

# TEMA 2: DINÁMICA, REGULACIÓN Y CONTROL DE MÁQUINAS ELÉCTRICAS

- Motores en Industria 4.0
- Dinámica de las Máquinas
- Regulación y Control

Tema 2: DINÁMICA, REGULACIÓN Y CONTROL DE MÁQUINAS ELÉCTRICAS

# **MOTORS IN INDUSTRY 4.0- INTRODUCTION**

# Overview

In the “ABB Review Special Report. Motor and drives” H. Markus Bayegan Chief Technology Officer ABB Ltd, wrote:

“Electrical drives are, quite literally, the driving force behind all automation systems used in industry, commerce and buildings. They are used in a wide range of applications in many industries such as cement, chemical, pump and paper, metal and oil and gas, and contribute enormously to increasing the efficiency and reliability of these processes while at the same time improving safety and energy savings. ...” H. Markus Bayegan Chief Technology Officer ABB Ltd



## Examples from ABB

<https://selector.drives.abb.com/country>



**ACS580-01**

- General purpose drive
- Scalar and Vector control
- Wall mounted
- IP21 as standard, IP55 optional
- 0.37 - 250 kW



**M3BP IE3**

- Process performance, best suited to process industries and heavy duty applications.
- Cast iron frame
- IE3 Efficiency class
- 0.25 - 355 kW

# Overview

**BEFORE**: For almost three quarters of the twentieth century, most of the ac drives for industrial and domestic uses have been designed to operate at constant speed. Constant speed drives are highly inefficient for variable speed operations.

**NOW**: with the availability of economical variable frequency electric supplies, resulting from advances in power electronic switching devices, and the low cost microprocessor based control, **electric drives** are increasingly being used for operating industrial loads at any one of a wide range of speeds. In many modern industries adjustable speed drives are required for precise and continuous control of speed, torque, or position, with long term stability, good transient performance and high efficiency.

The electric drive makes use of electric motors as prime mover due to the following advantages:

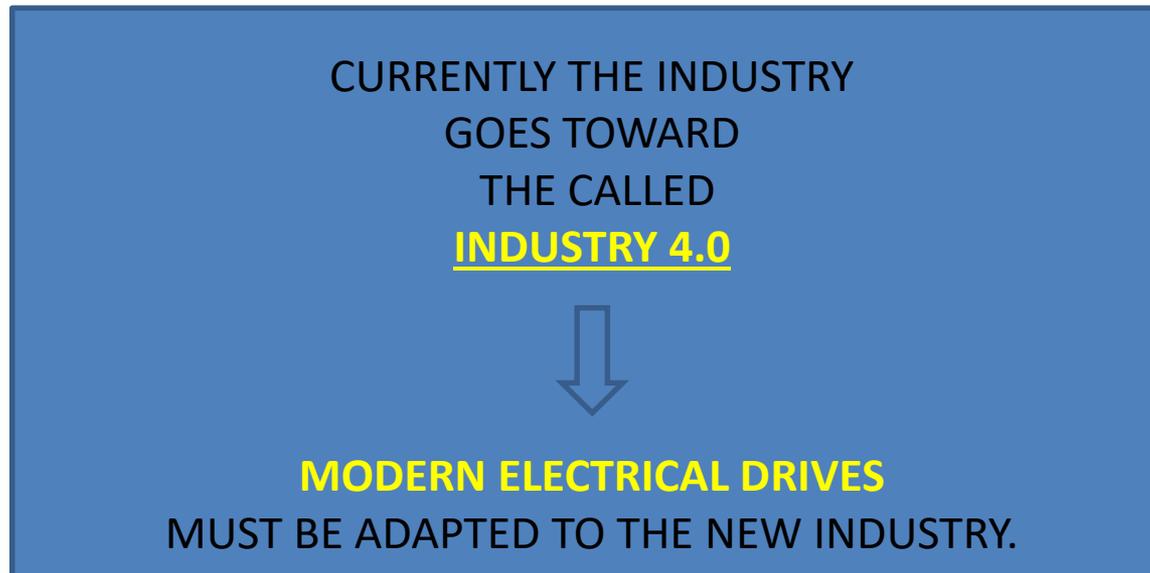
- They can be brought very close to the working machine (load),
- can be operated at any desired speed through power electronic control,
- and can be started and reversed in very short periods of time.

# Overview

A modern electric drive has four components:

- Electric motor
- Power electronic converter
- Controller
- Actual apparatus or equipment (Load)

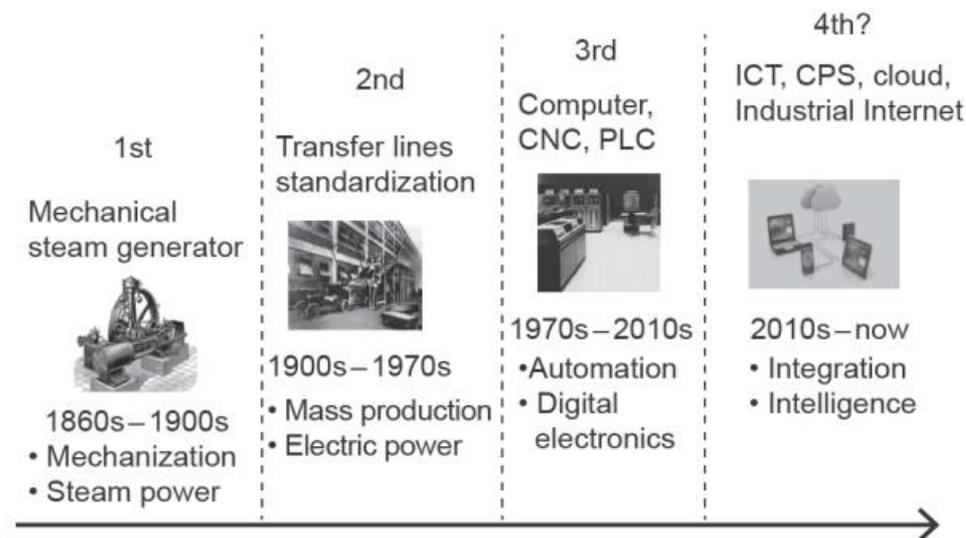
On the other hand



# System Integration and Industry 4.0

The world is currently experiencing a fourth iteration of the Industrial Revolution, Industry 4.0, which merges computers and automation to enhance efficiency in the manufacturing industry and also includes cyber-physical systems, the Internet of Things (IoT) and cloud computing.

<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2095809917307105>



**Fig. 1.** The progress and characteristics of industrial revolutions. CNC: computer numerical controller; PLC: programmable logic controller; ICT: information and communications technology; CPS: cyber-physical system.

# System Integration and Industry 4.0

<https://www.din.de/blob/76902/e8cac883f42bf28536e7e8165993f1fd/recommendations-for-implementing-industry-4-0-data.pdf>

Forschungsunion

Wirtschaft und Wissenschaft  
begleiten die Hightech-Strategie

acatech

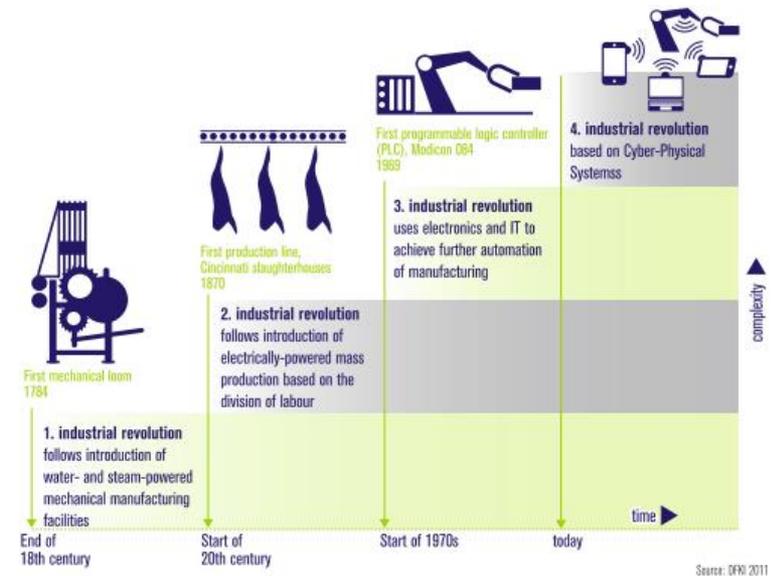
NATIONAL ACADEMY OF  
SCIENCE AND ENGINEERING

Securing the future of German manufacturing industry

## Recommendations for implementing the strategic initiative INDUSTRIE 4.0

Final report of the Industrie 4.0 Working Group

Figure 1:  
The four stages of  
the Industrial Revolution

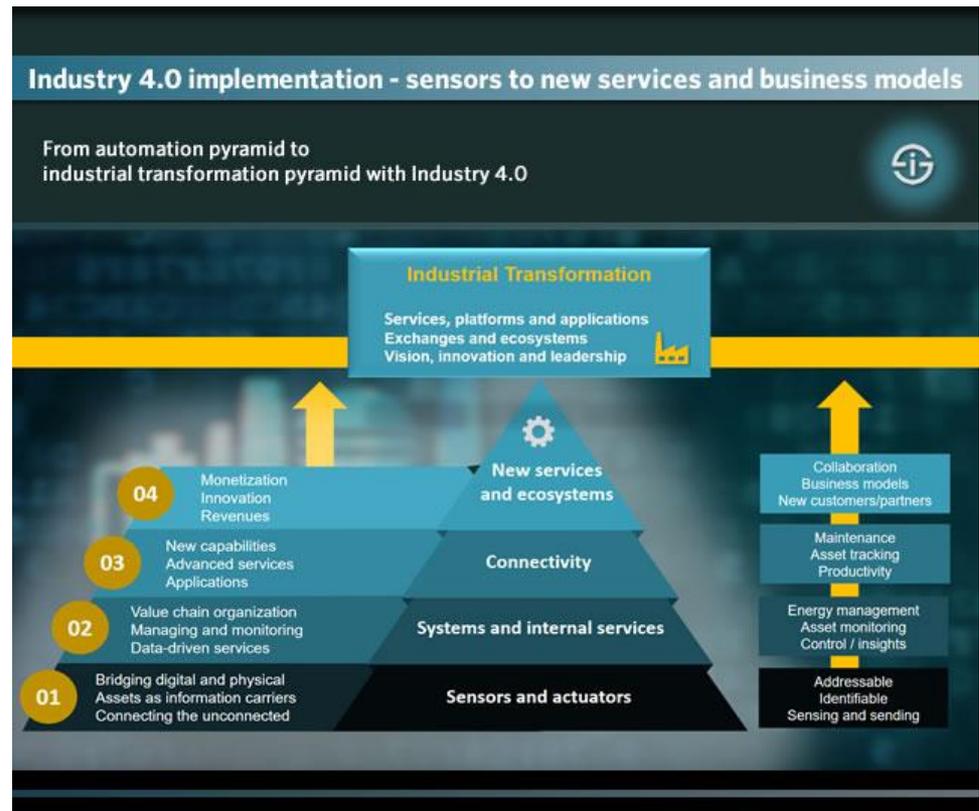


# System Integration and Industry 4.0

<https://www.i-scoop.eu/industry-4-0/drivers-spending-industry-4-0-market-2022/>

[https://www.i-scoop.eu/industry-4-0/#Industry\\_40\\_design\\_principles](https://www.i-scoop.eu/industry-4-0/#Industry_40_design_principles)

Industry 4.0 is a broad vision with clear frameworks and reference architectures, mainly characterized by the bridging of physical industrial assets and digital technologies in so-called cyber-physical systems.



