo de la misma manera que anteriormente, obtenemos la siguiente tasa de crecimiento de esta economía:

$$v_c{*} = \frac{1}{\sigma}\left\{\alpha B^{1-\alpha} L^{1-\alpha}(1-\tau) - \rho\right\}$$

Nótese que ahora no es obvio que esta tasa de crecimiento sea inferior a la Pareto-óptima. De hecho, igualando ambas tasas de crecimiento obtenemos que:

$$v_c{*} = \frac{1}{\sigma}\left\{\alpha B^{1-\alpha} L^{1-\alpha}(1-\tau) - \rho\right\} = \frac{1}{\sigma}\left\{B^{1-\alpha} L^{1-\alpha} - \rho - \delta\right\} = v_c^{PO}$$

Despejando el tipo marginal τ obtenemos la política óptima: aquella que hace que la tasa de crecimiento de la economía iguale a la Pareto-optima. En este contexto, que sea capaz de corregir la externalidad existente. Esta política viene dada por:

$$\tau = -\frac{1-\alpha}{\alpha} < 0 \qquad [3.28]$$

Puesto que τ es negativo, la solución consiste en subsidiar la producción del bien recaudando los recursos necesarios a través de un impuesto de cuantía fija.

2.5. La política fiscal y las infraestructuras públicas

El modelo que presentamos a continuación tiene como objetivo la introducción de las infraestructuras públicas y la manera de financiarlas en un modelo de crecimiento endógeno, y la consideración de su relación con la productividad marginal del capital privado. Veremos que si la productividad del gasto en infraestructuras fuera lo suficientemente grande tendría la capacidad de generar crecimiento sostenible en la economía. Al final del epígrafe discutiremos brevemente la relación de este resultado con los resultados empíricos en la literatura.

El modelo seminal que estudia la relación entre infraestructuras públicas y crecimiento en el contexto neoclásico es el elaborado por **Barro** (1990), que proporciona una forma alternativa de interpretar la tecnología *AK*. Este modelo introduce un factor de producción de provisión pública en la función de producción, que complementa a los factores privados aumentando su productividad. En este contexto, la producción depende de las cantidades existentes de dos factores de producción: capital privado, *K*, y un factor de producción provisto por el sector público[8], *G*. De esta forma, la función de producción presenta rendimientos constantes a escala, pero existen rendimientos decrecientes de cada uno de los factores:

$$Y(t) = A[K(t)]^\alpha \, [G(t)]^{1-\alpha} \quad ; \quad 0<\alpha<1$$

[8] Podría tratarse de autopistas, aeropuertos o tribunales de justicia.

Expresada en términos *per cápita*, la función de producción es:

$$y(t) = A\left[k(t)\right]^{\alpha}\left[g(t)\right]^{1-\alpha} \quad ; \quad 0<\alpha<1$$

Debe señalarse que, en el modelo de Barro, *G* no es un factor de producción acumulable, es decir, no representa el *stock* de bienes provistos por el sector público sino un flujo productivo, esto es, un servicio. Podría tratarse de servicios contratados al sector privado. De esa manera, el gobierno no acumula capital[9].

Asumiremos que la población no crece, *n=0*, que la tasa de depreciación es $\delta>0$, y la función de utilidad es de la familia CES y sólo depende del consumo privado. Comenzaremos por describir y resolver el problema de las familias-productoras como una manera de obtener las asignaciones del equilibrio competitivo.

2.5.1. El problema de la familia-productora

En este contexto, además de las familias y de la empresa, existe otro agente, el gobierno, que ofrece servicios de infraestructuras públicas. Puesto que el Estado tiene que equilibrar su presupuesto en todos los momentos del tiempo, por ello recauda un impuesto proporcional sobre la renta que verifica:

$$g(t) = \tau y(t) = \tau A\left[k(t)\right]^{\alpha}\left[g(t)\right]^{1-\alpha} \quad ; \quad 0 < \tau < 1 \qquad [3.29]$$

donde τ es la tarifa del impuesto.

En este contexto, los agentes (familias-productoras) tratan de resolver el siguiente problema de optimización:

$$\max_{c(t)} \int_0^{\infty}\left[\frac{c(t)^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}\right]e^{-(\rho-n)t}dt$$

$$s.a. \quad \dot{k}(t) = (1-\tau)A\left[k(t)\right]^{\alpha}\left[g(t)\right]^{1-\alpha} - c(t) - (n+\delta)k(t)$$

$$k(0) > 0$$

Cabe hacer dos comentarios sobre este problema. En primer lugar, la restricción presupuestaria considera la renta después de impuestos, en otras palabras, el capital *per cápita* crece si la renta una vez detraídos los impuestos supera el consumo y la depreciación del capital *per cápita*. En segundo lugar, cuando los agentes resuelven su problema de optimización no toman en cuenta los efectos que sus decisiones de inversión tienen sobre la cantidad que gasta el sector público. Esto es así porque se supone que cada individuo representa una parte muy pequeña de la economía, de forma que considera el gasto público como dado.

Derivando las condiciones de primer orden del Hamiltoniano correspondiente se obtiene

$$e^{-(\rho-n)t}c(t)^{-\sigma} - \mu(t) = 0 \qquad [3.30]$$

[9] Véase el trabajo de Glomm y Ravikumar (1994) para un modelo en el que el gobierno acumula capital. La intuición de los resultados es similar a Barro (1990).

$$\mu(t)\left\{(1-\tau)A\alpha\left[\frac{g(t)}{k(t)}\right]^{(1-\alpha)}-(n+\delta)\right\}=-\dot{\mu}(t) \qquad [3.31]$$

$$\dot{k}(t)=(1-\tau)A[k(t)]^{\alpha}[g(t)]^{1-\alpha}-c(t)-(n+\delta)k(t) \qquad [3.32]$$

Operando convenientemente:

$$v_c(t)=\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}=\frac{1}{\sigma}\left\{(1-\tau)A\alpha\left[\frac{g(t)}{k(t)}\right]^{(1-\alpha)}-\rho-\delta\right\} \qquad [3.33]$$

Teniendo en cuenta [3.29] se puede escribir:

$$\tau=\frac{g(t)}{y(t)}=\frac{g(t)}{A[k(t)]^{\alpha}[g(t)]^{1-\alpha}}=\frac{1}{A}\left[\frac{g(t)}{k(t)}\right]^{\alpha} \Rightarrow \frac{g(t)}{k(t)}=(A\tau)^{1/\alpha} \qquad [3.34]$$

Sustituyendo [3.34] en [3.33], se obtiene la tasa de crecimiento del consumo:

$$v_c(t)=\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}=\frac{1}{\sigma}\left\{\alpha A^{(1/\alpha)}(1-\tau)\tau^{(1-\alpha)/\alpha}-\rho-\delta\right\} \qquad [3.35]$$

La expresión $\alpha A^{(1/\alpha)}(1-\tau)\tau^{(1-\alpha)/\alpha}$ en [3.35] se interpreta como la rentabilidad marginal después de impuestos de invertir en capital físico. Esta rentabilidad es la que perciben las familias-productoras, que consideran que sus acciones no influyen en la evolución del gasto público.

A partir de la expresión [3.34] se deriva fácilmente que las tasas de crecimiento del gasto público y del capital son iguales en el largo plazo. Además, como la ratio *g(t)/k(t)* es constante, para que la tasa de crecimiento del capital sea constante es necesario que la ratio *c(t)/k(t)* permanezca inalterada. Esto requiere que la tasa de crecimiento del capital coincida con la del consumo en la senda de crecimiento constante.

$$v_k(t)=\frac{\dot{k}(t)}{k(t)}=(1-\tau)\left[\frac{g(t)}{k(t)}\right]^{1-\alpha}-\frac{c(t)}{k(t)}-(n+\delta)$$

Por último, como ambos factores productivos crecen a la misma tasa, la existencia de rendimientos constantes a escala garantiza que la producción también evoluciona a ese mismo ritmo. En resumen, debe verificarse:

$$v^*_c=v^*_g=v^*_k=v^*_y$$

La razón por la que en este modelo se produce crecimiento endógeno es la siguiente: cuando los individuos deciden reducir una unidad de consumo para aumentar el capital, incrementan el ingreso nacional en la cantidad equivalente a la productividad marginal del capital. Los ingresos públicos adicionales se dedican a gasto público. De este modo, un aumento de *k* conlleva un aumento proporcional de *g*, por lo que *k* y *g* crecen al mismo ritmo. Es como si el *input* público fuera otro factor susceptible de ser acumulado. Dado que se está suponiendo la existencia de rendimientos constantes a escala en *k* y *g* conjuntamente, la función de producción presenta, en la práctica, las mismas características que una del tipo *AK*.

