Macroeconomía III (Grado en Economía)

Universidad de La Laguna

Tema 6. Ciclos económicos reales

Juan Acosta Ballesteros

Carlos Bethencourt Marrero

Gustavo A. Marrero Díaz

Fernando Perera Tallo

Departamento de Análisis Económico

Universidad de La Laguna

TEMA 6.
CICLOS ECONÓMICOS REALES

1. Introducción

La teoría de los ciclos económicos reales surge de la escuela neoclásica en los años 80. El programa de investigación asociado a esta segunda fase de la teoría de los ciclos de equilibrio fue iniciada por Kydland y Prescott (1982) y Long y Plosser (1983). En contraste con los modelos neoclásicos anteriores, los proponentes de la teoría de los ciclos reales rechazan la visión de que son los shocks monetarios no anticipados los que generan las fluctuaciones en la producción y en el empleo. En su lugar, consideran que están causados por shocks reales persistentes (o por el lado de la oferta) y no monetarios (o por el lado de la demanda). Estos shocks reales, los cuales consisten en grandes fluctuaciones aleatorias de la tasa de progreso técnico, generan que la función de producción se desplace. Los agentes económicos racionales responden óptimamente a las fluctuaciones resultantes en los precios relativos modificando su oferta de trabajo y su consumo. De ese modo, las fluctuaciones en la producción y en el empleo son respuestas eficientes en el sentido de Pareto a shocks tecnológicos reales que afectan a la función de producción. Por ello, las políticas anticíclicas podrían crear distorsiones que alejasen a la economía del óptimo.

En el desarrollo de la teoría del ciclo real concurren varias fuerzas. De un lado, la continuación de la línea de investigación del ciclo de equilibrio iniciada por Lucas (1972 y 1973), pero ahora basada sobre perturbaciones reales. De otro lado, el desarrollo en los años setenta y ochenta del análisis de las perturbaciones de oferta (como consecuencia de las crisis del petróleo) como posibles causas de las fluctuaciones cíclicas. Finalmente, estos modelos se benefician también de la atención prestada en la década anterior a los mecanismos de persistencia en los ciclos, ya que el carácter no correlacionado de las perturbaciones monetarias bajo expectativas racionales, hizo necesario analizar los mecanismos de persistencia del ciclo basados en factores reales, que luego alcanzaron peso específico propio.

La nueva teoría es interesante, primero, como explicación del ciclo; segundo, como referencia tanto para los estudios del proceso de sustitución intertemporal, como, sobre todo, para los modelos dinámicos de equilibrio y, tercero, como enlace con la teoría del crecimiento.

Si las fluctuaciones económicas pueden ser comprendidas con un modelo walrasiano (es decir, uno en el que no existan externalidades, información asimétrica o imperfecciones en el funcionamiento de los mercados), su análisis no requiere ninguna desviación respecto del análisis microeconómico convencional. El modelo de Ramsey (1928) constituye un modelo walrasiano básico de funcionamiento de una economía agregada. Este tema se dedica a plantear una variante del modelo de Ramsey para incorporar las fluctuaciones agregadas. Para esto se hace necesario modificar dos aspectos del mismo. Primero, se debe introducir una fuente de distorsiones, que en este caso consistirán en cambios en la tecnología. Segundo, se debe permitir que el modelo explique variaciones en el nivel de empleo. Mientras que en los modelos de crecimiento la oferta de trabajo ha sido considerada exógena y creciente a una tasa constante, la teoría de los ciclos económicos reales se centra en la cuestión de si un modelo walrasiano proporciona una buena descripción de las principales características observadas durante las fluctuaciones. Los modelos de este tipo permiten que el nivel de empleo cambie, ya que la utilidad de las familias no sólo depende de su consumo sino también de cuánto trabajan (o de cuánto ocio disfrutan).

2. Un modelo de ciclo económico real

El modelo que se va a plantear es una variante del modelo de Ramsey descrito en el tema del crecimiento económico. En este caso, no se va a estudiar la decisión de las familias productoras sino el equilibrio competitivo con mercados. Por ello, primero se analiza el problema que resuelven las familias de esta economía y luego se considera la actuación de las empresas. La interacción de ambos grupos de agentes lleva a la obtención del equilibrio de esta economía.

2.1. Comportamiento de las familias

Las familias de esta economía deben decidir cuánto consumen y cuánto trabajan en cada momento del tiempo. Esta decisión la realizan considerando un horizonte de planificación infinito. En concreto, su objetivo es maximizar su utilidad teniendo en cuenta que valoran más la utilidad presente que la futura, esto es, que su tasa de preferencia temporal es positiva.

La decisión de las trayectorias óptimas de consumo y oferta de trabajo se realiza teniendo en cuenta el ahorro generado en cada periodo de tiempo amplia las posibilidades de consumo futuro. En ese sentido, la riqueza financiera de las economías domésticas crece en función del ahorro de cada período, es decir, por la diferencia entre los ingresos que provienen del trabajo y de la riqueza y los gastos en consumo. La riqueza financiera sirve, en este sentido, para transferir capacidad de consumo entre períodos.