# What is System Integration?

System Integration is a process commonly implemented in the fields of engineering and information technology.

It involves the combination of various computing systems and software packages in order to create a larger system, and this is what drives Industry 4.0 to work at its optimum.

System Integration increases value to a system by creating new functionalities through the combination of sub-systems and software applications. Examples of System Integration include the automation of home appliances and electrical systems.

# What is System Integration?

<https://www.din.de/blob/76902/e8cac883f42bf28536e7e8165993f1fd/recommendations-for-implementing-industry-4-0-data.pdf>

Figure 2:  
Industry 4.0 and  
smart factories as  
part of the Internet  
of Things and Services

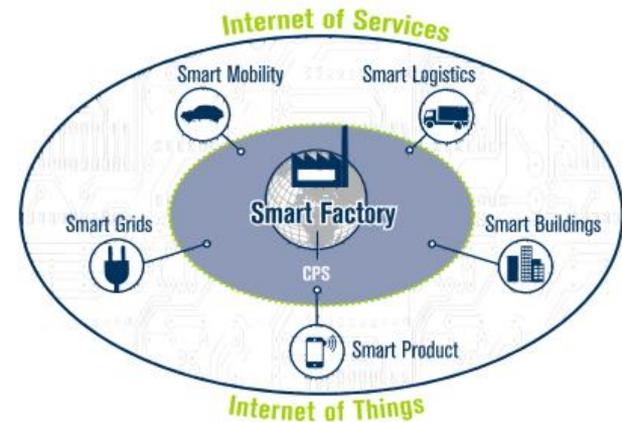
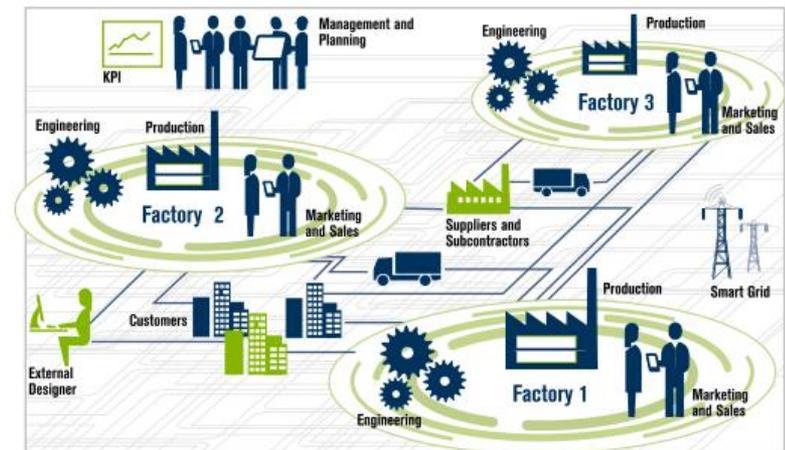


Figure 3:  
Horizontal value  
network



Forschungsunion

Wirtschaft und Wissenschaft  
begleiten die Hightech-Strategie

acatech

NATIONAL ACADEMY OF  
SCIENCE AND ENGINEERING

Securing the future of German manufacturing industry

Recommendations for  
implementing the strategic  
initiative INDUSTRIE 4.0

Final report of the Industrie 4.0 Working Group

# What does Industry 4.0 mean for engineers?

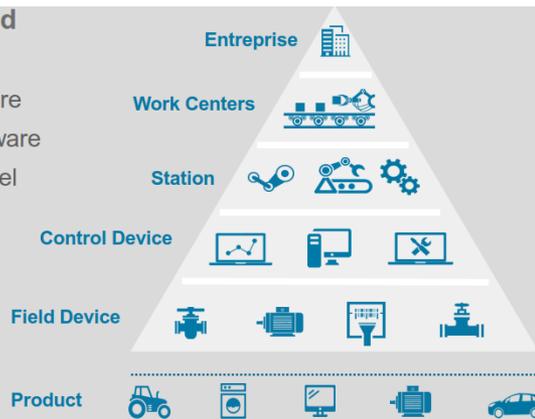
The emergence of Industry 4.0 is quite significant for engineers.

The merging of Information Technology (IT) and Operational Technology (OT) will require engineers to develop their automation skills so they have the capabilities to be able to design, set up and commission smart factories.

In addition to expanding their skills in automation, they will need to develop their non-technical project management and business skills.

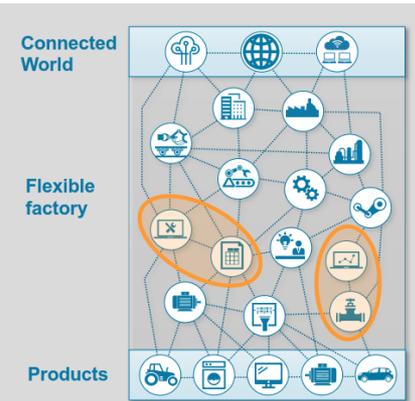
## Industrie 3.0 = the old world

- ▶ Hardware defines the structure
- ▶ Functions are linked to hardware
- ▶ Communication from one level to the other
- ▶ The product is isolated



## Industrie 4.0 = the new world

- ▶ Flexible systems and machines; functions are distributed through the network.
- ▶ The network can cross company boundaries.
- ▶ Participants interact across hierarchical levels
- ▶ All participants are able to communicate with each other.
- ▶ Products are part of the network.



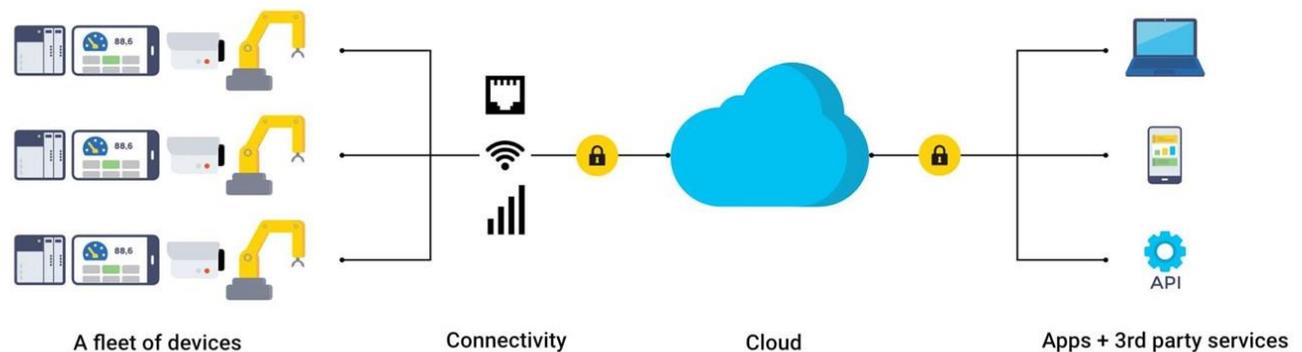
# What is the Industrial Internet of Things (IIoT)?

Industrial Internet of Things (IIoT) (<https://www.ixon.cloud/knowledge-hub/industrial-internet-of-things-platform-iiot>) connects machines, robots, transportation lines, solar panels and other industrial devices such as HMIs and PLCs to the internet. It differs from other IoT applications by its daily effects on smarter, integrated and more efficient production. Reliable connectivity devices that require little maintenance are essential for Industrial IoT.

Industrial IoT devices run applications to control machines, buildings or plants. Some examples are a smart factory, predictive and remote maintenance, smart metering, security systems, equipment monitoring and industrial HVAC.

It also benefits predictive maintenance, field service, energy and facility management, and asset tracking.

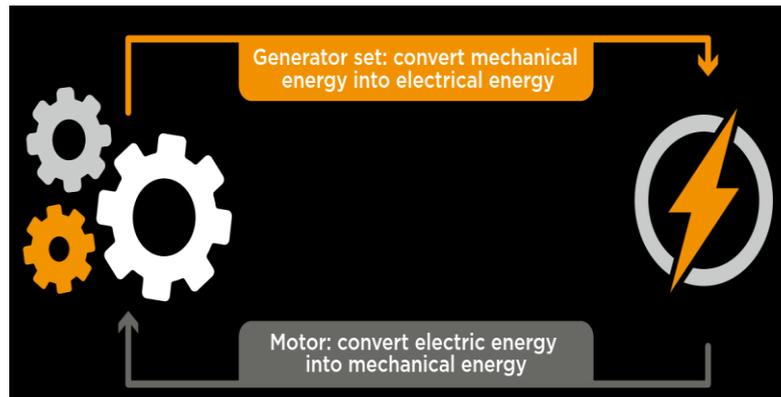
A schematic overview of an Industrial IoT platform:



# Motors in the Industry 4.0

Electric motors are a key element for electric energy production and conversion. Therefore, they play a vital role in almost all industries and sectors in modern society.

Industrial motors are electromagnetic devices that convert or transfer electric energy according to the Faraday law of electromagnetic induction.

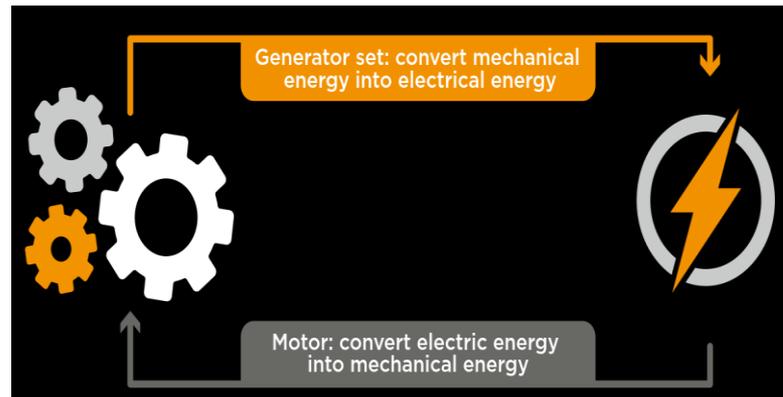


In Industry 4.0, it is essential to obtain maximum efficiency from electric motors in industrial processes. That's why sensors and electric drivers are critical. In other words, for good control, sensors are necessary that provide information throughout the entire network of the new smart factory, where producers and consumers participate.