La ecuación [3.35] relaciona la tasa de crecimiento de la economía con el tipo impositivo, τ. Si τ=0, la productividad marginal del capital después de impuestos también vale cero por lo que la tasa de crecimiento de [3.35] es negativa: $v*_c = (1/\sigma)\{-\rho-\delta\}$. Esto se debe a que cuando τ=0, el Estado no puede proveer bienes. Cuando no existen bienes de provisión pública, el rendimiento de la inversión privada es cero. En el otro extremo, cuando τ=1, el Estado supliría una enorme cantidad de bienes, que harían que el capital privado fuese muy productivo. El problema está en que el rendimiento neto después de impuestos vuelve a ser negativo, puesto que el gobierno hace suya la totalidad de la producción a través del impuesto con tipo impositivo del 100%. En consecuencia, la tasa de crecimiento es también negativa. Se puede calcular el valor máximo de la tasa de crecimiento en función de τ, se encuentra en

$$\tau* = (1-\alpha)$$

Según esto, el Estado puede maximizar el crecimiento de la economía adoptando un tamaño igual al que resultaría en un equilibrio competitivo con factores de producción privados. Dicho de otro modo, la participación en la producción del factor provisto por el Estado debe ser igual a lo determinado por la tecnología, $1-\alpha$ (que es el exponente del factor de producción gasto público en la función de producción). La tasa de crecimiento que resulta en este caso es:

$$v*_c = (1/\sigma)\left\{\alpha A^{1/\alpha}\alpha(1-\alpha)^{(1-\alpha/\alpha)} - \rho - \delta\right\} \qquad [3.36]$$

2.5.2. La asignación Pareto-óptima

Para determinar si la solución de las familias productoras (la del equilibrio competitivo) es un óptimo de Pareto, resolvemos el problema del planificador y comparamos las soluciones. Para ello, se maximiza la utilidad teniendo en cuenta que la acumulación de capital se produce cuando existe ahorro después de detraer los recursos necesarios para dotar el gasto público. Hemos de enfatizar que la restricción del problema del planificador hace referencia a una restricción de recursos. Por lo tanto, en ningún caso existen impuestos o subvenciones (ambos son instrumentos de política en el problema de la familia productora). Así, el problema a resolver es:

$$\max_{c(t),g(t)} \int_0^{\infty} \left[\frac{c(t)^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}\right] e^{-(\rho-n)t}\,dt$$

$$s.a.\quad \dot{k}(t) = A[k(t)]^{\alpha}[g(t)]^{1-\alpha} - c(t) - (n+\delta)k(t) - g(t)$$

$$k(0) > 0$$

Las condiciones de primer orden se obtienen a partir del Hamiltoniano

$$H(t) = e^{-(\rho-n)t}\left[\frac{c(t)^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}\right]e^{-(\rho-n)t} + \mu(t)\left\{A[k(t)]^{\alpha}[g(t)]^{1-\alpha} - c(t) - (n+\delta)k(t)\right\}$$

donde μ(t) es el multiplicador dinámico de Lagrange.

Haciendo:

$$\frac{\partial H(t)}{\partial c(t)} = 0$$

$$\frac{\partial H(t)}{\partial g(t)} = 0$$

$$\frac{\partial H(t)}{\partial k(t)} = -\dot{\mu}(t)$$

$$\frac{\partial H(t)}{\partial \mu(t)} = \dot{k}(t)$$

Operando

$$e^{-(\rho-n)t} c(t)^{-\sigma} - \mu(t) = 0$$

$$(1-\alpha) A k(t)^{\alpha} g(t)^{-\alpha} = 1$$

$$\mu(t)\left\{\alpha A k(t)^{\alpha-1} g(t)^{1-\alpha} - (n+\delta)\right\} = -\dot{\mu}(t)$$

$$\dot{k}(t) = A k(t)^{\alpha} g(t)^{1-\alpha} - c(t) - (n+\delta) k(t) - g(t)$$

La interpretación de la segunda condición de máximo es que el producto marginal de la última unidad de producto destinada a gasto público iguala a la unidad. A partir de esta condición se puede obtener el gasto público *per cápita* óptimo.

$$g(t) = (1-\alpha)^{1/\alpha} A^{1/\alpha} k(t) \qquad [3.37]$$

La relación que guarda el gasto público con el *stock* de capital es constante y, de hecho, es igual a la que se obtiene cuando las familias-productoras toman la decisión de consumir y el Estado recauda impuestos (la demostración se deja para el lector). Este es un resultado relevante, ya que viene a decir que la proporción entre gasto público y capital privado resultante en el equilibrio competitivo es Pareto-óptimo. Pero aún no podemos concluir que el equilibrio sea Pareto-óptimo (de hecho no lo será), ya que aunque el ratio sea el eficiente, los niveles no tienen por qué serlo.

Para eliminar $\mu(t)$, como siempre, se deriva la primera condición de máximo respecto del tiempo y se sustituye en la tercera ecuación, llegando a que:

$$v_c^* = \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{\alpha A k(t)^{\alpha-1} g(t)^{1-\alpha} - \rho - \delta}{\sigma}$$

Sustituyendo la expresión de $g(t)$, el consumo *per cápita* crece en la senda de crecimiento constante a una tasa constante que viene dada por:

$$v_c^* = \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{\alpha A^{\frac{1}{\alpha}} (1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - \rho - \delta}{\sigma} \qquad [3.38]$$

El *stock* de capital *per cápita*, el gasto público *per cápita* y la producción *per cápita* crecen a esta misma tasa constante.

$$v_c^* = v_g^* = v_k^* = v_y^*$$

La tasa de crecimiento del consumo cuando en el óptimo de Pareto [3.38] es mayor que si la economía está descentralizada aunque el gobierno escoja la tasa impositiva que maximiza la tasa de crecimiento de la economía [3.36]. El motivo es que cuando el gobierno recauda impuestos reduce la tasa de rendimiento de la inversión y, en consecuencia, las economías domésticas ahorran menos. Al acumularse menos capital, el crecimiento es menor. Además, las familias no internalizan el hecho de que si acumulan más capital, el gobierno puede recaudar más impuestos, financiar más infraestructuras públicas, lo cual repercutiría positivamente en la productividad del capital privado. Al no internalizar este hecho, se acumula menos capital en el equilibrio competitivo, se recaudan menos impuestos y se generan menos infraestructuras. Notar que esto no es incompatible con el hecho de que el ratio *k(t)/g(t)* sea el Pareto-óptimo.

2.5.3. Un comentario sobre la elasticidad del gasto público

Se puede encontrar una amplia literatura que estudia la incidencia de las infraestructuras públicas sobre el crecimiento y el PIB per capita de la economía. Aunque existe cierta controversia acerca del tamaño de su impacto, sí existe consenso sobre que ciertos servicios públicos (como el gasto en infraestructuras públicas) afectan positivamente a la productividad de los factores productivos privados. Sin embargo, no hay consenso sobre que sean un motor definitivo de crecimiento.

Los trabajos pioneros de Aschauer (1989) y Munnell (1990) identificaron la existencia de un impacto muy significativo de las infraestructuras públicas sobre la renta per cápita y sobre el crecimiento. Estos resultados empíricos motivaron en parte el desarrollo de los modelos de crecimiento endógeno con infraestructuras públicas como el pionero de Barro (1990) y algunos posteriores como los de Futagami et al. (1993) o Glomm y Ravikumar (1994). En la mayoría de estos trabajos el gasto público se financia con impuestos proporcionales a la renta y el gobierno decide el ratio de gasto público sobre producción.