Por tanto, el problema que resuelven las economías domésticas se puede escribir como [6.1.] en el que se ha utilizado una función de utilidad instantánea concreta[1]: Además, puesto que el interés del modelo ya no es el crecimiento económico, la población se considera constante. Puede observarse que el precio del bien se ha normalizado a 1.

$$\max_{c(t),l(t)} \int_0^\infty e^{-\rho t}\left[ln(c(t)) - \phi\frac{l(t)^{1+\mu}}{1+\mu}\right]dt \qquad \mu > 0 \quad \phi > 0 \quad \rho > 0$$
$$s.a. \quad \dot{b}(t) = w(t)l(t) + r(t)b(t) - c(t) \qquad [6.1.]$$
$$b(0) > 0$$

Con lo que el Hamiltoniano es

$$H(t) = e^{-\rho t}\left[ln(c(t)) - \phi\frac{l(t)^{1+\mu}}{1+\mu}\right] + \lambda(t)[w(t)l(t) + r(t)b(t) - c(t)]$$

donde $\lambda(t)$ es el multiplicador dinámico de Lagrange.

Para resolver este problema se utiliza el procedimiento habitual, aunque teniendo en cuenta que en este caso hay dos trayectorias de control: c(t) y l(t). La solución del problema viene dado por las condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial H(t)}{\partial c(t)} = 0$$
$$\frac{\partial H(t)}{\partial l(t)} = 0$$
$$\frac{\partial H(t)}{\partial a(t)} = -\dot{\lambda}(t)$$
$$\frac{\partial H(t)}{\partial \lambda(t)} = \dot{b}(t)$$

junto a la condición de transversalidad:

$$\lim_{t\to\infty} b(t)\lambda(t) = 0$$

Calculando las derivadas anteriores:

$$\frac{e^{-\rho t}}{c(t)} = \lambda(t)$$
$$\frac{\phi e^{-\rho t} l(t)^{\mu}}{w(t)} = \lambda(t) \qquad [6.2.]$$
$$r(t)\lambda(t) = -\dot{\lambda}(t)$$
$$\dot{b}(t) = w(t)l(t) + r(t)b(t) - c(t)$$

[1] La función utilizada tiene elasticidad de la utilidad marginal respecto al consumo igual a 1. Además, la elasticidad de la utilidad marginal respecto al trabajo es -μ.

Combinando las dos primeras condiciones se obtiene:

$$\frac{e^{-\rho t}}{c(t)} = \frac{\phi e^{-\rho t} l(t)^{\mu}}{w(t)} \rightarrow \frac{w(t)}{c(t)} = \phi l(t)^{\mu} \qquad [6.3.]$$

La expresión anterior recoge que, en un momento del tiempo, dado el salario *w(t)*, el consumo que deciden las familias está relacionado con el trabajo que ofertan. En concreto, la utilidad de la última unidad de bien consumida debe igualar la desutilidad de la cantidad de trabajo necesaria para adquirir esa última unidad de consumo. En otras palabras, [6.3.] recoge el intercambio entre consumo y oferta de trabajo (ocio) en cada momento del tiempo.

Para eliminar $\lambda(t)$ se deriva la primera ecuación de [6.2.] respecto del tiempo y se sustituye en la tercera ecuación de [6.2.] obteniéndose

$$r(t) = \rho + \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} \qquad [6.4.]$$

La expresión [6.4.] indica que el consumo que se realizará en cualquier momento del periodo de planificación debe verificar que los alicientes de consumir en ese instante la última unidad de bien (por su preferencia por consumir lo antes posible y por preferir trayectorias de consumo planas) igualen los beneficios que se obtienen de ahorrar, que quedan reflejados por el tipo de interés. Esta expresión, por tanto, recoge la típica sustitución entre consumo presente y consumo futuro.

La eliminación de $\lambda(t)$ también puede realizarse derivando respecto al tiempo la segunda ecuación de [6.2.] y sustituyendo en la tercera ecuación de [6.2.]:

$$r(t) = \rho - \mu \frac{\dot{l}(t)}{l(t)} + \frac{\dot{w}(t)}{w(t)} \qquad [6.5.]$$

La expresión [6.5.] refleja la sustitución intertemporal entre trabajar en el momento actual o hacerlo más tarde. Así, si el agente trabaja hoy, recibirá un salario que le permitirá ahorrar e incrementar su riqueza y obtener más intereses en el futuro. Por el contrario, el agente prefiere disfrutar del ocio lo antes posible (trabajar lo más tarde posible), lo que queda recogido por la tasa de preferencia temporal. Además, si el agente espera que en el futuro deberá trabajar más (*l(t)* creciente), al preferir trayectorias de trabajo planas decidirá trabajar más en el momento actual. Por último, si el salario tiende a crecer en el tiempo, el agente reducirá su oferta de trabajo actual con la intención de aumentarla cuando el salario sea más alto.