# Motors in the Industry 4.0

Electric motors are a key element for electric energy production and conversion. Therefore, they play a vital role in almost all industries and sectors in modern society.

Industrial motors are electromagnetic devices that convert or transfer electric energy according to the Faraday law of electromagnetic induction.



Meanwhile, the sensor is the key component of the motor control system.

Sensors provide data to improve efficiency and reliability of various types of industrial motors (<https://www.te.com/global-en/industries/sensor-solutions/applications/sensors-for-industrial/industrial-motor-sensors.html> ).

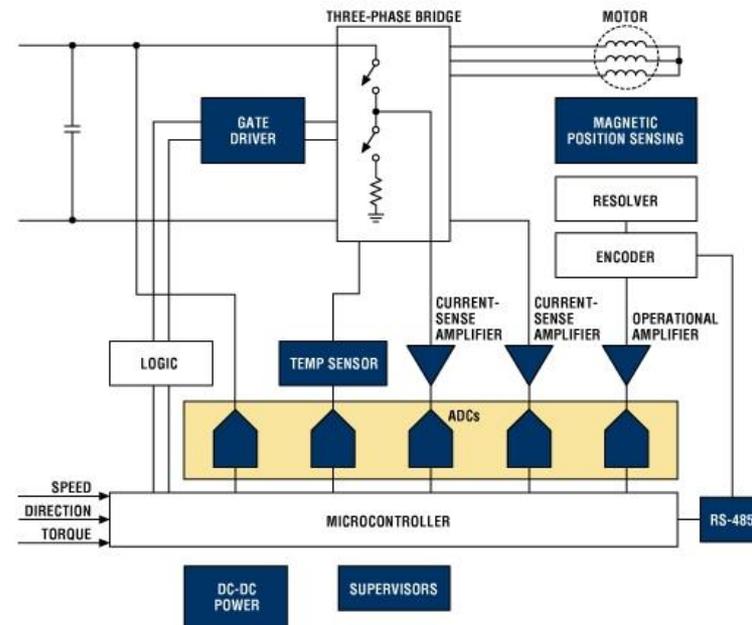
Sensors bring efficiency to the motor applications, for example, reducing unscheduled downtime to planning time for preventive maintenance, because sensors allow to measure and monitor their vibration, temperature and position to confirm factory is operating efficiently.

# Examples: Industrial Motor Control Systems

Block diagram of a typical industrial motor control

([https://www.mouser.es/applications/industrial\\_motor\\_control\\_overview/](https://www.mouser.es/applications/industrial_motor_control_overview/)):

This overview of **industrial motor controls** highlights the differences and subsystems for **DC motor**, **brushless DC**, and **AC induction motors**. An in-depth analysis of critical subsystems focuses on monitoring and **measuring current**; **sensing temperature**; **sensing motor speed, position, and movement**; **monitoring and controlling multichannel currents and voltages**; and high-accuracy motor control with encoder data interfaces.



# Examples: Industrial Motor Control Systems



## MAX15024/MAX15025

### Single/Dual, 16ns, High Sink/Source Current Gate Drivers

#### General Description

The MAX15024/MAX15025 single/dual, high-speed MOSFET gate drivers are capable of operating at frequencies up to 1MHz with large capacitive loads. The MAX15024 includes internal source-and-sink output transistors with independent outputs allowing for control of the external MOSFET's rise and fall time. The MAX15024 is a single gate driver capable of sinking an 8A peak current and sourcing a 4A peak current. The MAX15025 is a dual gate driver capable of sinking a 4A peak current and sourcing a 2A peak current. An integrated adjustable LDO voltage regulator provides gate-drive amplitude control and optimization.

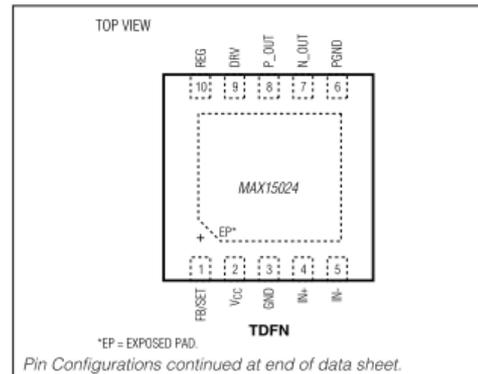
The MAX15024A and MAX15025A/C accept transistor-to-transistor (TTL) input logic levels while the MAX15024B and MAX15025B/D accept CMOS-input logic levels. High sourcing/sinking peak currents, a low propagation delay, and thermally enhanced packages make the MAX15024/MAX15025 ideal for high-frequency and high-power circuits. The MAX15024/MAX15025 operate from a 4.5V to 28V supply. A separate output driver supply input enhances flexibility and permits a soft-start of the power MOSFETs used in synchronous rectifiers.

The MAX15024/MAX15025 are available in 10-pin TDFN packages and are specified over the -40°C to +125°C automotive temperature range.

#### Applications

- Synchronous Rectifier Drivers
- Power-Supply Modules
- Switching Power Supply

#### Pin Configurations



# Examples: Industrial Motor Control Systems

## Motor Control Applications - AC Induction Motor

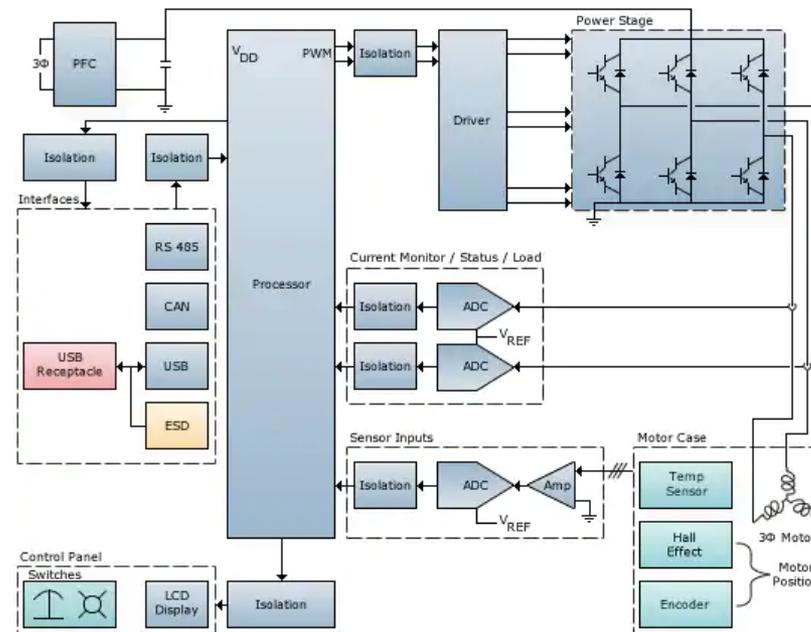
Most motors are **AC induction motors**. In fact, more than 80% of all motors are AC induction motors. An AC induction motor can be single phase, poly-phase, brushed, or brushless. Unlike DC motors, they can reliably operate heavy workloads over one horsepower (750 watts) and three-phases are required for the largest motors. In an **induction motor**, the stator windings induce a current flow in the rotor, like a transformer (unlike a brushed DC commutator motor).

[+] Read More

### Motor Control Applications - AC Induction Motor

<https://www.mouser.es/applications/motor-control-ac-induction/>

AC Induction Motor Block Diagram



### View Product List

- ADC
- Amplifier - Precision
- CAN
- Isolation
- Driver
- Encoder
- ESD
- Hall Effect
- LCD Display
- PFC
- Power Stage
- Processor
- RS 485
- Switches
- Temp Sensor
- USB
- USB Receptacle

This design is for reference only. The design, as well as the products suggested, has not been tested for compatibility or interoperability.

# Examples: Industrial Motor Control Systems

## Motor Control Applications - Brushless DC Motor

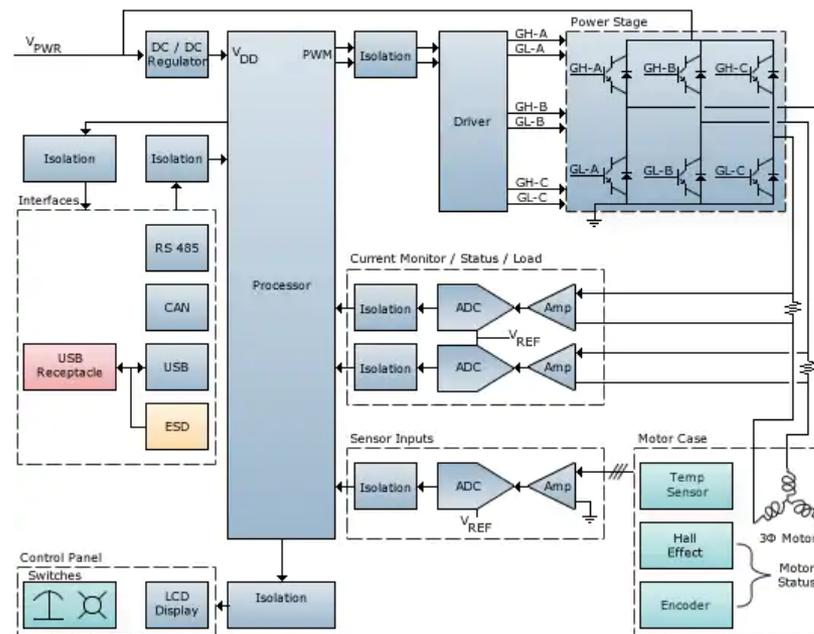
A brushless DC (BLDC) electric motor is likened to a motor with brushes, but turned "inside-out." A BLDC motor has a rotor with permanent magnets and the stator contains the windings. Older motors with brushes rely on the brushes to conduct electrical current between moving parts. This works, but the brushes wear out due to continuous physical operation. BLDC is a term applied to motors running on DC or AC current; both do not have brushes, but the stator windings differ somewhat. Thus, despite its name a brushless DC (BLDC) motor does not operate directly from a DC voltage source. The BLDC also has an electronic commutation system.

## Motor Control Applications – Brushless DC Motor

<https://www.mouser.es/applications/motor-control-brushless-dc/>

[+] Read More

Brushless DC Motor Block Diagram



### View Product List

- ADC
- Amplifier - Current Sensing
- Amplifier - Precision
- CAN
- DC / DC Regulator
- Isolation
- Display
- Driver
- Encoder
- ESD
- Hall Effect
- Power Stage
- Processor
- RS 485
- Switches
- Temp Sensor
- USB
- USB Receptacle

This design is for reference only. The design, as well as the products suggested, has not been tested for compatibility or interoperability.