En el modelo de Barro, puesto que la participación del capital privado en la renta nacional, α, es 0,36, se desprende que la elasticidad asociada a los servicios públicos tendría que ser $1-\alpha$=0,64. Sin embargo, si observamos los datos de las economías más desarrolladas, el ratio inversión pública (que incluye los gastos en infraestructuras) sobre PIB se ha mantenido relativamente constante en los últimos años. Así, en torno al año 2000, este ratio representa algo menos del 4% en los países de la OCDE. Si es verdad el valor de 0,64 del modelo de Barro, el ratio inversión pública sobre PIB que maximizaría la tasa de crecimiento de la economía sería también 0,64, valor muy alejado del 4% existente.

Además, la elasticidad que se deriva del modelo de Barro está muy alejada de las estimadas en los trabajos empíricos comentados anteriormente, que ronda entre el 0,20 y el 0,35 en los casos más optimistas. Incluso, algunos trabajos posteriores apuntan a una elasticidad de 0,1 o incluso algo inferior. Nótese que, con rendimientos constantes a escala, este último valor implicaría que el α asociado a la función de producción debería ser igual a 0,9 (de modo que ambos sumen 1).

Todas estas inexactitudes han generado una reconsideración de estos modelos de crecimiento endógeno con infraestructuras públicas y el papel de las infraestructuras sobre el crecimiento. Para que tenga sentido incluir el gasto público en el modelo, la función de producción tendría que tener la siguiente forma:

$$Y(t) = K(t)^{\alpha} G(t)^{\beta} \left[A(t)L(t) \right]^{1-\alpha-\beta} \quad ; \quad 0<\alpha,\beta<1; \alpha+\beta<1 \ ,$$

donde *A(t)* sería, por ejemplo, proporcional al capital humano o sería un índice de conocimiento global de la economía como el del modelo de Romer explicado anteriormente. En este sentido, también se ha demostrado que en un modelo con distintos tipos de gasto público (no solo infraestructuras) que hay que financiar con el impuesto sobre la renta y con tasas de depreciación realistas (en torno a 0,05 o 0,10), el ratio inversión pública sobre PIB que maximiza el bienestar de la economía se sitúa en torno al 5%, muchísimo más próximo a lo observado en las economías reales.[10]

2.6 Las externalidades y el medioambiente en el modelo AK

Una externalidad es un factor que afecta (positiva o negativamente) a la utilidad de la familia (directa, o indirectamente a través de, por ejemplo, la función de producción), pero sobre el cual la familia no considera que tenga capacidad de influencia y, por tanto, no hace nada al respecto. En general, la existencia de una externalidad causa que la asignación en el equilibrio competitivo no sea Pareto-óptima. Precisamente, uno de los papeles del sector público es diseñar instrumentos de política que reduzcan el efecto de las externalidades en la economía y acerque la asignación de mercado a la Pareto óptima.

Un ejemplo de externalidad es el proceso de acumulación de conocimiento que discutimos en el modelo de Romer de ‘aprendizaje por la práctica’. En este caso es una externalidad positiva que la acumulación de capital ejerce sobre el conocimiento global de la economía. Otro ejemplo de externalidad positiva es el esfuerzo individual en el estudio. Un mayor nivel de estudio individual favorece el conocimiento global de la economía, el cual a su vez favorece la productividad de los factores y favorece a la utilidad individual. Pero cuando una persona individual decide el tiempo de estudio no tiene en cuenta este efecto.

El ejemplo más habitual de externalidad negativa es el efecto nocivo sobre el medioambiente de las emisiones, y los perjuicios que esto supone para la salud individual de las personas y, por tanto, para su utilidad.

La idea detrás de esta externalidad es la siguiente: al acumular capital físico para producir y poder consumir, se generan, como un subproducto del proceso productivo, emisiones que son perjudiciales para la salud individual. Pero este efecto nocivo sobre la salud no es considerado por las familias cuando toman sus decisiones de inversión-consumo. La razón es que, por un lado, el consumidor individual considera que la cantidad de emisiones que genera es muy pequeña y ésta contribuye muy poco a las emisiones globales (existen muchos individuos). Por otro lado, existe un problema de información asimétrica y riesgo moral: el consumidor individual no sabe cuánto están emitiendo los demás productores (por lo tanto, no saben si su esfuerzo de no emitir merece la pena) y, al mismo tiempo, consideran que si hacen el esfuerzo de acumular menos capital, el que asume el coste es el individuo mismo, mientras que el beneficiario serían todos.

[10] Véase Marrero (2008) para una discusión en detalle sobre estos resultados.

Presentamos a continuación una extensión del modelo *AK* en el que consideramos que las emisiones afectan de manera negativa a los individuos. La tecnología es *AK* y para simplificar suponemos que $n=\delta=0$.

La función de utilidad instantánea es logarítmica aditiva, dependiendo positivamente del consumo privado, *c*, y negativamente de las emisiones, θ, que se generan en la economía,

$$u[c(t),\theta(t)] = \ln c(t) - \phi \ln \theta(t), \qquad \phi \in (0,1)$$

Las emisiones son un subproducto del proceso productivo y, por tanto, se relacionan con la cantidad producida

$$\theta(t) = \varphi Y(t) = \varphi \cdot L \cdot y(t), \varphi \in (0,1)$$

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $L=1$ (normalizar la economía) por lo que las emisiones se pueden poner en términos per capita sin tener que arrastrar *L*, que no aporta.

$$\theta(t) = \varphi \cdot y(t), \varphi \in (0,1)$$

Comencemos por el problema de la familia-productiva:

$$\max_{c(t)} \quad \int_0^\infty [\ln c(t) - \phi \ln \theta(t)] e^{-\rho t}\, dt$$

$$s.a. \quad \dot{k}(t) = Ak(t) - c(t),$$

$$k(0) > 0$$

En este problema tenemos que la variable de control es el consumo, y la de estado el capital. Dado que estamos resolviendo el problema de la familia productora, esta no internaliza el efecto que su acumulación de capital ejerce sobre las emisiones. Por lo tanto, toma las emisiones como una variable exógena. Así, las condiciones de primer orden se obtienen a partir del Hamiltoniano

$$H(t) = [\ln c(t) - \phi \ln \theta(t)] e^{-\rho t} + \mu(t)\{Ak(t) - c(t)\}$$

donde $\mu(t)$ es el multiplicador dinámico de Lagrange. Las condiciones de optimalidad son (tomando $\theta(t)$ como dado, sin sustituir aún en la utilidad):

$$\frac{\partial H(t)}{\partial c(t)} = 0$$

$$\frac{\partial H(t)}{\partial k(t)} = -\dot{\mu}(t)$$

$$\frac{\partial H(t)}{\partial \mu(t)} = \dot{k}(t)$$

Operando de la manera habitual obtenemos, de manera muy fácil, la siguiente tasa de crecimiento de la economía en equilibrio competitivo:

$$v^* = A - \rho \qquad [3.39]$$

Usando esta condición en la restricción de recurso podemos obtener el ratio *k/c* en equilibrio competitivo:

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = A - \frac{c(t)}{k(t)} = v^* \Leftrightarrow \left(\frac{c(t)}{k(t)}\right)^* = \rho \qquad [3.40]$$

Resolvamos a continuación el problema del planificador. En este problema sí se internaliza la externalidad. Esto es, antes de obtener las condiciones de primer orden, se sustituye el valor de las externalidades en la función de utilidad. De este modo se considera no sólo el efecto positivo de la acumulación de capital, sino también el negativo a través de las emisiones.