En definitiva, se observa que, mientras en el modelo de Ramsey las familias sólo se plantean la sustitución entre consumo presente y consumo futuro, en la teoría del ciclo real se incluyen otras dos posibles sustituciones: la decisión entre consumo presente y trabajo (ocio) presente y la elección entre trabajo (ocio) presente y trabajo (ocio) futuro.

2.2. Comportamiento de las empresas

Las empresas contratan trabajo y capital a sus precios competitivos y venden su producción en el mercado al precio *p(t)*, que hemos normalizado a 1. Su objetivo es maximizar sus beneficios en todo momento del tiempo.

$$\Gamma = F(L,K) - wL - (\delta + r)K$$

Las condiciones de primer orden son

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial L} = F_L(L^d , K^d) - w = 0$$
$$\frac{\partial \Gamma}{\partial K} = F_K(L^d , K^d) - (\delta + r) = 0$$

Si se considera que la función de producción viene dada por $y(t)=AK(t)^{\alpha}l(t)^{1-\alpha}$, las condiciones de primer orden quedan como aparecen en [6.6.]:

$$r(t) = \alpha A\left(\frac{L(t)}{K(t)} \right)^{1-\alpha} - \delta = \alpha A\left(\frac{l(t)}{k(t)} \right)^{1-\alpha} - \delta$$
$$w(t) = (1-\alpha)A\left(\frac{L(t)}{K(t)} \right)^{-\alpha} = (1-\alpha)A\left(\frac{l(t)}{k(t)} \right)^{-\alpha} \qquad [6.6.]$$

Al utilizar una tecnología con rendimientos constantes a escala, los productos marginales del trabajo y el capital sólo dependen del ratio entre trabajo y capital.

2.3. Equilibrio competitivo

La interacción entre familias y empresas llevará a que la riqueza de las economías domésticas (que está materializada en títulos representativos del capital de la economía) sea utilizada en su totalidad para producir, de forma que *b(t)=k(t)*. Además, la oferta de trabajo debe coincidir con la demanda de trabajo.

En definitiva, el equilibrio viene representado por las siguientes ecuaciones:

$$\frac{w(t)}{c(t)} = \phi l(t)^{\mu}$$

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = r(t) - \rho$$

$$\frac{\dot{l}(t)}{l(t)} = \frac{1}{\mu}\left[\frac{\dot{w}(t)}{w(t)} - (r(t) - \rho) \right]$$

$$\dot{b}(t) = w(t)l(t) + r(t)b(t) - c(t)$$
$$b(t) = k(t)$$

$$r(t) = \alpha A\left(\frac{l(t)}{k(t)} \right)^{1-\alpha} - \delta$$

$$w(t) = (1-\alpha)A\left(\frac{l(t)}{k(t)} \right)^{-\alpha}$$

2.4. Representación gráfica del equilibrio

Para analizar el comportamiento de las variables de este modelo cuando se producen perturbaciones, se va a utilizar un gráfico que relaciona *k* con *l*. El resto de las variables se representarán respecto al tiempo.

En primer lugar, buscamos las combinaciones de trabajo y capital que dejan k inalterado. Para ello, tomamos la restricción del problema de optimización de las familias y teniendo en cuenta que la riqueza financiera es igual al capital en todo momento del tiempo (y, por tanto, sus variaciones en el tiempo son también iguales).

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = w(t)\frac{l(t)}{k(t)} + r(t) - \frac{c(t)}{k(t)}$$

Sabiendo que $\frac{w(t)}{c(t)} = \phi l(t)^{\mu}$ y sustituyendo las expresiones de *w(t)* y de *r(t)*, tal y como se muestra en el anexo 1, se llega a que

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = A\left(\frac{l(t)}{k(t)}\right)^{1-\alpha}\left(1 - \frac{1-\alpha}{\phi l(t)^{1+\mu}}\right) - \delta$$

El stock de capital permanecerá inalterado cuando se verifique:

$$\dot{k}(t) = 0 \rightarrow k(t) = \left(\frac{A}{\delta}\left(1 - \frac{1-\alpha}{\phi l(t)^{\mu+1}}\right)\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} l(t)$$

En el gráfico 1 se ha representado esta curva, que tiene pendiente positiva. El comportamiento del capital fuera de la curva $\dot{K} = 0$ es simple. En puntos a la derecha de la curva tiende a disminuir y lo contrario ocurre en puntos a la izquierda de la curva.