# Examples: Industrial Motor Control Systems

## Motor Control Applications - Stepper Motor

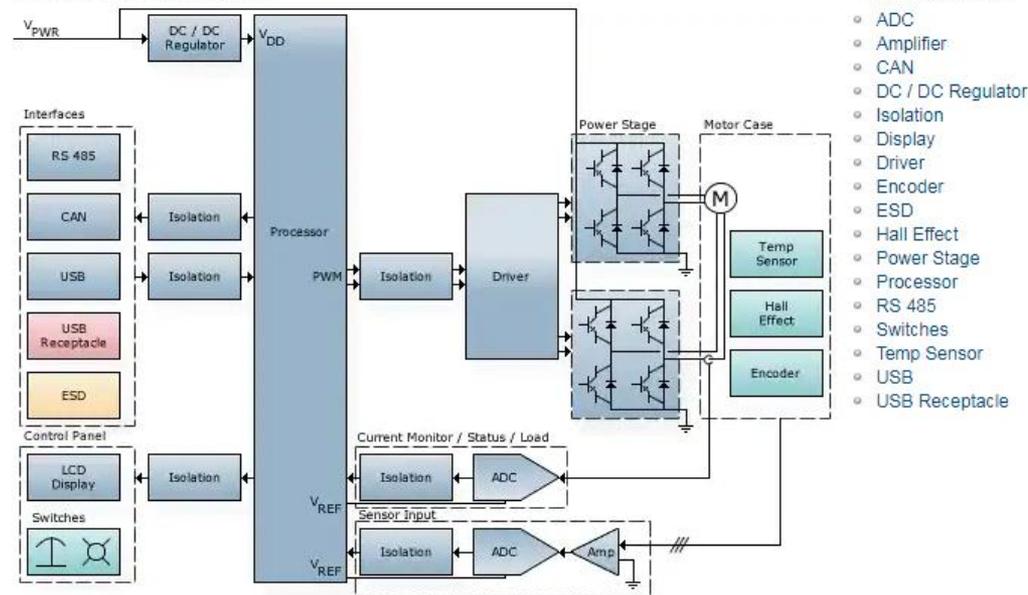
<https://www.mouse.com/es/applications/motor-control-stepper/>

### Motor Control Applications - Stepper Motor

Stepper motors are inexpensive and rugged because they have fewer mechanical parts. They are brushless, easy to position, and are commonly used in automation systems, although they are small low power devices as compared to other motors...

[+] Read More

Stepper Motor Block Diagram



#### View Product List

- ADC
- Amplifier
- CAN
- DC / DC Regulator
- Isolation
- Display
- Driver
- Encoder
- ESD
- Hall Effect
- Power Stage
- Processor
- RS 485
- Switches
- Temp Sensor
- USB
- USB Receptacle

This design is for reference only. The design, as well as the products suggested, has not been tested for compatibility or interoperability.

Tema 2: DINÁMICA, REGULACIÓN Y CONTROL DE MÁQUINAS ELÉCTRICAS

# **DINÁMICA DE LAS MÁQUINAS: ASÍNCRONAS**

Ejemplos que conducen a transitorios:

- Encendido y apagado de la red de potencia.
- Reconectando una máquina de inducción después de un fallo de potencia corto.
- Cortocircuito de los terminales.
- Los drivers de velocidad variable que producen rápidos transitorios electromagnéticos y mecánicos.

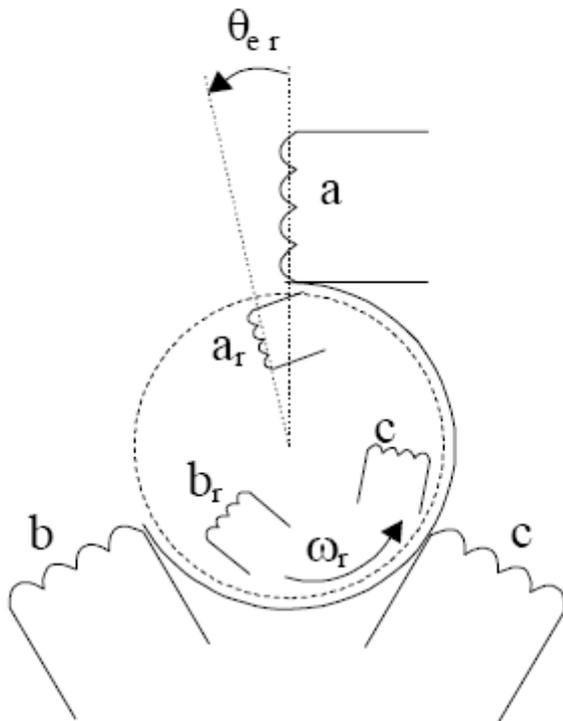
El modelo del estado estacionario de un motor de inducción es bueno para predecir cosas como la carga, el par y las pérdidas y eficiencia. Sin embargo, en muchos casos los motores de inducción están envueltos en cargas muy dinámicas, y el modelo del estado estacionario del motor no puede describir el comportamiento dinámico.

El modelo de los transitorios son necesarios para el control de los drivers de las máquinas de inducción de “frecuencia y voltaje constantes” y drivers PWM (“Pulse Width Modulation”)

# Modelo de las coordenadas de fase

La máquina de inducción (IM) puede ser vista como un sistema de circuitos eléctricos y magnéticos los cuales están acoplados magnéticamente y/o eléctricamente.

La IM es representada por 6 circuitos (fases). Cada uno de ellos está caracterizado por una autoinductancia y 5 inductancias mutuas.

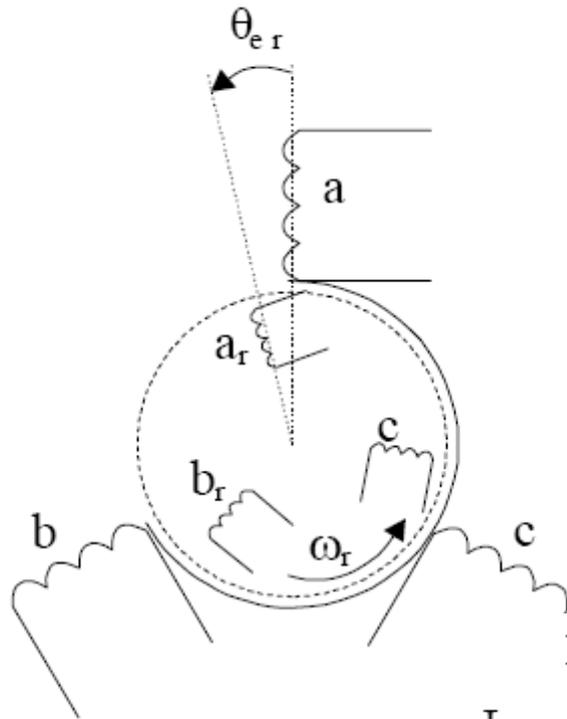


- Las autoinductancias de las fases del rotor y estator no dependen de la posición del rotor.
- Las inductancias mutuas entre las fases del estator no dependen de la posición del rotor.
- Las inductancias mutuas entre las fases del rotor no dependen de la posición del rotor.
- Las inductancias mutuas de las fases de rotor-estator dependen de la posición del rotor.

$$\theta_{er} = p_1 \theta_r$$

$p_1$  pares de polos

# Modelo de las coordenadas de fase



La matriz de inducción es:

$$[\mathbf{L}_{abc a_r b_r c_r}(\theta_{er})] = \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{ab} & L_{ac} & L_{aa_r} & L_{ab_r} & L_{ac_r} \\ L_{ab} & L_{bb} & L_{bc} & L_{ba_r} & L_{bb_r} & L_{bc_r} \\ L_{ac} & L_{bc} & L_{cc} & L_{ca_r} & L_{cb_r} & L_{cc_r} \\ L_{aa_r} & L_{ba_r} & L_{ca_r} & L_{a_r a_r} & L_{a_r b_r} & L_{a_r c_r} \\ L_{ab_r} & L_{bb_r} & L_{cb_r} & L_{a_r b_r} & L_{b_r b_r} & L_{b_r c_r} \\ L_{ac_r} & L_{bc_r} & L_{cc_r} & L_{a_r c_r} & L_{b_r c_r} & L_{c_r c_r} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} L_{aa} = L_{bb} = L_{cc} &= L_{ls} + L_{ms}; & L_{ab} = L_{ac} = L_{bc} &= -L_{ms}/2; \\ L_{aa_r} = L_{bb_r} = L_{cc_r} &= L_{sm} \cos \theta_{er}; & L_{a_r a_r} = L_{b_r b_r} = L_{c_r c_r} &= L_{lr}^r + L_{mr}^r; \\ L_{c_r a} = L_{a_r b} = L_{b_r c} &= L_{sm} \cos\left(\theta_{er} - \frac{2\pi}{3}\right); & L_{a_r b_r} = L_{a_r c_r} = L_{b_r c_r} &= -L_{mr}^r/2; \\ L_{c_r b} = L_{b_r a} = L_{a_r c} &= L_{sm} \cos\left(\theta_{er} + \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned} \quad (2)$$

Se puede demostrar que la inductancia mutua es

$$L_{sm} = \sqrt{L_{ms} \cdot L_{mr}^r} \quad (3)$$

# Modelo de las coordenadas de fase

Se reduce el rotor al estator.