La variable de control sigue siendo *c(t)* y la de estado *k(t).* La diferencia respecto al problema de la familia-productora es que en el del planificador se internaliza la externalidad.

$$\begin{aligned} &\max_{c(t)} \quad \int_0^\infty \left[\ln c(t) - \phi\left(\ln \varphi + \ln Ak(t)\right)\right] e^{-\rho t}\, dt \\ &s.a. \quad \dot{k}(t) = Ak(t) - c(t), \\ &\qquad\ \ k(0) > 0 \end{aligned} \qquad [3.41]$$

Las condiciones de primer orden se obtienen a partir del siguiente Hamiltoniano:

$$H(t) = \left[\ln c(t) - \phi\left(\ln \varphi + \ln Ak(t)\right)\right] e^{-\rho t} + \mu(t)\left\{Ak(t) - c(t)\right\}$$

$$\frac{\partial H(t)}{\partial c(t)} = 0 \Leftrightarrow e^{-\rho t} \frac{1}{c(t)} - \mu(t) = 0$$

$$\frac{\partial H(t)}{\partial k(t)} = -\dot{\mu}(t) \Leftrightarrow -e^{-\rho t}\phi \frac{1}{k(t)} + \mu(t)A = -\dot{\mu}(t)$$

$$\frac{\partial H(t)}{\partial \mu(t)} = \dot{k}(t) \Leftrightarrow \dot{k}(t) = Ak(t) - c(t)$$

El primer término de la segunda condición de optimalidad es la novedad respecto a la de la familia productora. Manipulando de la manera habitual las condiciones de optimalidad, obtenemos la siguiente condición de optimalidad intertemporal:

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} + \rho = A - \phi \frac{c(t)}{k(t)} \qquad [3.42]$$

El segundo término de la parte derecha de la ecuación refleja que el efecto negativo de la contaminación es tenido en cuenta por el planificador a la hora de obtener la condición de optimalidad intertemporal. Recordar que la parte derecha de esta condición refleja el beneficio marginal de acumular más capital. Este sería igual a *A* (su productividad marginal) si no consideramos su efecto negativo sobre las emisiones. Pero al considerar esto último, el beneficio marginal del capital es menor, dependiendo de la magnitud del parámetro ϕ, que muestra la desutilidad de las emisiones.

Para obtener la tasa de crecimiento del problema del planificador tenemos que calcular primero el ratio *c/k*. Para ello, dividimos por *k* la restricción del problema [3.41] y la combinamos con la condición [3.42] e imponemos que ambas variables crecen a la misma tasa en estado estacionario:

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = A - \phi\frac{c(t)}{k(t)} - \rho = v^{PO}$$
$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = A - \frac{c(t)}{k(t)} = v^{PO}$$

Cuya solución es:

$$\left(\frac{c(t)}{k(t)}\right)^{PO} = \frac{\rho}{1-\phi}$$
$$v^{PO} = A - \frac{\rho}{1-\phi} \qquad [3.43]$$

Nótese que el ratio *c/k* es mayor en el Pareto-óptimo que en el equilibrio competitivo. Esto se debe a que en el equilibrio competitivo se está sobreacumulando capital debido a la no internalización del efecto negativo del capital sobre las emisiones. Por su parte, esta sobreacumulación de capital conduce a que la tasa de crecimiento de la economía de mercado sea superior a la eficiente debido precisamente a este motivo.

Un mecanismo corrector sencillo de esta ineficiencia es establecer un impuesto sobre la acumulación de capital (o sobre la renta o sobre la inversión) y emplear la recaudación para financiar unas transferencias lump-sum. De este modo, se desincentiva la acumulación de capital hasta los niveles eficientes y no se genera un efecto renta negativo porque se devuelve la recaudación con una transferencia que no distorsiona la decisión de consumo intertemporal.

El problema de la familia-productora queda en este caso de la siguiente manera (supongamos un impuesto sobre la renta):

$$\max_{c(t)} \quad \int_0^{\infty}\left[\ln c(t) - \phi \ln \theta(t)\right] e^{-\rho t}\, dt$$
$$s.a. \quad \dot{k}(t) = Ak(t)(1-\tau) - c(t) + Tr(t),$$
$$k(0) > 0$$

La solución de este problema nos llevaría a las siguientes condiciones:

$$v^{*} = A(1-\tau) - \rho \qquad [3.44]$$

Igualando la tasa de crecimiento [3.44] con la obtenida en el Pareto óptimo [3.43], obtenemos que el tipo impositivo óptimo es:

$$\tau^{*} = \frac{\rho}{A}\left(\frac{\phi}{1-\phi}\right) > 0$$

3. Una introducción a los modelos de cambio tecnológico endógeno

Hasta ahora hemos estudiado modelos de crecimiento (exógenos o endógenos) pero en los que el origen del crecimiento no ha sido fruto de cambios tecnológico. Esto es, nuestro parámetro ‘A’ en la función de producción ha seguido siendo exógeno: o bien lo hemos supuesto constante (por ejemplo, como en el modelo AK), o hemos supuesto que seguía un proceso lineal exógeno de crecimiento (la extensión del modelo neoclásico básico), o bien hemos considerado que es un subproducto de un proceso de aprendizaje (el modelo de learning-by-doing). En los otros dos modelos que hemos visto, la fuente del crecimiento se debe a la complementariedad de diferentes factores productivos con el capital (las infraestructuras en el modelo de Barro y del capital humano en el de Romer o Lucas). En esta sección presentamos el modelo más básico de esta nueva familia de modelos en los que el progreso tecnológico es endógeno, y es consecuencia del proceso de innovación e investigación de las empresas. Estos modelos, además, nos permitirán entender la relación que existe entre el proceso de innovación y la estructura de los mercados, los poderes de monopolios o la propiedad intelectual de los inventos.

El elemento común de estos modelos en los que se hace endógeno el progreso tecnológico es la existencia de empresas dedicadas a la investigación y desarrollo (I+D). Uno de los enfoques utilizados para convertir la endogeneización de la tecnología en un problema tratable consiste en considerar que el progreso técnico toma la forma de un aumento en el número de bienes de capital disponibles como factores de producción. Por simplicidad, en el modelo que se plantea en este tema, serán bienes intermedios.

El supuesto fundamental de este tipo de modelos es que no existen rendimientos decrecientes en el número de bienes de capital, por lo que el modelo es capaz de generar crecimiento económico sostenido, ya que las empresas de I+D siempre desean descubrir nuevos productos. A continuación se presenta una versión simplificada de uno de estos modelos, el de **Romer** (1990).

El modelo de cambio tecnológico endógeno de Romer (1990)

En la economía existen tres tipos de agentes. En primer lugar, los productores del bien final, que utilizan en su actividad una tecnología que emplea trabajo y una serie de bienes intermedios que deben comprar a las empresas que los han inventado. En segundo lugar, se encuentran los propios inventores de los bienes intermedios, que invierten una cierta cantidad de recursos en I+D con la finalidad de crear nuevos productos y una vez que los han desarrollado, poseen una patente que les proporciona un monopolio perpetuo para su producción y venta. Por último, los consumidores eligen la cantidad que desean consumir y ahorrar para maximizar la función de utilidad habitual, sujeta a una restricción intertemporal. La riqueza de las familias se materializa en la propiedad de las patentes de los bienes que han desarrollado.

En este modelo existen los siguientes mercados: de trabajo, de bienes finales, de bienes intermedios y de activos financieros. En el mercado de trabajo existe una fuerza de trabajo que se supone constante (es decir, la población no crece) y se determina el salario. En el mercado de bienes finales se normaliza el precio a 1 y se determina la cantidad producida o, en este caso, la tasa de crecimiento de la producción. En los mercados de bienes intermedios se determina el precio del bien intermedio y la cantidad producida de cada uno de estos bienes. Por último, existe un mercado de activos financieros en el que se determina el tipo de interés real.

A continuación se plantea el comportamiento de cada uno de estos agentes y se obtiene el equilibrio del modelo.

3.1. Los productores del bien final

Producen el único bien de consumo, que se obtiene a partir de varios factores de producción entre los que no se incluye el capital físico. La función de producción tiene la siguiente forma:

$$Y(t) = A\left(\int_0^{N(t)} x_i(t)^{\alpha} di\right) L(t)^{1-\alpha} \qquad A > 0$$

siendo $\mathbf{x_i}$ los bienes intermedios, **A** es un parámetro tecnológico y **L** es el trabajo. En otras palabras, la producción se obtiene a partir de trabajo y de un conjunto **N(t)** de factores de producción $\mathbf{x_i}$. El progreso tecnológico se presenta bajo la forma de un aumento continuo del numero de bienes intermedios, **N(t)**.