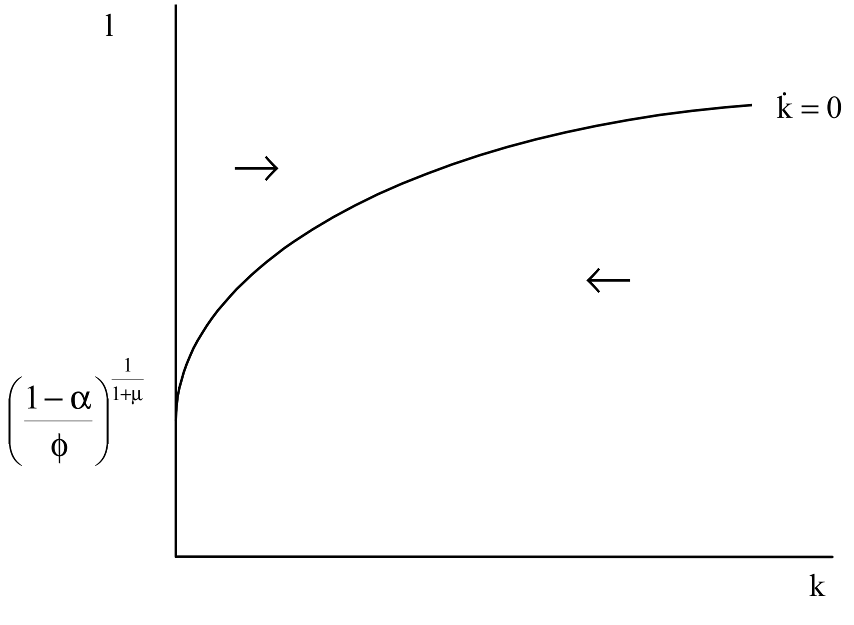


Gráfico 1

El segundo paso consiste en obtener una expresión que nos informe sobre las combinaciones de trabajo y capital que permiten que la oferta de trabajo no evolucione en el tiempo. Partiendo de la expresión

$$\frac{\dot{l}(t)}{l(t)}=\frac{1}{\mu}\left[\frac{\dot{w}(t)}{w(t)}-(r(t)-\rho)\right]$$

Sustituyendo las expresiones del salario de equilibrio y de su derivada respecto al tiempo, así como la expresión del tipo de interés de equilibrio, tal y como se detalla en el anexo 2, se llega a que:

$$\frac{\dot{l}(t)}{l(t)}=\frac{1}{\mu+\alpha}\left[\alpha\frac{\dot{k}(t)}{k(t)}-\alpha A\left(\frac{l(t)}{k(t)}\right)^{1-\alpha}+\delta+\rho\right]$$

Teniendo en cuenta la expresión de $\frac{\dot{k}(t)}{k(t)}$, obtenemos la tasa de variación del trabajo en función de *l(t)* y *k(t)*:

$$\frac{\dot{l}(t)}{l(t)}=\frac{1}{\mu+\alpha}\left[-\frac{\alpha(1-\alpha)A}{\phi l(t)^{\mu+\alpha}k(t)^{1-\alpha}}+\delta(1-\alpha)+\rho\right]$$

Para que el trabajo no cambie en el tiempo debe verificarse:

$$\dot{l}(t)=0\rightarrow k(t)=\left[\frac{\alpha(1-\alpha)A}{\phi l(t)^{\mu+\alpha}(\delta(1-\alpha)+\rho)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

En el gráfico 2 se ha representado esta curva. Por encima de la misma el trabajo tiende a crecer, alejándose de la curva. Por debajo, ocurre lo contrario.

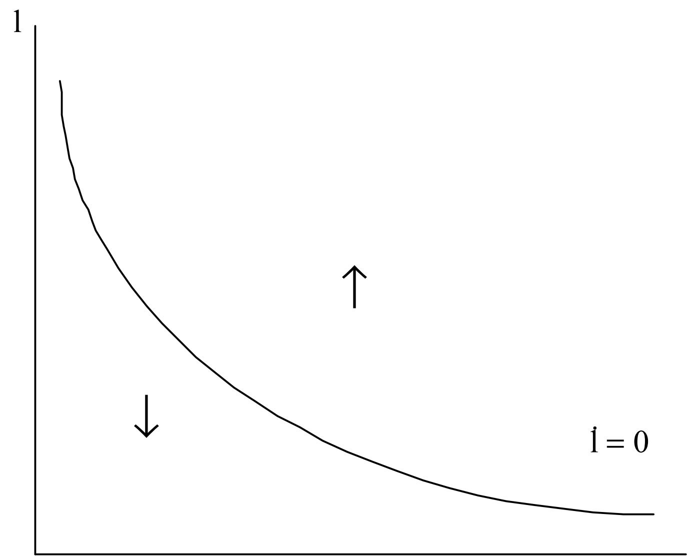


Gráfico 2

Combinado ambas curvas en un mismo gráfico (Gráfico 3) se observa que se forma un equilibrio con estabilidad punto de silla. La trayectoria de convergencia tiene pendiente negativa.