En ese caso la inductancia mutua es igual al autoinductancia del estator  $L_{srm} \rightarrow L_{sm}$

Y la autoinductancia del rotor igual a la autoinductancia del estator  $L_{mr}^r \rightarrow L_{sm}$

Para conservar el flujo y las pérdidas con las variables reducidas al estator se debe cumplir:

$$\psi_{ar} = \psi_{ar}^r \Rightarrow i_{ar} L_{sm} = i_{ar}^r L_{srm}$$

$$S_{ar} = S_{ar}^r \Rightarrow V_{ar} i_{ar} = V_{ar}^r i_{ar}^r$$

$$P_{ar} = P_{ar}^r \Rightarrow R_r i_{ar}^2 = R_r^r i_{ar}^{r2}$$

$$Q_{ar} = Q_{ar}^r \Rightarrow L_{lr} i_{ar}^2 = L_{lr}^r i_{ar}^{r2}$$



$$\frac{i_{ar}}{i_{ar}^r} = \frac{i_{br}}{i_{br}^r} = \frac{i_{cr}}{i_{cr}^r} = \frac{L_{srm}}{L_{sm}} = K_{rs} \quad (4)$$

$$\frac{V_{ar}}{V_{ar}^r} = \frac{V_{br}}{V_{br}^r} = \frac{V_{cr}}{V_{cr}^r} = \frac{i_{ar}^r}{i_{ar}} = \frac{i_{br}^r}{i_{br}} = \frac{i_{cr}^r}{i_{cr}} = \frac{1}{K_{rs}} \quad (5)$$

$$\frac{R_r}{R_r^r} = \frac{L_{lr}}{L_{lr}^r} = \frac{1}{K_{rs}^2} \quad (6)$$

$R_r$  = resistencia del rotor

$L_{lr}$  = inductancia de dispersión del rotor

# Modelo de las coordenadas de fase

La forma matricial del

## modelo de coordenadas de fase de la máquina asíncrona

$$[V] = [R][i] + \frac{d}{dt} [\Psi] \quad (7)$$

$$[V] = [V_a, V_b, V_c, V_{a_r}, V_{b_r}, V_{c_r}]^T$$

$$[i] = [i_a, i_b, i_c, i_{a_r}, i_{b_r}, i_{c_r}]^T$$

$$[R] = \text{Diag}[R_s, R_s, R_s, R_r, R_r, R_r]$$

$$[\Psi] = [L_{abca_r b_r c_r}(\theta_{er})][i] \quad (8)$$

**Ecuación mecánica** es la siguiente para la cual nos falta determinar el par electromagnético

$$\frac{J}{p_1} \frac{d\omega_r}{dt} = T_e - T_{load}; \quad \frac{d\theta_{er}}{dt} = \omega_r$$

# Modelo de las coordenadas de fase

$$\begin{aligned}
 & \qquad \qquad \qquad [L_{abc_r b_r c_r}(\theta_{er})] = \qquad \qquad \qquad (9) \\
 = & \begin{bmatrix}
 L_{ls} + L_{sm} & -L_{sm}/2 & -L_{sm}/2 & L_{sm} \cos \theta_{er} & L_{srm} \cos\left(\theta_{er} + \frac{2\pi}{3}\right) & L_{srm} \cos\left(\theta_{er} - \frac{2\pi}{3}\right) \\
 -L_{sm}/2 & L_{ls} + L_{sm} & -L_{sm}/2 & L_{srm} \cos\left(\theta_{er} - \frac{2\pi}{3}\right) & L_{sm} \cos \theta_{er} & L_{srm} \cos\left(\theta_{er} + \frac{2\pi}{3}\right) \\
 -L_{sm}/2 & -L_{sm}/2 & L_{ls} + L_{sm} & L_{srm} \cos\left(\theta_{er} + \frac{2\pi}{3}\right) & L_{srm} \cos\left(\theta_{er} - \frac{2\pi}{3}\right) & L_{sm} \cos \theta_{er} \\
 L_{sm} \cos \theta_{er} & L_{srm} \cos\left(\theta_{er} - \frac{2\pi}{3}\right) & L_{srm} \cos\left(\theta_{er} + \frac{2\pi}{3}\right) & L_{ls} + L_{sm} & -L_{sm}/2 & -L_{sm}/2 \\
 L_{srm} \cos\left(\theta_{er} + \frac{2\pi}{3}\right) & L_{sm} \cos \theta_{er} & L_{srm} \cos\left(\theta_{er} - \frac{2\pi}{3}\right) & -L_{sm}/2 & L_{ls} + L_{sm} & -L_{sm}/2 \\
 L_{srm} \cos\left(\theta_{er} - \frac{2\pi}{3}\right) & L_{srm} \cos\left(\theta_{er} + \frac{2\pi}{3}\right) & L_{sm} \cos \theta_{er} & -L_{sm}/2 & -L_{sm}/2 & L_{ls} + L_{sm}
 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Derivando la matriz de encadenamientos de flujo (8) tenemos

$$\frac{d[\psi]}{dt} = \frac{d}{dt} [[L(\theta_{er})] \bullet [i]] = \frac{d}{dt} ([L(\theta_{er})]) \bullet [i] + [L(\theta_{er})] \frac{d}{dt} [i]$$

Y sustituyendo en (7)

$$[V] = [R][i] + \left( [L] + \left[ \frac{\partial L}{\partial i} \right] [i] \right) \frac{d[i]}{dt} + \frac{d[L]}{d\theta_{er}} [i] \frac{d\theta_{er}}{dt} \qquad (10)$$

# Modelo de las coordenadas de fase

Multiplicando (10) por  $[i]^T$

$$[i]^T [V] = \underbrace{[i]^T R [i]}_{\text{Pérdidas en el bobinado}} + \underbrace{[i]^T L(\theta_{er}) \frac{d[i]}{dt}}_{\downarrow} + [i]^T \frac{d}{dt} L(\theta_{er}) [i]$$

$$\frac{d}{dt} ([i]^T \cdot L \cdot [i]) = [i]^T \frac{dL}{dt} [i] + 2 [i]^T \cdot L \cdot \frac{d[i]}{dt}$$

$$[i]^T \cdot L \cdot \frac{d[i]}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} ([i]^T \cdot L \cdot [i]) - \frac{1}{2} [i]^T \cdot \frac{dL}{dt} \cdot [i]$$

$$[i]^T [V] = \underbrace{[i]^T R [i]}_{\text{Pérdidas en el bobinado}} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{d}{dt} ([i]^T \cdot L \cdot [i])}_{\text{Variación de la energía magnética almacenada}} + \underbrace{\frac{1}{2} [i]^T \cdot \frac{dL}{dt} \cdot [i]}_{\text{Potencia electromagnética } P_e} \quad (11)$$

# Modelo de las coordenadas de fase

La potencia electromagnética la podemos expresar de la siguiente forma

$$P_e = \frac{1}{2} [i]^T \cdot \frac{dL(\theta_{er})}{dt} \cdot [i] = \frac{1}{2} [i]^T \cdot \frac{dL(\theta_{er})}{d\theta_{er}} \underbrace{\frac{d\theta_{er}}{dt}}_{\omega_r} \cdot [i] = \frac{1}{2} [i]^T \cdot \frac{dL(\theta_{er})}{d\theta_{er}} \omega_r \cdot [i]$$

Cómo sabemos que

$$P_e = T_e \frac{\omega_r}{p_1} = \frac{1}{2} [i]^T \cdot \frac{dL(\theta_{er})}{d\theta_{er}} \omega_r \cdot [i] \quad (12)$$

Podemos expresar el par electromagnético como

$$T_e = \frac{1}{2} p_1 [i]^T \cdot \frac{dL(\theta_{er})}{d\theta_{er}} \cdot [i] \quad (13)$$

Quedando la ecuación mecánica como sigue

$$\boxed{\frac{J}{p_1} \frac{d\omega_r}{dt} = \frac{1}{2} p_1 [i]^T \cdot \frac{dL(\theta_{er})}{d\theta_{er}} \cdot [i] - T_{load}} \quad (14)$$

# Modelo de las coordenadas de fase

Hemos obtenido un **modelo no lineal con coeficientes variables** con el tiempo (inductancias), incluso despreciando las pérdidas del hierro.

Se requiere métodos numéricos para resolverlo, pero el tiempo de computación es prohibitivo.

El **modelo de variables espacial o complejo** será introducido para librar a los parámetros de la dependencia de la posición del rotor.

# Modelo de variables complejas

Notación:

$$\begin{aligned} a &= e^{j\frac{2\pi}{3}}; \quad \cos\frac{2\pi}{3} = \operatorname{Re}[a]; \quad \cos\frac{4\pi}{3} = \operatorname{Re}[a^2] \\ \cos\left(\theta_{\text{er}} + \frac{2\pi}{3}\right) &= \operatorname{Re}\left[ae^{j\theta_{\text{er}}}\right]; \quad \cos\left(\theta_{\text{er}} + \frac{4\pi}{3}\right) = \operatorname{Re}\left[a^2e^{j\theta_{\text{er}}}\right]; \\ \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) &= -\frac{1}{2} \quad \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \end{aligned} \tag{15}$$

# Modelo de variables complejas

Basándonos en la ecuación (9) tenemos que para una fase el encadenamiento de flujo viene dado por

$$\begin{aligned}\psi_a = & L_{ls} i_a + L_{sm} i_a - \frac{L_{sm}}{2} i_b - \frac{L_{sm}}{2} i_c + L_{srm} \cos \theta_{er} i_{ar} + L_{srm} \cos \left( \theta_{er} + \frac{2\pi}{3} \right) i_{br} \\ & + L_{srm} \cos \left( \theta_{er} + \frac{4\pi}{3} \right) i_{cr}\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$-\frac{L_{sm}}{2} i_b = L_{sm} \left( \frac{-1}{2} \right) i_b = L_{sm} \cos \left( \frac{2\pi}{3} \right) i_b = L_{sm} \operatorname{Re} [a i_b]$$

$$-\frac{L_{sm}}{2} i_c = L_{sm} \left( \frac{-1}{2} \right) i_c = L_{sm} \cos \left( \frac{4\pi}{3} \right) i_b = L_{sm} \operatorname{Re} [a^2 i_c]$$

$$L_{srm} \cos \theta_{er} i_{ar} = L_{srm} \operatorname{Re} [e^{-j\theta_{er}}] i_{ar} = L_{srm} \operatorname{Re} [i_{ar} e^{-j\theta_{er}}]$$

$$L_{srm} \cos \left( \theta_{er} + \frac{2\pi}{3} \right) i_{br} = L_{srm} \operatorname{Re} \left[ e^{-j\theta_{er}} e^{-j\frac{2\pi}{3}} \right] i_{br} = L_{srm} \operatorname{Re} [a e^{-j\theta_{er}}] i_{br} = L_{srm} \operatorname{Re} [i_{br} a e^{-j\theta_{er}}]$$

$$L_{srm} \cos \left( \theta_{er} + \frac{4\pi}{3} \right) i_{cr} = L_{srm} \operatorname{Re} \left[ e^{-j\theta_{er}} e^{j\frac{4\pi}{3}} \right] i_{cr} = L_{srm} \operatorname{Re} [a^2 e^{-j\theta_{er}}] i_{cr} = L_{srm} \operatorname{Re} [i_{br} a^2 e^{-j\theta_{er}}]$$

# Modelo de variables complejas

El encadenamiento se puede expresar de la siguiente forma:

$$\psi_a = L_{ls} i_a + L_{sm} \operatorname{Re}[i_a + ai_b + a^2 i_c] + L_{sm} \operatorname{Re}[(i_{ar} + ai_{br} + a^2 i_{cr}) e^{j\theta_{er}}] \quad (16)$$

$$\psi_{ar} = L_{lr} i_{ar} + L_{sm} \operatorname{Re}[i_{ar} + ai_{br} + a^2 i_{cr}] + L_{sm} \operatorname{Re}[(i_a + ai_b + a^2 i_c) e^{j\theta_{er}}] \quad (17)$$