El hecho de que la función de producción sea aditiva separable comporta que los nuevos bienes intermedios son diferentes a los anteriores, aunque no son ni mejores ni peores que éstos. En particular, los bienes antiguos nunca se quedan obsoletos. Un aspecto importante de la función de producción utilizada es que presenta rendimientos decrecientes respecto a cada uno de los bienes de capital, sin embargo presenta rendimientos constantes respecto a la cantidad total de estos bienes. Esto se puede apreciar suponiendo que, en cada momento del tiempo, la cantidad de dichos bienes fuese la misma $\mathbf{x=x_i}$ para todo **i** (como veremos, esto es lo que ocurrirá en el equilibrio). En este caso, la función de producción puede escribirse como:

$$Y = ANx^{\alpha}L^{1-\alpha} \qquad [3.45]$$

Para un valor de **N** dado, la ecuación anterior implica que la producción exhibe rendimientos constantes a escala respecto a **L** y **x**. Tomando como dados **L** y **x**, la producción presenta rendimientos constantes si tiene lugar un aumento en el número de bienes intermedios. Esta constancia en los rendimientos de **N** permite a la economía generar tasas de crecimiento positivas para siempre. Realmente, este modelo es un modelo del tipo AK, en el cual se evitan los rendimientos decrecientes de la cantidad de bien intermedio utilizada gracias al aumento en el número de bienes intermedios existentes.

Las empresas contratan trabajo en un mercado competitivo y compran cada uno de los bienes intermedios a un precio unitario p_i. La producción que obtienen la venden a un precio que, por normalización, se supone unitario. Su comportamiento se reduce a maximizar el valor presente de los flujos de caja que percibirán en el futuro, sin embargo, puesto que las empresas no poseen ningún tipo de bien acumulable, el comportamiento de las empresas puede reducirse a la maximización de sus beneficios en cada periodo del tiempo. Las empresas deben elegir óptimamente la cantidad de trabajo que utilizan y su demanda de cada uno de los bienes intermedios.

$$\max_{L, x_0(t), \ldots, x_{N(t)}(t)} Y(t) - \int_0^{N(t)} p_i(t) x_i(t) di - w(t)L$$

Las condiciones de primer orden implican la igualdad entre el producto marginal de cada bien intermedio y su precio en cada momento del tiempo.

$$A\alpha x_i(t)^{\alpha-1}L^{1-\alpha} = p_i(t)$$

A partir de la expresión anterior, se puede despejar la demanda de cada bien intermedio x_i en el momento t, que está negativamente relacionada con su precio unitario. La elasticidad de demanda viene dada por $-1/(1-\alpha)$.

$$x_i(t) = (A\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}} L p_i(t)^{-\frac{1}{1-\alpha}} \quad [3.46]$$

Derivando respecto a **L** se obtiene que la demanda de trabajo en cada momento **t** es

$$A\left(\int_0^{N(t)} x_i(t)^{\alpha} di\right)(1-\alpha)L^{-\alpha} = w(t)$$

o, escrita de otro modo,

$$(1-\alpha)Y(t)/L = w(t) \quad [3.47]$$

3.2. Las empresas de I+D (productores de bienes intermedios)

Para crear nuevos bienes intermedios, las empresas de I+D deben invertir recursos. Se supondrá que esta inversión consiste en una cantidad constante η, que se detrae de la producción, por cada bien que se desarrolla.

Una vez que el bien ha sido desarrollado, su producción se obtiene con un pequeño coste marginal constante, **CM**, y es vendido al precio $\mathbf{p_i(t)}$ a los productores de bienes finales.

Puesto que la sociedad les otorga un monopolio perpetuo sobre el bien que desarrollan, están en posición de cobrar un precio por encima del los costes marginales de producción del bien intermedio, que hace posible que recuperen las inversiones iniciales en I+D. En consecuencia, las empresas deben elegir tanto el precio de venta como la cantidad producida con vistas a maximizar sus beneficios.

El inventor se enfrenta a dos decisiones importantes. La primera decisión es si le interesa o no inventar un nuevo producto. Para ello deberá comparar los costes de I+D con los beneficios que obtendrá una vez que el producto esté inventado. La segunda decisión consiste en decidir el precio de venta del nuevo producto.

Para poder tomar la primera decisión, el inventor debe estimar el precio al que podrá vender el bien intermedio una vez que haya sido inventado, por lo que no puede tomar la decisión de inventar sin haber adoptado la segunda. Por eso, solucionaremos primero el segundo paso.

¿A qué precio venden las empresas los bienes intermedios?

El productor del bien intermedio **i** maximizará en cada momento **s**, su flujo de beneficios futuros descontado, donde $\pi_i(t)$ es el beneficio instantáneo que proporciona la venta del factor productivo i-ésimo.

$$\max_{p_i(t)} \int_s^{\infty} e^{-r(t-s)} \pi_i(t)\,dt = \int_s^{\infty} e^{-r(t-s)} \left[p_i(t) - CM\right] x_i(t)\; dt$$

Teniendo en cuenta la demanda de bienes intermedios obtenida [3.46] y suponiendo que el coste marginal **CM** es igual a uno, el problema de la empresa que hacen I+D es:

$$\max_{p_i(t)} \int_s^{\infty} e^{-r(t-s)} \left[p_i(t) - 1\right] (A\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}} L p_i(t)^{-\frac{1}{1-\alpha}} dt$$

Puesto que este problema no plantea restricciones dinámicas, la solución de este problema se obtiene derivando el integrando respecto al precio del bien intermedio e igualando a cero. Además, simplificando, se llega a la siguiente condición de primer orden:

$$p_i(t)^{-\frac{1}{1-\alpha}} + \left(-\frac{1}{1-\alpha}\right)\left[p_i(t) - 1\right] p_i(t)^{-\frac{1}{1-\alpha}-1} = 0$$

$$p_i(t) = \frac{1}{\alpha} > 1 \qquad [3.48]$$

La expresión anterior indica que el precio de venta del bien intermedio **i** es mayor que el coste marginal de producción (CM=1). Esto significa que el productor monopolista fija un margen constante sobre el coste marginal (*mark up*) que es mayor cuanto menor sea en valor absoluto la elasticidad de la demanda (esto es cuanto más inelástica es la demanda a la que se enfrenta). Es este margen el que permite que las empresas recuperen los gastos de I+D necesarios para desarrollar los nuevos productos. Además, el precio de venta es igual en todo momento del tiempo y para todos los bienes intermedios.

Sustituyendo el precio de venta [3.48] en la demanda de bienes intermedios[3.46], se obtiene que la cantidad efectivamente vendida de cada bien intermedio es:

$$x_i(t) = (A\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}} L (1/\alpha)^{-\frac{1}{1-\alpha}} = A^{\frac{1}{1-\alpha}} L \alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} \qquad [3.49]$$

La expresión [3.49] indica que la cantidad vendida de cada uno de los factores de producción existente en un momento **t** es la misma y, además, no cambia en el tiempo.

Sustituyendo la demanda de bienes intermedios en la función de producción [3.45] se obtiene que la producción de la economía en cada momento del tiempo es:

$$Y(t) = A^{\frac{1}{1-\alpha}} N(t) L \alpha^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}} \qquad [3.50]$$

Nótese que la producción crece linealmente con el número de factores intermedios existentes.

La decisión de desarrollar un nuevo bien intermedio

El beneficio instantáneo que obtiene cualquiera de los productores del bien intermedio i proviene del margen que obtiene por cada unidad vendida en cada momento del tiempo:

$$\pi_i(t) = \left[p_i(t) - CM\right] x_i(t) = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) A^{\frac{1}{1-\alpha}} L \alpha^{\frac{2}{1-\alpha}} = \pi \qquad i = 1,\ldots,N(t) \qquad [3.51]$$

Los beneficios que proporciona cada bien intermedio son idénticos y constantes en el tiempo. El valor presente descontado de estos beneficios es:

$$\int_s^\infty e^{-r(t-s)}\pi\, dt = \frac{\pi}{r}$$

Esto quiere decir que una vez inventado un nuevo producto, éste va a generar en valor presente **π/r**, que es lo que estarán dispuestas a pagar las empresas por desarrollar un nuevo bien intermedio. Por ello, la invención del nuevo producto se producirá justo en el momento en que el valor presente de los beneficios del monopolista iguale al coste de innovar (η), es decir,

$$\eta = \frac{\pi}{r}$$

Puesto que η y **π** son constantes, esta igualdad se consigue porque el tipo de interés se ajusta para lograrlo[11].