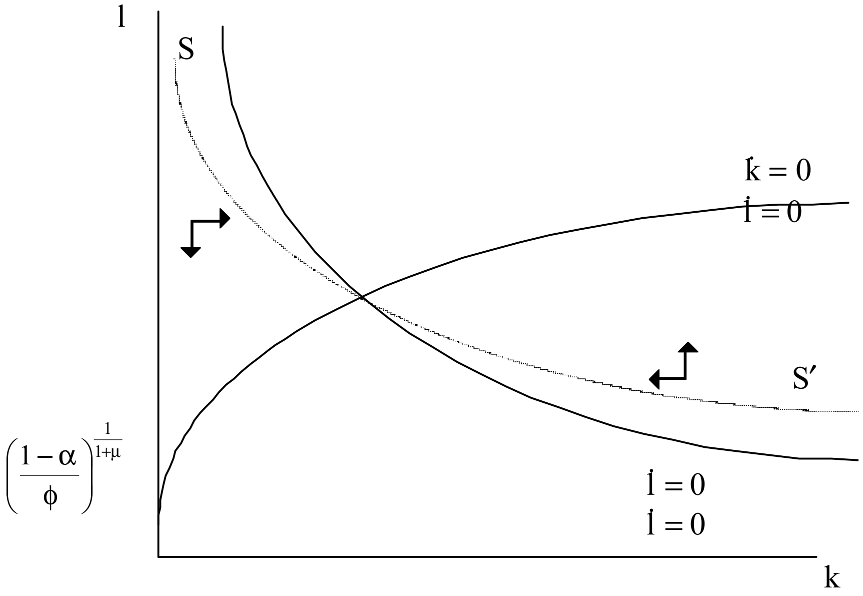


Gráfico 3

3. Efectos de un shock tecnológico

En los gráficos 4 a 9 se ha representado el comportamiento de todas las variables a lo largo del proceso de ajuste que se desencadena cuando se produce el aumento permanente de A.

El aumento de A desplaza las curvas $\dot{k} = 0$ y $\dot{l} = 0$ hacia la derecha (gráfico 4). Como consecuencia, el stock de capital de la economía crece y la cantidad de trabajo contratada es la misma que al principio[2].

La trayectoria que sigue la economía consiste en un aumento brusco de la cantidad de trabajo para el stock de capital inicial. El salto es tal que sitúa a la economía en la trayectoria de convergencia hacia el nuevo equilibrio. A partir de ese momento, *k* crecerá gradualmente mientras *l* se reduce hasta alcanzar el nuevo equilibrio estacionario. En los gráficos 5 y 6 se ha representado el comportamiento de las variables k y l respecto al tiempo.

En los gráficos 7 y 8 se muestra la evolución temporal del tipo de interés y del salario. Ambos aumentan de forma brusca al producirse el aumento de A, ya que el producto marginal de ambos factores se hace mayor y, por tanto, las empresas están dispuestas a pagar más por ambos factores productivos. En cualquier caso, debe tenerse en cuenta que, a medida que el salario crece, lo hace también la oferta de trabajo (salto de *w(t)* en el gráfico 6), lo que mitiga

[2] La cantidad de trabajo de equilibrio estacionario no cambia con la variación de A, ya que, dada la cantidad de trabajo inicial, el desplazamiento a la derecha de las ambas curvas es igual.

el crecimiento del salario. Por el contrario, el crecimiento inicial aumenta aún más el producto marginal del capital y, en consecuencia, el tipo de interés.

A lo largo del proceso de ajuste, *k* aumenta mientras *l* se reduce. Como resultado, la relación l/k se va haciendo menor, lo que lleva a que el producto marginal del trabajo crezca permanentemente (y con éste, el salario) mientras el producto marginal del capital y el tipo de interés caen paulatinamente hasta que en el estado estacionario final el tipo de interés iguala a la tasa subjetiva de descuento (tasa de preferencia temporal).

En cuanto al comportamiento del consumo (gráfico 9), puede demostrarse que el consumo crece de forma discreta en el momento inicial. Además, el hecho de que el tipo de interés supere a la tasa subjetiva de descuento garantiza que el consumo crecerá constantemente. Por tanto, el consumo será mayor en el equilibrio estacionario final (basta con tener en cuenta que la oferta de trabajo es la misma y el salario más alto, por lo que la elección entre consumo y trabajo conduce a que el consumo sea mayor).