Introducimos las siguientes variables complejas:

$$\Rightarrow \bar{i}_s^s = \frac{2}{3}(i_a + ai_b + a^2 i_c)$$

$$\Rightarrow \bar{i}_r^r = \frac{2}{3}(i_{ar} + ai_{br} + a^2 i_{cr})$$

$$\operatorname{Re}(\bar{i}_s^s) = \frac{2}{3} \left( i_a + \left( -\frac{1}{2} \right) i_b + \left( -\frac{1}{2} \right) i_c \right) = i_a - \frac{1}{3}(i_a + i_b + i_c)$$

$$\operatorname{Re}(\bar{i}_r^r) = i_{ar} - \frac{1}{3}(i_{ar} + i_{br} + i_{cr})$$

# Modelo de variables complejas

En régimen transitorio y estacionario simétrico se cumple

$$i_a + i_b + i_c = i_{ar} + i_{br} + i_{cr} = 0 \Rightarrow \quad \operatorname{Re}(\bar{i}_s^s) = i_a \quad \operatorname{Re}(\bar{i}_r^r) = i_{ar}$$

En este caso las ecuaciones (16) y (17) quedan como sigue

$$\left. \begin{aligned} \psi_a &= L_{ls} \operatorname{Re}(\bar{i}_s^s) + L_m \operatorname{Re}(\bar{i}_s^s + \bar{i}_r^r e^{j\theta_{er}}) \\ \psi_{ar} &= L_{lr} \operatorname{Re}(\bar{i}_r^r) + L_m \operatorname{Re}(\bar{i}_r^r + \bar{i}_s^s e^{-j\theta_{er}}) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_a &= L_s \operatorname{Re}(\bar{i}_s^s) + L_m \operatorname{Re}(\bar{i}_r^r e^{j\theta_{er}}) \\ \psi_{ar} &= L_r \operatorname{Re}(\bar{i}_r^r) + L_m \operatorname{Re}(\bar{i}_s^s e^{-j\theta_{er}}) \end{aligned} \right\}$$

$$L_m = \frac{3}{2} L_{ms} \quad L_s = L_{ls} + L_m \quad L_r = L_{lr} + L_m$$

Representación similar se puede obtener para el resto de fases.

# Modelo de variables complejas

Se puede obtener

$$\begin{aligned}\bar{V}_s^s &= R_s \bar{i}_s^s + \frac{d\bar{\psi}_s^s}{dt}; & \bar{\psi}_s^s &= L_s \bar{i}_s^s + L_m \bar{i}_r^r e^{j\theta_{er}} \\ \bar{V}_r^r &= R_r \bar{i}_r^r + \frac{d\bar{\psi}_r^r}{dt}; & \bar{\psi}_r^r &= L_r \bar{i}_r^r + L_m \bar{i}_s^s e^{-j\theta_{er}}\end{aligned}\quad (17)$$

donde

$$\bar{V}_s^s = \frac{2}{3} (V_a + aV_b + a^2V_c); \quad \bar{V}_r^r = \frac{2}{3} (V_{ar} + aV_{br} + a^2V_{cr})$$

En estas ecuaciones las variables del estator son dadas en coordenadas del estator y las variables del rotor en coordenadas del rotor.

Haciendo uso de una rotación de las variables complejas en el estator de un ángulo general  $\theta_b$  y en el rotor  $\theta_b - \theta_{er}$  obtendremos todas las variables en un sistema de referencia único que rota a una velocidad eléctrica  $\omega_b$ .

# Modelo de variables complejas

$$\omega_b = \frac{d\theta_b}{dt}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_s &= \bar{\Psi}_s^b e^{j\theta_b}; & \bar{i}_s &= \bar{i}_s^b e^{j\theta_b}; & \bar{V}_s &= \bar{V}_s^b e^{j\theta_b}; \\ \bar{\Psi}_r &= \bar{\Psi}_r^b e^{j(\theta_b - \theta_{er})}; & \bar{i}_r &= \bar{i}_r^b e^{j(\theta_b - \theta_{er})}; & \bar{V}_r &= \bar{V}_r^b e^{j(\theta_b - \theta_{er})} \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuaciones (17)

$$\bar{V}_s^b e^{j\theta_b} = R_s \left( \bar{i}_s^b e^{j\theta_b} \right) + \underbrace{\frac{d(\bar{\psi}_s^b e^{j\theta_b})}{dt}}_{\frac{d\bar{\psi}_s^b}{dt} e^{j\theta_b} + \bar{\psi}_s^b e^{j\theta_b} \frac{d\theta_b}{dt}}$$

Eliminando la etiqueta b

$$\begin{aligned} \bar{V}_s &= R_s \bar{i}_s + \frac{d\bar{\Psi}_s}{dt} + j\omega_b \bar{\Psi}_s; & \bar{\Psi}_s &= L_s \bar{i}_s + L_m \bar{i}_r \\ \bar{V}_r &= R_r \bar{i}_r + \frac{d\bar{\Psi}_r}{dt} + j(\omega_b - \omega_r) \bar{\Psi}_r; & \bar{\Psi}_r &= L_r \bar{i}_r + L_m \bar{i}_s \end{aligned} \quad (18)$$

# Modelo de variables complejas

Multiplicando la ecuación (18) por  $\bar{\dot{i}}_s$

En el primer término se obtiene la potencia y el término que depende de  $\psi_s$  es lo que corresponde a la potencia electromagnética por lo que el par Electromagnético es

$$T_e = \frac{3}{2} \cdot p_1 \cdot \operatorname{Re}\left(j \cdot \bar{\psi}_s \cdot \bar{i}_s^*\right) = -\frac{3}{2} \cdot p_1 \cdot \operatorname{Re}\left(j \cdot \bar{\psi}_r \cdot \bar{i}_r^*\right) \quad (19)$$

Añadiendo la ecuación del movimiento completamos el modelo de la máquina de Inducción de variables complejas (fasor espacial)

$$\frac{J}{p_1} \frac{d\omega_r}{dt} = T_e - T_{\text{load}}; \quad \frac{d\theta_{er}}{dt} = \omega_r$$

Estas variables complejas se pueden descomponer en el plano en dos ejes ortogonales dq que rota a una velocidad  $\omega_b$  esto nos da el **modelo de Park o**

**modelo dq0**

$$\bar{V}_s = V_d + j \cdot V_q; \quad \bar{i}_s = i_d + j \cdot i_q; \quad \bar{\Psi}_s = \Psi_d + j \cdot \Psi_q \quad (20)$$

$$\bar{V}_r = V_{dr} + j \cdot V_{qr}; \quad \bar{i}_r = i_{dr} + j \cdot i_{qr}; \quad \bar{\Psi}_r = \Psi_{dr} + j \cdot \Psi_{qr}$$

Con las ecuaciones 18, 19 y 20 obtenemos las ecuaciones del modelo dq

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi_d}{dt} &= V_d - R_s \cdot i_d + \omega_b \cdot \Psi_q \\ \frac{d\Psi_q}{dt} &= V_q - R_s \cdot i_q - \omega_b \cdot \Psi_d \end{aligned} \quad (21)$$

$$\frac{d\Psi_{dr}}{dt} = V_{dr} - R_r \cdot i_{dr} + (\omega_b - \omega_r) \cdot \Psi_{qr}$$

$$\frac{d\Psi_{qr}}{dt} = V_{qr} - R_r \cdot i_{qr} - (\omega_b - \omega_r) \cdot \Psi_{dr}$$

$$T_e = \frac{3}{2} p_1 (\Psi_d i_q - \Psi_q i_d) = \frac{3}{2} p_1 L_m (i_q i_{dr} - i_d i_{qr})$$

# Modelo de Park

La transformación de Park para el voltaje del estator es

$$\begin{bmatrix} V_d \\ V_q \\ V_0 \end{bmatrix} = [P(\theta_b)] \cdot \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix}$$
$$[P(\theta_b)] = \frac{2}{3} \cdot \begin{bmatrix} \cos(-\theta_b) & \cos\left(-\theta_b + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(-\theta_b - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin(-\theta_b) & \sin\left(-\theta_b + \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(-\theta_b - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Y la transformación inversa es

$$[P(\theta_b)]^{-1} = \frac{3}{2} \cdot [P(\theta_b)]^T$$

# Modelo de Park

Para el rotor es similar pero con  $\theta_b - \theta_{er}$  en lugar de  $\theta_b$

Se puede probar que las variables reales homopolares  $V_0, i_0, V_{0r}, i_{0r}, \Psi_0, \Psi_{0r}$  no intervienen en la conservación de la energía

$$\frac{d\Psi_0}{dt} = V_0 - R_s \cdot i_0; \quad \Psi_0 \approx L_{0s} \cdot i_0$$

$$\frac{d\Psi_{0r}}{dt} = V_{0r} - R_r \cdot i_{0r}; \quad \Psi_{0r} \approx L_{0r} \cdot i_0$$

$L_{0s}$  y  $L_{0r}$  son las inductancias homopolares del estator y el rotor. Sus valores son