3.3. Los consumidores

Para cerrar el modelo falta considerar el comportamiento de los consumidores. Estos tienen acceso a un mercado de activos financieros en el que su riqueza es remunerada a un tipo de interés **r**. Por otra parte, reciben ingresos del trabajo y de los activos de los que son propietarios. Deben elegir entre consumir y ahorrar para maximizar la función de utilidad habitual. En suma, el problema del consumidor es:

$$\max_{c(t)} \int_0^\infty \left[\frac{c(t)^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}\right] e^{-\rho t} dt$$

$$\text{s.a. } \dot{b}(t) = w(t) - c(t) + r(t)b(t)$$

$$b(0) > 0$$

Con lo que el Hamiltoniano es

$$H(t) = e^{-\rho t}\left[\frac{c(t)^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}\right] + \mu(t)\left[w(t) - c(t) + r(t)b(t)\right]$$

La solución del problema viene dado por las condiciones de primer orden junto a la condición de transversalidad:

$$\lim_{t\to\infty} b(t)\mu(t) = 0$$

[11] Por ejemplo, si el coste de inventar (η) es inferior al beneficio (**π/r**), un gran número de investigadores potenciales van a pedir prestado. Esta gran cantidad de préstamos hará subir los tipos de interés hasta que la igualdad se restablezca.

Operando con las condiciones de primer orden

$$e^{-\rho t}u'[c(t)] - \mu(t) = 0$$

$$\mu(t)r(t) = -\dot{\mu}(t) \qquad [3.52]$$

$$\dot{b}(t) = w(t) - c(t) + r(t)b(t)$$

Para eliminar **μ(t)** se deriva la primera ecuación respecto del tiempo y se sustituye en la segunda ecuación obteniéndose

$$\sigma\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = r(t) - \theta \qquad [3.53]$$

3.4. Equilibrio y tasa de crecimiento de la economía

Sustituyendo en [3.53] la expresión del tipo de interés **r=π/η**, y teniendo en cuenta[3.51], se obtiene la tasa de crecimiento del consumo. Nótese que al ser la población constante es indiferente plantear el modelo en términos absolutos o en términos *per cápita*.

$$\boxed{\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\sigma}\left(\frac{1}{\eta}\frac{1-\alpha}{\alpha}A^{\frac{1}{1-\alpha}}\alpha^{\frac{2}{1-\alpha}}L - \rho\right)} \qquad [3.54]$$

La tasa de crecimiento del consumo es constante, ya que sólo depende de parámetros constantes. El crecimiento del consumo está inversamente relacionado con el coste de las actividades de I+D (η). La tasa de crecimiento depende de forma positiva del tamaño de la población de la economía (**L**), es decir, este modelo presenta efecto de escala. El motivo es que la tecnología es un bien no-rival: el coste de desarrollar un nuevo bien intermedio es independiente del número de personas que lo utilice. De este modo, como la proporción de los recursos destinada a investigación permanece constante, todo incremento de la población conlleva un aumento del ritmo de avance tecnológico[12]. La tasa de crecimiento también depende del margen entre el precio y el coste marginal **((1-α)/α)** y de la cantidad de bien intermedio que la empresas utilicen. Finalmente, también ρ y σ inciden.

En la senda de crecimiento constante, la tasa de crecimiento del número de bienes intermedios disponibles debe coincidir con la tasa de crecimiento del consumo. Para llegar a esta conclusión, tenemos en cuenta que el equilibrio en el mercado de activos financieros requiere que los activos totales de los consumidores (**Lb**) coincida con la oferta de activos financieros de la economía. En este modelo, los únicos activos que existen son las patentes, cada una de las cuales tiene un valor η. De esa forma, $Lb(t) = \eta N(t)$ y, además, se verifica que $L\dot{b}(t) = \eta\dot{N}(t)$.

[12] La evidencia empírica rechaza la existencia de efectos de escala. Por eso, en los últimos años han surgido modelos en los que el crecimiento se debe a la existencia de actividades de I+D que evitan la aparición de efectos de escala. Por ejemplo: Jones (1995), Young (1998), Segerstrom (1998).

La restricción intertemporal del problema de los consumidoresse puede escribir:

$$\frac{\eta\dot{N}(t)}{L}=\frac{(1-\alpha)Y(t)}{L}+\frac{r\eta N(t)}{L}-c(t)$$

$$\eta\dot{N}(t)=(1-\alpha)Y(t)+\pi N(t)-C(t)=\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)N(t)\,x+(1-\alpha)Y(t)-C(t)=$$

$$=Y(t)-N(t)x+\left(\frac{N(t)x}{\alpha}-\alpha Y(t)\right)-C(t)=$$

$$=Y(t)-N(t)x-C(t)+\frac{N(t)A^{\frac{1}{1-\alpha}}L\alpha^{\frac{2}{1-\alpha}}}{\alpha}-\alpha A^{\frac{1}{1-\alpha}}N(t)L\alpha^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}=$$

$$=Y(t)-N(t)x-C(t)$$

La producción total de la economía tiene tres destinos: el consumo, la producción de una cantidad **x** de cada uno de los **N(t)** bienes intermedios y la invención de nuevos factores de producción. Puesto que la producción de la economía es proporcional a **N(t)**, la tasa de crecimiento de **N(t)** es constante siempre que la ratio C(t)/N(t) sea constante. Para ello, es necesario que el número de factores de producción disponibles crezca a la misma tasa que el consumo (dado que la población es constante, las tasas de crecimiento del consumo agregado y del consumo per cápita son iguales).

Derivando la expresión de la función de producción respecto al tiempo, se obtiene que la tasa de crecimiento de la producción coincide con la tasa de crecimiento del número de bienes intermedios y, por tanto, con la tasa de crecimiento del consumo. De hecho, el crecimiento de la producción se debe al aumento de **N**.

$$\frac{\dot{Y}(t)}{Y(t)}=\frac{\dot{N}(t)}{N(t)}=\frac{\dot{C}(t)}{C(t)}=\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}$$

3.5. Óptimo de Pareto

Para determinar si la solución de mercado es eficiente, se obtendrá la tasa a la que crece la economía en el Óptimo de Pareto. Para ello, se maximiza la utilidad de la sociedad teniendo en cuenta que la aparición de nuevos bienes intermedios requiere :

$$\max_{c(t)\;x(t)}\int_0^{\infty}\left[\frac{c(t)^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}\right]e^{-\rho t}\,dt$$

$$s.a.\quad \dot{N}(t)=\frac{1}{\eta}\left[AN(t)x(t)^{\alpha}L^{1-\alpha}-Lc(t)-x(t)N(t)\right]$$

$$N(0)>0$$

Las condiciones de primer orden se obtienen a partir del Hamiltoniano:

$$H(t)=e^{-\rho t}\left[\frac{c(t)^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}\right]+\mu(t)\left\{\frac{1}{\eta}\left[AN(t)x(t)^{\alpha}L^{1-\alpha}-Lc(t)-x(t)N(t)\right]\right\}$$

$$\frac{\partial H(t)}{\partial c(t)} = 0$$

$$\frac{\partial H(t)}{\partial x(t)} = 0$$

$$\frac{\partial H(t)}{\partial N(t)} = -\mu(t)$$

$$\frac{\partial H(t)}{\partial \mu(t)} = \dot{N}(t)$$

a las que hay que añadir la condición de transversalidad. Tomando las correspondientes derivadas:

$$e^{-\rho t}c(t)^{-\sigma} - \frac{\mu(t)}{\eta}L = 0$$

$$\frac{\mu(t)}{\eta}\left[A\alpha N(t)x(t)^{\alpha-1}L^{1-\alpha} - N(t)\right] = 0$$

$$\frac{\mu(t)}{\eta}\left\{Ax(t)^{\alpha-1}L^{1-\alpha} - x(t)\right\} = -\mu(t)$$

$$\dot{N}(t) = \frac{1}{\eta}\left[AN(t)x(t)^{\alpha}L^{1-\alpha} - Lc(t) - x(t)N(t)\right]$$

De la segunda condición de primer orden se puede despejar la cantidad producida de cada uno de los bienes intermedios en cada instante del tiempo:

$$x = (A\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}}L$$

La cantidad **x** es superior a la que producen las empresas de I+D. Esto se debe a que los productores de bien intermedio disfrutan de una patente que les convierte en monopolistas. En consecuencia, fijan un precio para el bien intermedio que queda por encima de su coste marginal de producción y la cantidad demandada por parte de las empresas productoras del bien final es demasiado reducida respecto a la que sería óptima.