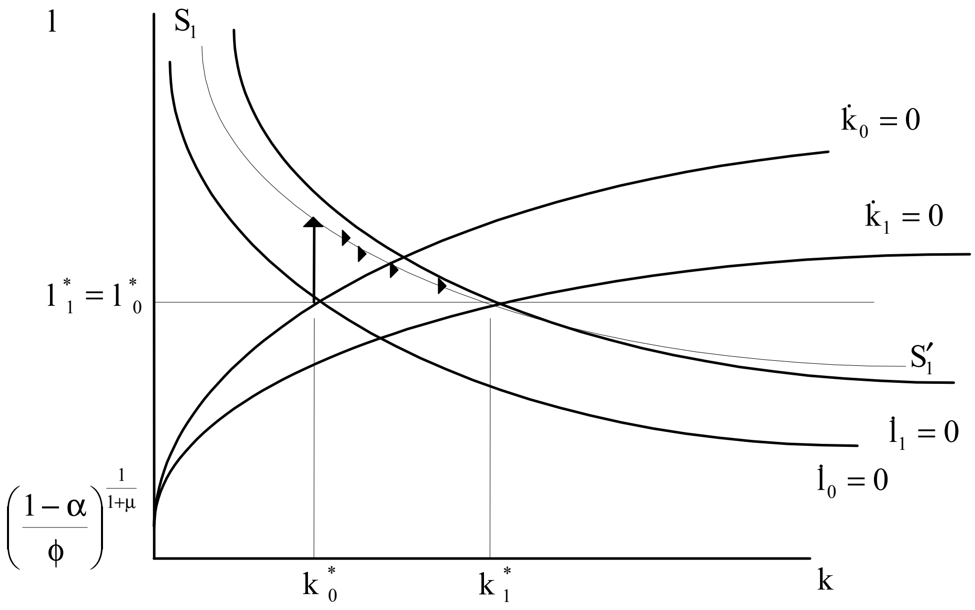
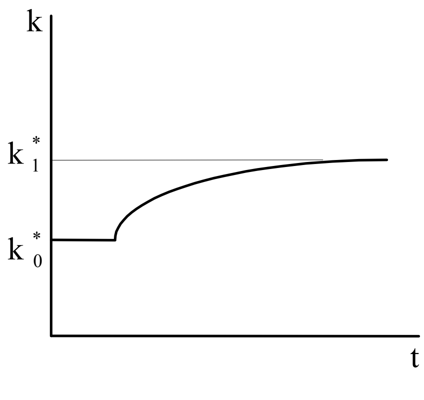


Gráfico 4



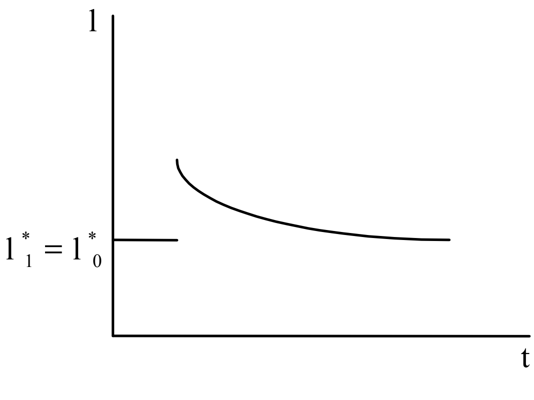


Gráfico 5 **Gráfico 6**

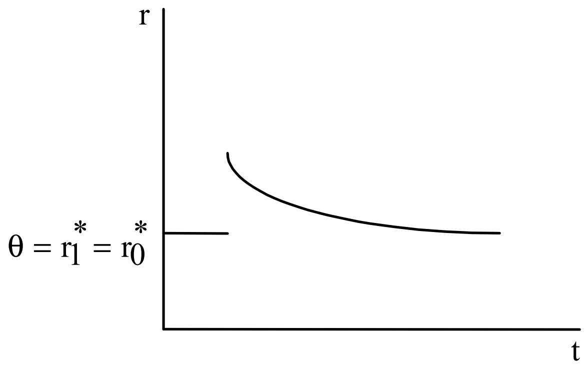


Gráfico 7

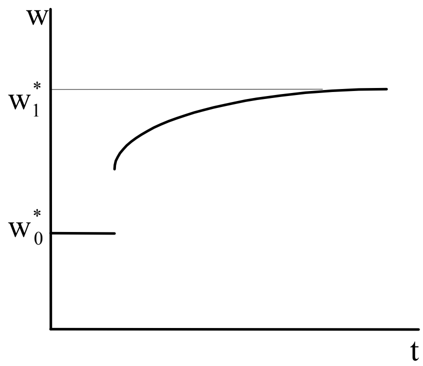


Gráfico 8

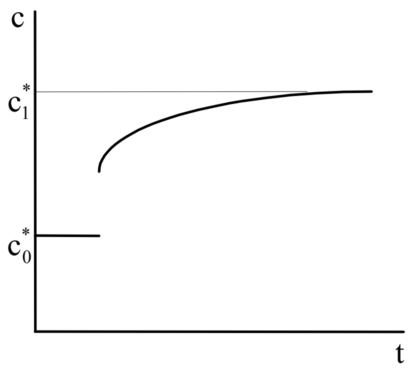


Gráfico 9

Poniendo énfasis en los motivos económicos que llevan a que el proceso se desarrolle como indican los gráficos, podría decirse lo siguiente:

El aumento de A genera un efecto directo sobre los mercados de factores elevando el tipo de interés hasta que la demanda de capital iguale la oferta existente. Por otra parte, las empresas están dispuestas a contratar más trabajadores elevando el salario. Por tanto, el salario sube hasta que la oferta de trabajo iguala a su demanda. Al decidir cuánto trabajo ofertan, las familias consideran el comportamiento de los tipos de interés y del salario hasta llegar al equilibrio final, así como el hecho de que van a trabajar cada vez menos.