Sus valores son iguales o menores a las respectivas inductancias de dispersión

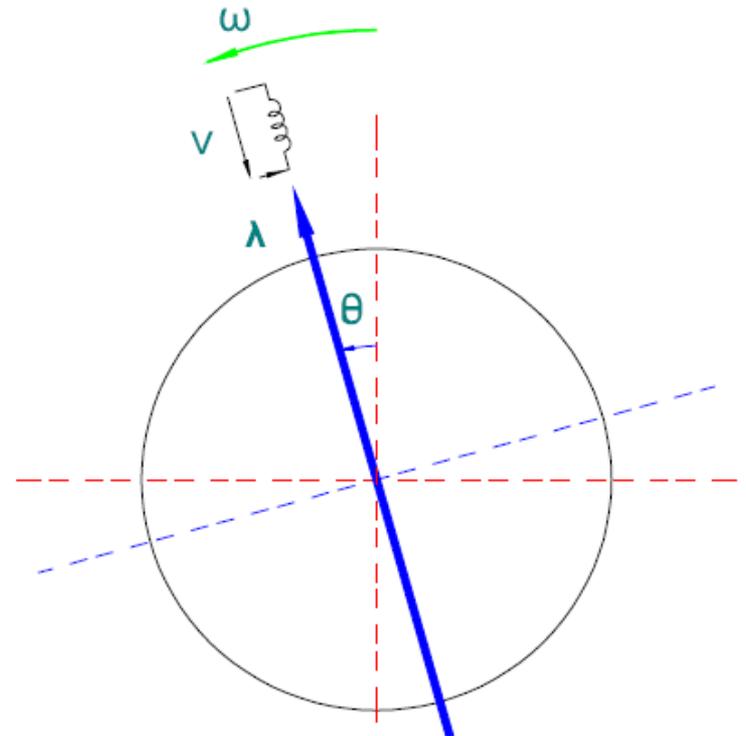
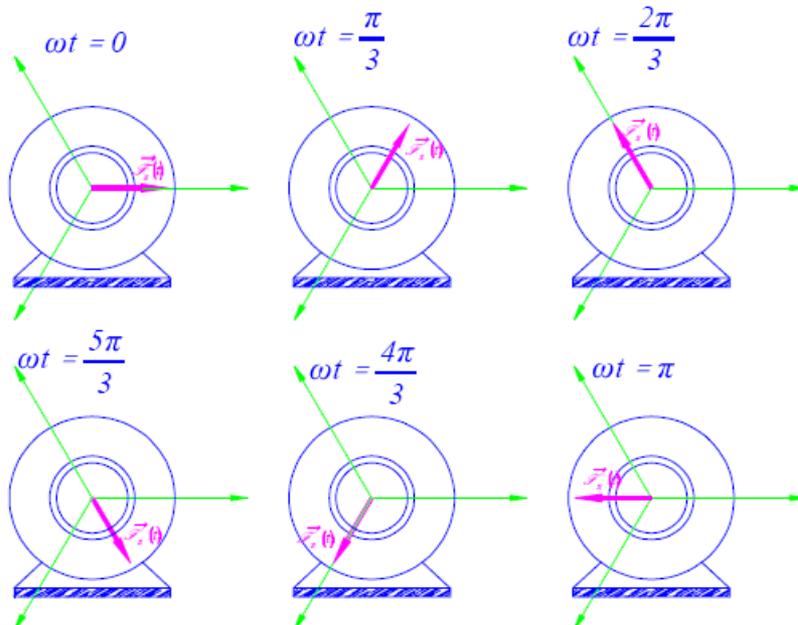
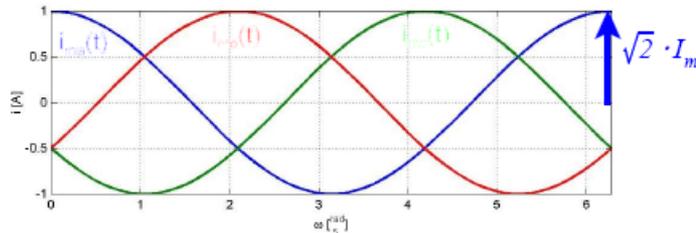
$$L_{ls} \quad \text{y} \quad L_{lr}$$

## COMENTARIO:

- Ambos modelos exhiben inductancias independientes de la posición del rotor.
- El Modelo de variables complejas tiene menos ecuaciones que el modelo dq, pero trabaja con variables complejas.
- Cuando se resuelven las ecuaciones en el espacio de estados, sólo el modelo dq, con variables reales, se beneficia de los software comerciales (Mathematica, Matlab-Simulink, Spice, etc).
- Ambos modelos son prácticos en el estudio de transitorios y control de la alimentación de los motores de Inducción desde redes de potencia de voltaje o desde conversores PWM.
- Es fácil de incorporar el efecto de saturación y efecto SKIM del rotor.

## Rotación de una bobina

En un motor de inducción tenemos un campo magnético giratorio en el entrehierro. Si el único requerimiento fuera el producir un vector espacial de rotación circular, se podría obtener con una simple bobina rotando a la misma velocidad que el flujo giratorio y alimentada con corriente continua.



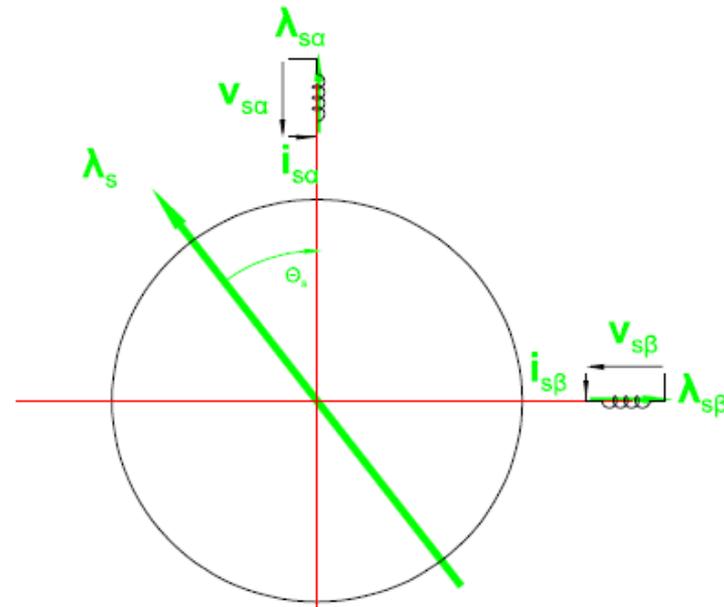
# Modelo de Park

Pero el problema es que con una sola bobina, sólo es posible modelar el estado estacionario porque el acoplamiento entre las bobinas individuales son despreciados.

## Sistema de referencia estacionario

Un círculo puede ser descrito por dos coordenadas en el espacio (x e y). Esta idea puede ser usada si colocamos dos bobinas a  $90^\circ$  alimentados con corrientes alterna desfasada en  $90^\circ$ . Estas dos bobinas son normalmente llamadas  $\alpha$  - bobina y  $\beta$  -bobina. La referencia para la  $\alpha$  -bobina es llamada  $\alpha$ -eje y se encuentra sobre la fase A.

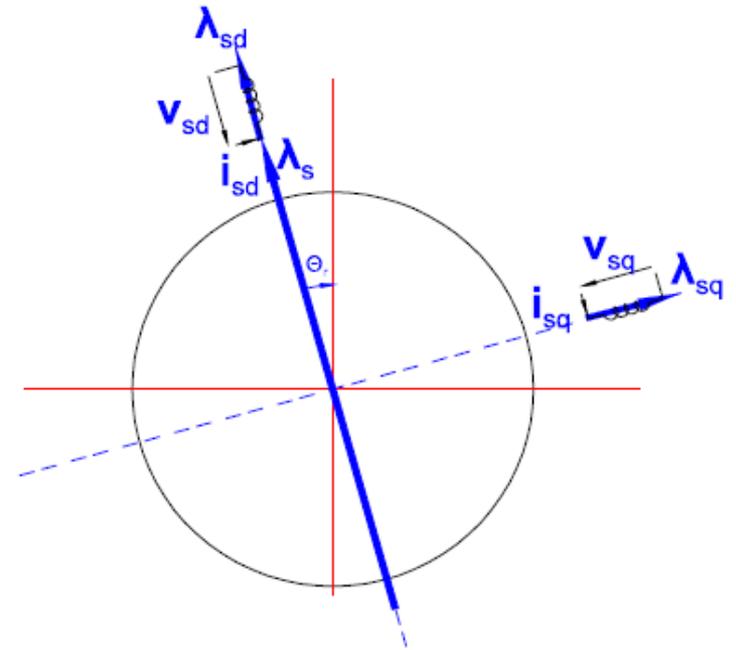
Este método reduce el sistema tres fases en un sistema de dos fases



## Sistema de referencia giratorio

Combinando las bobinas giratorias y un sistema de referencia estacionario, un conjunto de dos bobinas giratorias es mostrado en la siguiente figura. La fase de referencia sobre la fase A es llamada d-eje (eje directo) y el otro eje es el q-eje (eje de cuadratura).

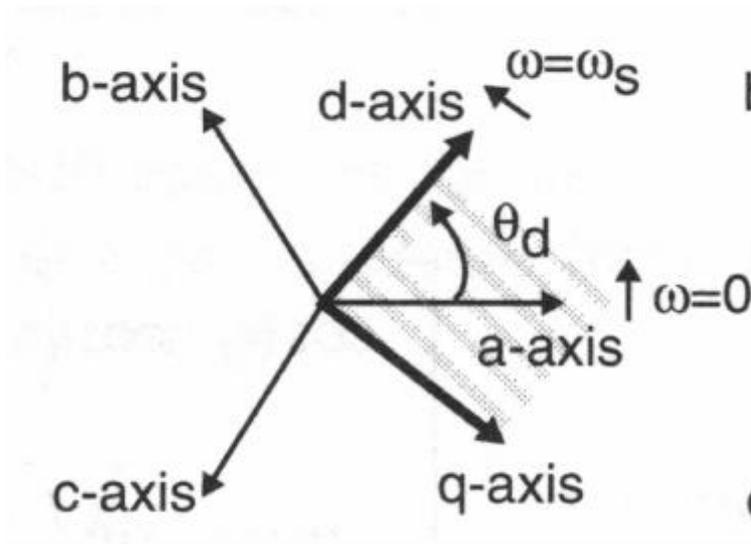
Haciendo esto es posible modelar el acoplamiento entre las bobinas individuales. Además, otra ventaja es que en estado estacionario, el flujo de corriente en las bobinas son de corriente continua. Usando el sistema de referencia giratorio, las diferenciales de cualquier variable de estado son cero en estado estacionario y cuando las diferenciales son diferentes de cero, dan sólo los cambios del estado estacionario. El sistema de referencia giratorio también la ventaja que el ángulo del rotor es conocido (es un estado).



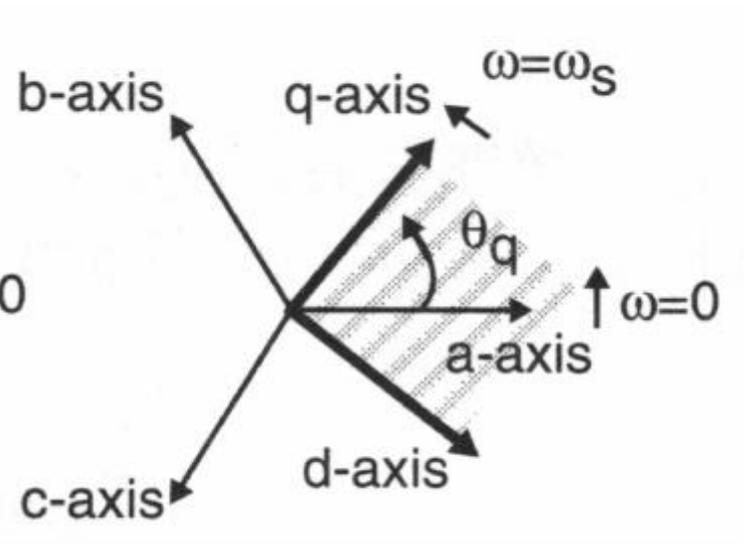
# Modelo de Park

Convenio usado en

## Europa



## Estados Unidos



## Transformación de corriente, voltaje, flujo, etc.

La matriz de transformación para el sistema dq0 viene dado por

$$\mathbf{f}_{dq0} = \mathbf{T}_{dq0} \cdot \mathbf{f}_{abc} \quad \mathbf{T}_{dq0} = \frac{2}{3} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta_d) & \cos\left(\theta_d - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_d - \frac{4\pi}{3}\right) \\ -\sin(\theta_d) & -\sin\left(\theta_d - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta_d - \frac{4\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