Para eliminar **μ(t),** como es habitual, se deriva la primera condición de primer orden respecto del tiempo y se sustituye en la tercera ecuación obteniéndose:

$$\sigma\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} + \rho = \frac{Ax^{\alpha}L^{1-\alpha} - x}{\eta} \qquad [3.55]$$

Esta expresión se interpreta, como es habitual, diciendo que la elección del consumo en cada momento del tiempo será aquella que haga que los beneficios marginales de consumir igualen los beneficios que reporta la última unidad de renta dedicada a ahorrar. En este caso, el beneficio de ahorrar coincide con el aumento en la producción de la economía que se produce por el hecho de inventar un nuevo bien intermedio (el ahorro se dedica sólo a investigar) neto de la cantidad de recursos x que hay que dedicar en cada momento del tiempo para producir el factor productivo. Por eso, en la parte derecha de la expresión anterior aparece el beneficio neto de inventar un nuevo bien intermedio (que es constante) en relación a las η unidades de producción que hay que destinar a investigación.

Sustituyendo la cantidad **x** que produce la sociedad de cada factor productivo,

$$v_c(t) = \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{\frac{1}{\eta}\left[A^{\frac{1}{1-\alpha}} L\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}\right] - \rho}{\sigma} \qquad [3.56]$$

La tasa de crecimiento es mayor que la que se obtenía en una economía de mercado. Por tanto, la economía de mercado crece a una tasa inferior a la óptima. El motivo es nuevamente que el poder de mercado de los productores de bien intermedio conduce a que se produzca una cantidad de bien intermedio inferior a la óptima. Esto genera que la tasa de rendimiento de la economía **r(t)** sea menor que la óptima y, por tanto, la inversión realizada en la economía y la tasa de crecimiento resultan menores que las óptimas.

Apéndice: el modelo de acumulación de capital humano de Uzawa-Lucas

Uzawa (1965) y **Lucas** (1988) plantean un modelo de crecimiento endógeno que incluye el capital humano. En su modelo, el capital físico y el capital humano se producen con tecnologías diferentes. De este modo, se trata de un modelo de dos sectores: en el primero se produce capital físico y en el segundo capital humano.

La función de producción viene dada por

$$Y(t) = A[K_Y(t)]^{\alpha}[H_Y(t)]^{1-\alpha}$$

donde $K_Y(t)$ e $H_Y(t)$ son las cantidades de capital físico y humano utilizadas en la producción de bien final.

Puesto que el capital físico que se acumula es aquel que no se consume ni se destina a hacer frente a la depreciación del capital físico la evolución del *stock* de capital físico viene dada por:

$$\dot{K}(t) = A[K_Y(t)]^{\alpha}[H_Y(t)]^{1-\alpha} - C(t) - \delta K(t)$$

En el otro sector, la producción y la acumulación de capital humano se hace a partir de capital físico y humano. Se considera, además, que la tecnología para la obtención de capital humano es diferente de la que se emplea para la producción de bienes. En este caso, el capital humano se genera mediante la dedicación de capital físico y humano. Además, se produce depreciación del capital humano.

$$\dot{H}(t) = B[K_H(t)]^{\phi}[H_H(t)]^{1-\phi} - \delta_H H(t) \qquad B > 0 \qquad \delta_H > 0$$

El capital humano total, *H*, se destina sólo a producir capital físico o humano. Por eso, se puede definir:

$H_Y(t) = u(t)H(t)$ y $H_H(t) = [1-u(t)]H(t)$

La producción de educación requiere relativamente más capital humano que la de capital físico, por eso $(1-\phi) > (1-\alpha)$. De hecho, Uzawa y Lucas llevan esta condición al extremo al suponer que la producción de capital humano sólo utiliza como factor productivo capital humano. De esa forma, la función de producción de capital humano es lineal en H_H.

La acumulación de capital físico y humano viene expresada por las dos siguientes ecuaciones:

$$\dot{K}(t) = A[K(t)]^{\alpha}[u(t)H(t)]^{1-\alpha} - C(t) - \delta K(t)$$

$$\dot{H}(t) = B[1-u(t)]H(t) - \delta_H H(t)$$

que en términos *per cápita* son:

$$\dot{k}(t) = A[k(t)]^{\alpha}[u(t)h(t)]^{1-\alpha} - c(t) - (\delta+n)k(t)$$

$$\dot{h}(t) = B[1-u(t)]h(t) - (\delta_H + n)h(t)$$

El problema es similar al planteado en los apartados anteriores, aunque en este caso las familias productoras deben escoger tanto la trayectoria del consumo como la parte del capital humano que destinan en cada momento del tiempo a producir cada uno de los tipos de capital.

$$\max_{c(t),u(t)} \int_0^{\infty} \left[\frac{c(t)^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}\right] e^{-(\rho-n)t}\, dt$$

$$\begin{aligned} s.a. \quad & \dot{k}(t) = A[k(t)]^{\alpha}[u(t)h(t)]^{1-\alpha} - c(t) - (\delta+n)k(t) \\ & \dot{h}(t) = B[1-u(t)]h(t) - (\delta_H + n)h(t) \\ & k(0) > 0 \qquad h(0) > 0 \end{aligned}$$

Se trata, por tanto, de un problema con dos trayectorias de control y dos restricciones dinámicas. El hamiltoniano de este problema debe incluir dos precios implícitos, μ(t) y λ(t):

$$H(t) = e^{-(\alpha-n)t}\left[\frac{c(t)^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}\right] e^{-(\rho-n)t} + \mu(t)\left\{A[k(t)]^{\alpha}[u(t)h(t)]^{1-\alpha} - c(t) - (\delta+n)k(t)\right\} +$$

$$+\lambda(t)\{B[1-u(t)]h(t) - (\delta_H + n)h(t)\}$$

Las condiciones de primer orden vienen dadas por:

$$\frac{\partial H(t)}{\partial c(t)} = 0 \qquad \frac{\partial H(t)}{\partial u(t)} = 0$$

$$\frac{\partial H(t)}{\partial k(t)} = -\mu(t) \qquad \frac{\partial H(t)}{\partial h(t)} = -\lambda(t)$$

$$\frac{\partial H(t)}{\partial \mu(t)} = \dot{k}(t) \qquad \frac{\partial H(t)}{\partial \mu(t)} = \dot{h}(t)$$

Las condiciones de transversalidad son:

$$\lim_{t\to\infty} k(t)\mu(t) = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} h(t)\lambda(t) = 0$$

Operando:

$$e^{-(\rho-n)t}c(t)^{-\sigma} - \mu(t) = 0$$

$$\mu(t)\left\{A[k(t)]^{\alpha}(1-\alpha)[u(t)]^{-\alpha}[h(t)]^{1-\alpha}\right\}-\lambda(t)Bh(t)=0$$

$$\mu(t)\left\{\beta A[k(t)]^{\alpha-1}[u(t)h(t)]^{1-\alpha}-(n+\delta)\right\}=-\dot{\mu}(t)$$

$$\mu(t)\left\{A[k(t)]^{\alpha}[u(t)]^{1-\alpha}(1-\alpha)[h(t)]^{-\alpha}\right\}+\lambda(t)\left\{B(1-u(t))-(\delta_H+n)\right\}=-\dot{\lambda}(t)$$

$$\dot{k}(t)=A[k(t)]^{\alpha}[u(t)h(t)]^{1-\alpha}-c(t)-(\delta+n)k(t)$$

$$\dot{h}(t)=B(1-u(t))h(t)-(\delta_H+n)h(t)$$

Derivando la primera condición de primer orden respecto al tiempo, sustituyendo en la tercera ecuación y ordenando se obtiene:

$$\sigma\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}+\theta=\alpha Ak(t)^{\alpha-1}[u(t)h(t)]^{1-\alpha}-\delta$$

o, expresado de otra forma,

$$v_c(t)=\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}=\frac{\alpha Ak(t)^{\alpha-1}[u(t)h(t)]^{1-\alpha}-\delta-\rho}{\sigma} \qquad [3.1.]$$

Este resultado, como es habitual, indica que la tasa de crecimiento del consumo depende del producto marginal del capital físico. A diferencia de modelos anteriores, el producto marginal del capital físico no sólo depende del *stock* de capital físico, sino que el capital humano que se destina a producir más capital humano también influye, lo que complica la solución del problema.