Aunque las familias tienden a consumir un poco más, los altos tipos de interés conducen a que acumulen capital, lo que permite que el tipo de interés vaya cayendo. A pesar de que el salario es creciente en el tiempo, se observa que la cantidad de trabajo contratada se reduce. Este comportamiento se explica porque los elevados tipos de interés iniciales incentivan un fuerte crecimiento inicial de la cantidad de trabajo ofertada. Posteriormente, las economías domésticas van reduciendo su oferta de trabajo a medida que el tipo de interés se va haciendo menor.

La elección entre consumo presente y futuro lleva a las familias a consumir poco inicialmente porque los altos tipos de interés incentivan fuertemente el ahorro y a incrementar su consumo paulatinamente (a medida que el tipo de interés se va reduciendo).

En la descripción anterior aparecen los principales elementos del modelo:

- Un mecanismo de impulso, consistente en una alteración de la tecnología.

- Mecanismos de persistencia o propagación como la lenta acumulación de capital.

- Mecanismos de ampliación y difusión, como la sustitución intertemporal entre trabajo y ocio, o entre consumo y ahorro. Así, el trabajo crece mucho en el momento inicial debido a los altos tipos de interés lo que impulsa con fuerza la producción de la economía. Del mismo modo, los altos tipos de interés hacen que se acumule capital, lo que nuevamente hace que la economía crezca.

4. Algunos comentarios finales

La teoría del ciclo real no se contrasta mediante regresiones, debido a las complicaciones teóricas de los modelos y a la no disponibilidad de ciertas series, sino que se somete a procesos de simulación, previa calibración del modelo. El proceso incluye la linealización de las ecuaciones relevantes mediante aproximaciones de Taylor, la elaboración de los supuestos acerca de la forma que toman los shocks y la búsqueda de valores plausibles para los parámetros. Con ello y los valores observados de las variables para un momento inicial, se pueden introducir las perturbaciones (no necesariamente en la tecnología) y simular los cambios en las distintas variables. La comparación de estos resultados con los observados en la economía de un país permite llegar a conclusiones sobre la plausibilidad del modelo. Por tanto, en esta teoría no se puede llegar a conclusiones del tipo de: “la causa de los ciclos económicos es los shocks en la tecnología. Más bien se suele afirmar que cuando se somete al modelo descrito a shocks tecnológicos de determinado tipo, genera movimientos en las variables económicas que guardan cierta similitud con los de las series reales.[3]

[3] Romer (1996), pp.186-189 plantea las principales objeciones que se realizan a los modelos de ciclo real.

Anexo 1. Obtención de la expresión de la tasa de variación del capital por trabajador como función de l(t) y k(t)

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = w(t)\frac{l(t)}{k(t)} + r(t) - \frac{c(t)}{k(t)}$$

Como $\frac{w(t)}{c(t)} = \phi l(t)^{\mu}$, se puede despejar *c(t)* y sustituir en la expresión anterior:

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = w(t)\frac{l(t)}{k(t)} + r(t) - \frac{w(t)}{\phi l(t)^{\mu} k(t)}$$

Sustituyendo las expresiones de *w(t)* y de *r(t)*:

$$r(t) = \alpha A\left(\frac{l(t)}{k(t)}\right)^{1-\alpha} - \delta$$

$$w(t) = (1-\alpha)A\left(\frac{l(t)}{k(t)}\right)^{-\alpha}$$

se llega a que

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = (1-\alpha)A\left(\frac{l(t)}{k(t)}\right)^{-\alpha}\frac{l(t)}{k(t)} + \alpha A\left(\frac{l(t)}{k(t)}\right)^{1-\alpha} - \delta - \frac{(1-\alpha)A\left(\frac{l(t)}{k(t)}\right)^{-\alpha}}{\phi l(t)^{\mu} k(t)}$$

Sumando los dos primeros términos de la expresión anterior y rescribiendo el tercer sumando:

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = A\left(\frac{l(t)}{k(t)}\right)^{1-\alpha} - \delta - \frac{(1-\alpha)A\left(\frac{l(t)}{k(t)}\right)^{1-\alpha}}{\phi l(t)^{\mu+1}}$$

Sacando factor común $A\left(\frac{l(t)}{k(t)}\right)^{1-\alpha}$ se obtiene la expresión que buscamos:

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = A\left(\frac{l(t)}{k(t)}\right)^{1-\alpha}\left(1 - \frac{1-\alpha}{\phi l(t)^{1+\mu}}\right) - \delta$$

Anexo 2. Obtención de la expresión de la tasa de variación del trabajo por persona como función de l(t) y k(t)