Para evitar la complejidad algebraica de operar con las condiciones de primer orden por el procedimiento habitual, siguiendo a **Lucas** (1988), se determinará el comportamiento del modelo en la senda de crecimiento constante, donde todas las variables deben crecer a una tasa constante.

El punto de partida es aprovechar que la tasa de crecimiento de u debe ser nula en la senda de crecimiento constante, ya que u está comprendida entre 0 y 1. Esta información permite escribir la ecuación [3.1.] como sigue:

$$v^*_c=\frac{\alpha A[k(t)]^{\alpha-1}[u^*h(t)]^{1-\alpha}-\delta-\rho}{\sigma}$$

o, lo que es lo mismo, agrupando todas las constantes a la izquierda:

$$\frac{\sigma v^*_c+\delta+\rho}{aA[u^*]^{1-\alpha}}=[k(t)]^{\alpha-1}[h(t)]^{1-\alpha}$$

Para que la parte derecha permanezca constante, esto es, para que la ratio k/h sea constante es necesario que en la senda de crecimiento constante el capital humano y el capital físico crezcan a una misma tasa, que además, debe ser constante.

$$v^*_k=v^*_h$$

A partir de la ecuación de transición del capital físico, dividiendo por k(t) ambos lados de la igualdad:

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = v_k = A\left[\frac{k(t)}{h(t)}\right]^{\alpha-1}\left[u(t)\right]^{1-\alpha} - \frac{c(t)}{k(t)} - (\delta + n)$$

En la senda de crecimiento constante, para que la tasa de variación del capital físico sea constante, es necesario que la ratio c/k se mantenga constante, ya que la ratio k/h debe ser constante en la senda de crecimiento constante:

$$v*_k = A\left[\left(\frac{k(t)}{h(t)}\right)^*\right]^{\alpha-1}\left[u*\right]^{1-\alpha} - \frac{c(t)}{k(t)} - (\delta + n)$$

Se hace, por tanto, necesario que $v*_c = v*_k = v*_h$

A partir de la expresión de la función de producción en términos *per cápita*:

$$y(t) = A\left[k(t)\right]^{\alpha}\left[u(t)h(t)\right]^{1-\alpha}$$

tomando logaritmos y derivando respecto al tiempo

$$v_y = \alpha v_k + (1-\alpha)(v_u + v_h)$$

y sustituyendo las tasas de crecimiento de *u*, *k* y *h* en la senda de crecimiento constante, se obtiene que la producción crece también a la misma tasa:

$$v*_y = v*_c = v*_k = v*_h = v*$$

Sólo falta determinar esa tasa **v*** a la que crecen todas las variables de la economía. Para ello, se multiplica ambos lados de la segunda ecuación de primer orden por **u** y se reescribe:

$$\mu(t)\left\{A\left[\frac{k(t)}{h(t)}\right]^{\alpha}(1-\alpha)\left[u*\right]^{1-\alpha}\right\} = \lambda(t)Bu* \tag{1}$$

En la expresión anterior, todos los térmimos son constantes excepto los dos precios implícitos. Por tanto, es necesario que la ratio μ/λ sea constante, lo que se consigue si ambos multiplicadores dinámicos evolucionan a la misma tasa en la senda de crecimiento constante:

$$v*_\mu = v*_\lambda$$

Finalmente, sustituyendo la ecuación (1) en la cuarta ecuación de primer orden del problema de las familias productoras se obtiene:

$$\lambda(t)Bu* + \lambda(t)\left\{B(1-u*) - (\delta_H + n)\right\} = -\lambda(t)$$

Reordenando,

$$v_\lambda* = -(B - \delta_H - n)$$

A partir de la derivada respecto al tiempo de la condición de primer orden se obtiene:

$$v*_y = v*_c = v*_k = v*_h = v* = \frac{B - \delta_H - \rho}{\sigma}$$

La tasa de crecimiento en la senda de crecimiento constante es similar a la obtenida en el modelo AK, pero en lugar de depender de la productividad del sector de bienes finales (**A**), lo hace de **B**, la productividad del sector educativo. La razón es que al suponer que el sector educativo no utiliza capital físico la función de producción de educación es lineal en capital humano, por lo que no exhibe rendimientos decrecientes en la utilización de $\mathbf{H_H}$.

La explicación es que al destinarse más capital humano a educación se consigue un crecimiento constante de la cantidad de capital humano disponible. Al combinar *stocks* de capital físico y humano que crecen al mismo ritmo se logra el crecimiento permanente.

El resultado depende del supuesto de que el sector educativo no emplea capital físico. En un modelo más general en el que ambos sectores utilizan ambos tipos de capital, las productividades de los dos sectores afectan a la tasa de crecimiento en la senda de crecimiento constante. La importancia de los dos parámetros de productividad depende de las participaciones de los dos tipos de capital (α y ϕ) en la producción[13].

La fracción del capital humano que se dedica a producir bienes se puede determinar dividiendo la restricción del capital humano por h y despejando. Se obtiene:

$$u^* = 1 - \frac{v_c * + \delta_H + n}{B}$$

Debemos imponer que 0<u*<1 y que v*>0

Además, para evitar que la utilidad pueda ser infinita, debe verificarse que:

$$\rho - n > (1-\sigma) v_c *$$

En este modelo, no existen diferencias entre el problema de optimización que hacen las familias productoras y el del óptimo de Pareto. Por ello, la solución de las familias productoras es un óptimo de Pareto.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS Y BIBLIOGRAFÍA

Arrow, K.J. (1962): “The economic implications of learning by doing”, *Review of Economic Studies*, vol. 29, junio, pp. 155-173.

Barro, R. (1990): “Government spending in a simple model of endogenous growth”, *Journal of Political Economy*, vol. 98, nº 5, pp. 103-125.

De La Fuente, A. (1992): “Historie d'A: crecimiento y progreso técnico”, *Investigaciones Económicas*, vol. 16, nº 3, pp.331-391.

Dolado, J.; González-Páramo, J. y Roldán, J. (1994): “Convergencia económica entre las provincias españolas: evidencia empírica (1955-1989)”, *Moneda y Crédito*, nº 198, pp. 81-119.

Jones, C.I. (1998): “R&D models of economic growth”, *Journal of Political Economy*, vol. 103, nº 4, pp. 759-784.

Lucas, R. (1988): “On the mechanics of economic development”, *Journal of Monetary Economics*, vol. 22, nº1, pp. 3-42.

[13] Véase Mulligan y Sala-i-Martin (1993).

Marrero, Gustavo A. (2008). “Revisiting The Optimal Stationary Public Investment Policy In Endogenous Growth Economies,” *Macroeconomic Dynamics*, vol. 12(02), 172-194.

Mulligan, C.B. y Sala i Martin, X. (1993): “Transitional dynamics in two sectors models on endogenous growth”, *Quarterly Journal of Economics*, vol. 108, nº3, pp. 737-773.

Rebelo, S. (1991): “Long-run policy analysis and long-run growth”, *Journal of Political Economy*, vol. 99, nº 3, pp. 500-521.

Romer, P.M. (1986): “Increasing returns and long-run growth”, Journal of Political Economy, vol. 94, nº 5, pp. 1002-1037.

Romer, P.M. (1990): “Endogenous technological change”, *Journal of Political Economy*, vol. 98, nº 5, pp. S71-S102.

Sala-i-Martin, X. (2000): *Apuntes de crecimiento económico*, segunda edición, Antoni Bosch, Barcelona.

Segerstrom, P.S. “Endogenous growth without scale effects”, *American Economic Review*, vol. 88, nº5, pp. 1290-1310.

Sheshinski, E. (1967): “Optimal accumulation with learning by doing”, en Shell, K. (ed.), *Essays on the theory of optimal economic growth*, MIT Press, Cambridge, pp. 31-52.

Uzawa, H. (1965): “Optimal technical change in an aggregative model of economic growth, *International Economic Review*, vol. 6, nº1, pp. 18-31.

Young, A. (1998): “Growth without scale effects”, *Journal of Political Economy*, vol. 106, nº 11, pp. 41-63.