Tomando como punto de partida la función siguiente, queremos eliminar los precios de los factores de de forma que dependa sólo de l y k.

$$\frac{\dot{l}(t)}{l(t)} = \frac{1}{\mu}\left[\frac{\dot{w}(t)}{w(t)} - (r(t) - \rho)\right]$$

Para ello utilizamos la expresión del salario con el fin de calcular su tasa de variación.

$$w(t) = (1-\alpha)A\left(\frac{l(t)}{k(t)}\right)^{-\alpha}$$

Lo más rápido es tomar logaritmos neperianos:

$$ln[w(t)] = ln[(1-\alpha)A] - \alpha\, ln[l(t)] + \alpha\, ln[k(t)]$$

y derivar respecto al tiempo:

$$\frac{\dot{w}(t)}{w(t)} = -\alpha\frac{\dot{l}(t)}{l(t)} + \alpha\frac{\dot{k}(t)}{k(t)}$$

Sustituyendo en la ecuación de partida la expresión del tipo de interés y la tasa de variación del salario, se obtiene:

$$r(t) = \alpha A\left(\frac{l(t)}{k(t)}\right)^{1-\alpha} - \delta$$

$$\frac{\dot{l}(t)}{l(t)} = \frac{1}{\mu}\left[-\alpha\frac{\dot{l}(t)}{l(t)} + \alpha\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} - (\alpha A\left(\frac{l(t)}{k(t)}\right)^{1-\alpha} - \delta - \rho)\right]$$

Despejando la tasa de variación de l(t):

$$\frac{\dot{l}(t)}{l(t)} = \frac{1}{\mu+\alpha}\left[\alpha\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} - \alpha A\left(\frac{l(t)}{k(t)}\right)^{1-\alpha} + \delta + \rho\right]$$

Teniendo en cuenta que, tal y como se obtuvo en el anexo 1,

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = A\left(\frac{l(t)}{k(t)}\right)^{1-\alpha}\left(1-\frac{1-\alpha}{\phi l(t)^{1+\mu}}\right)-\delta$$, se obtiene:

$$\frac{\dot{l}(t)}{l(t)} = \frac{1}{\mu+\alpha}\left[\alpha\left[A\left(\frac{l(t)}{k(t)}\right)^{1-\alpha}\left(1-\frac{1-\alpha}{\phi l(t)^{1+\mu}}\right)-\delta\right]-\alpha A\left(\frac{l(t)}{k(t)}\right)^{1-\alpha}+\delta+\rho\right]$$

Simplificando

$$\frac{\dot{l}(t)}{l(t)} = \frac{1}{\mu+\alpha}\left[\alpha A\left(\frac{l(t)}{k(t)}\right)^{1-\alpha}\left(-\frac{1-\alpha}{\phi l(t)^{1+\mu}}\right)-\delta(1-\alpha)+\rho\right]$$

y escribiendo la expresión anterior de otro modo se llega al resultado que buscamos:

$$\frac{\dot{l}(t)}{l(t)} = \frac{1}{\mu+\alpha}\left[-\frac{\alpha(1-\alpha)A}{\phi l(t)^{\mu+\alpha}k(t)^{1-\alpha}}+\delta(1-\alpha)+\rho\right]$$

Referencias bibliográficas y bibliografía

Argandoña, A.; Gámez, C. y Mochón, F. (1997): *Macroeconomía Avanzada II. Fluctuaciones cíclicas y crecimiento económico*, McGraw-Hill, Madrid.

García de Paso, I. (1999): *Macroeconomía superior*, Pirámide, Madrid.

Goerlich, F. (1990): “Modelos reales de ciclo: un panorama”, *Investigaciones Económicas*, vol. 14, nº 3, pp. 321-345.

Kydland, F. y Prescott, E. (1982): “Time to build and aggregate fluctuations”, *Econométrica*, vol. 50, pp. 1345-1370.

Long, J.B y Plosser, C. (1983): “Real business cycles”, *Journal of Political Economy*, vol. 91, nº1, pp. 39-69.

Lucas, R. (1972): “Expectations and the neutrality of money”, *Journal of Economic Theory*, vol 4, nº 2, pp. 103-124. Traducido en Cuadernos Económicos de ICE, 1981, nº 16, pp. 41-60.

Lucas, R. (1973): “Some International Evidence on Output-Inflation Trade-offs”, *American Economic Review*, vol. 63, nº 3, pp. 326-334.

Lucas, R. (1988): *Modelos de ciclos económicos*, Alianza Editorial, Madrid.

Novales, A. y Sebastián, C. (1999b): *Análisis macroeconómico II*, Marcial Pons, Madrid.

Ramsey, F. (1928): “A mathematical theory of saving”, *Economic Journal*, vol. 38, diciembre, pp. 543-559.

Romer, D. (2006), *Macroeconomía Avanzada,* McGrawHill, 3ª edición.