El ángulo  $\theta_d$  es el ángulo entre el eje d y el eje de la fase a

La matriz de transformación inversa es

$$\mathbf{f}_{abc} = \mathbf{T}_{dq0}^{-1} \cdot \mathbf{f}_{dq0} \quad \mathbf{T}_{dq0}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_d) & -\sin(\theta_d) & 1 \\ \cos\left(\theta_d - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta_d - \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \\ \cos\left(\theta_d - \frac{4\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta_d - \frac{4\pi}{3}\right) & 1 \end{bmatrix}$$

# Modelo de Park

La matriz de transformación para el sistema  $\alpha\beta$  es el mismo haciendo el ángulo cero

$$\mathbf{f}_{\alpha\beta 0} = \mathbf{T}_{\alpha\beta 0} \cdot \mathbf{f}_{abc}$$

$$\mathbf{T}_{\alpha\beta 0} = \frac{2}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

La matriz de transformación inversa es

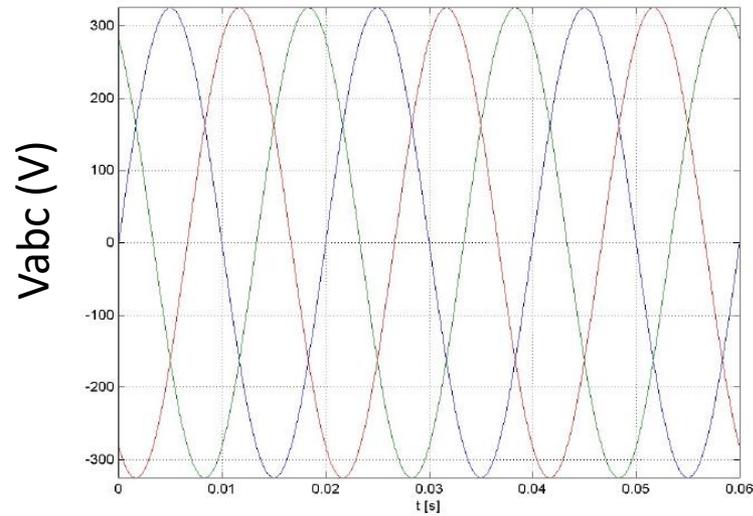
$$\mathbf{f}_{abc} = \mathbf{T}_{\alpha\beta 0}^{-1} \cdot \mathbf{f}_{\alpha\beta 0}$$

$$\mathbf{T}_{\alpha\beta 0}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

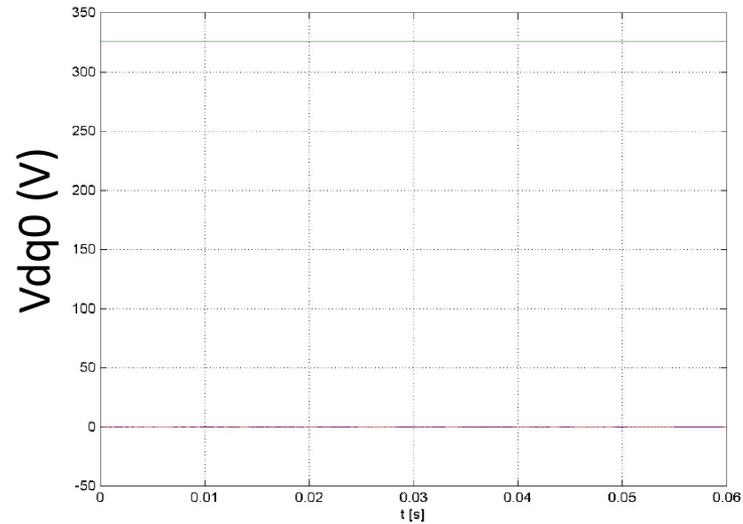
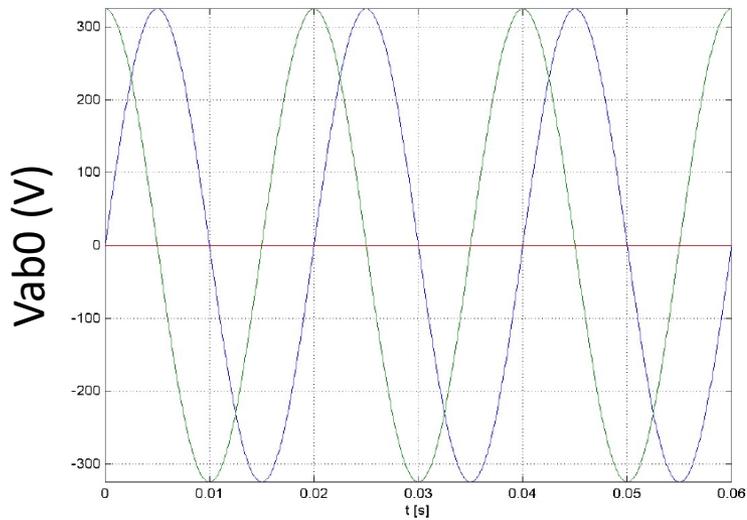
La matriz de transformación entre los sistemas de referencia viene dada por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_d \\ \mathbf{f}_q \\ \mathbf{f}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{f}_\alpha \\ \mathbf{f}_\beta \\ \mathbf{f}_0 \end{bmatrix}$$

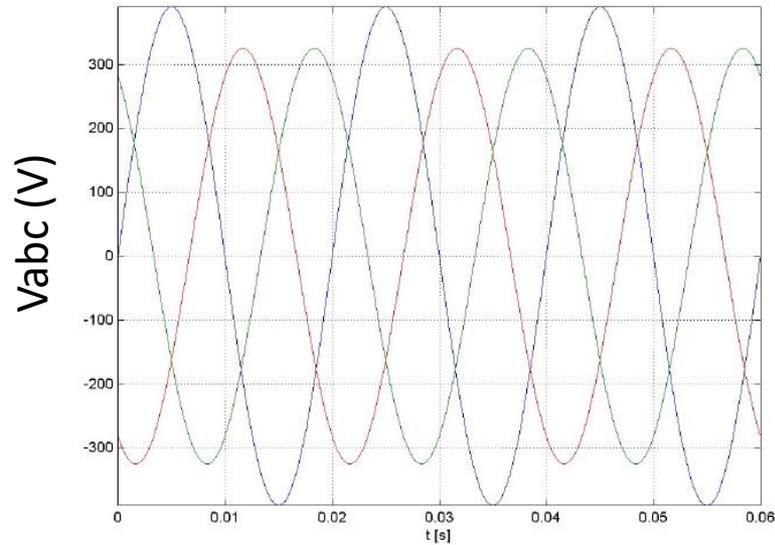
# Modelo de Park



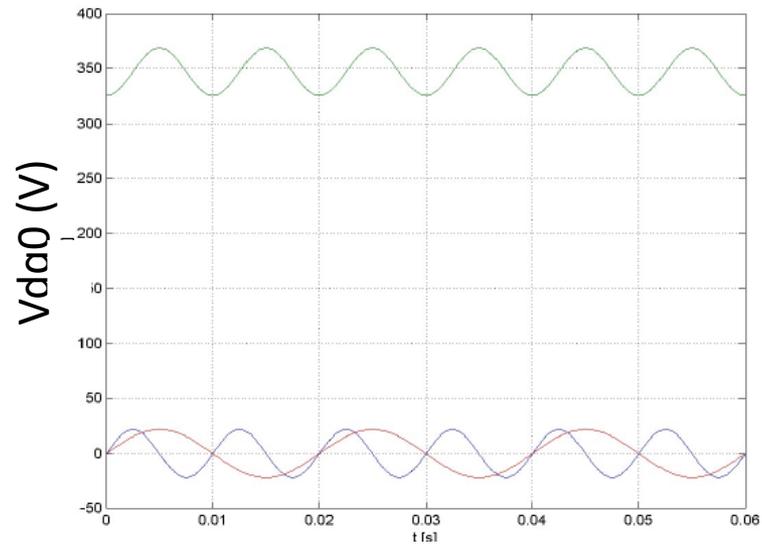
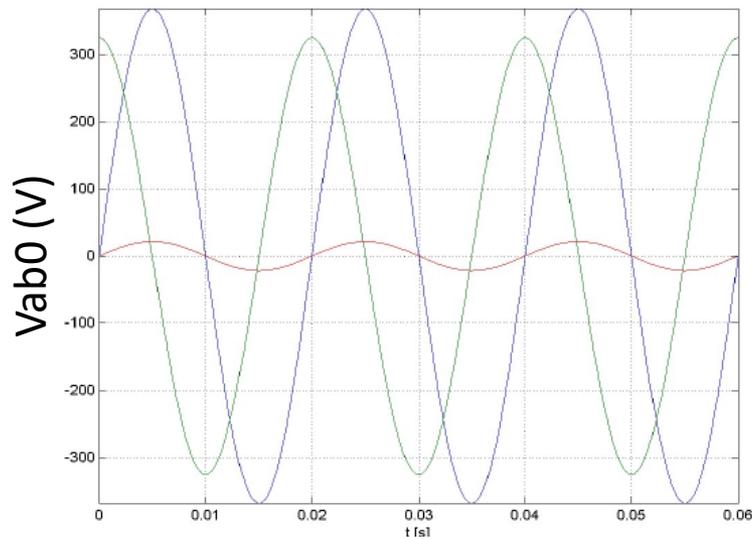
En la figura se representa una fuente de voltaje trifásica balanceada



# Modelo de Park



En la figura se representa una fuente de voltaje trifásica NO balanceada



## Transformación de la ecuación de voltaje

### 1- Transformación de voltajes del estator

$$\mathbf{v}_s^{abc} = \mathbf{v}_{r_s}^{abc} + \mathbf{v}_{\lambda_s}^{abc} \Rightarrow \mathbf{T}_{dq0} \cdot \mathbf{v}_s^{abc} = \mathbf{T}_{dq0} \cdot \mathbf{v}_{r_s}^{abc} + \mathbf{T}_{dq0} \cdot \mathbf{v}_{\lambda_s}^{abc} \Rightarrow \mathbf{v}_s^{dq0} = \mathbf{v}_{r_s}^{dq0} + \mathbf{v}_{\lambda_s}^{dq0}$$

$$\mathbf{v}_s^{abc} = \underbrace{\mathbf{r}_s^{abc} \cdot \mathbf{i}_s^{abc}}_{\mathbf{v}_{r_s}^{abc}} + \underbrace{\frac{d\lambda_s^{abc}}{dt}}_{\mathbf{v}_{\lambda_s}^{abc}} = \mathbf{r}_s^{abc} \cdot \mathbf{i}_s^{abc} + \underbrace{p\lambda_s^{abc}}_{\mathbf{v}_{\lambda_s}^{abc}}$$

$$\mathbf{v}_{r_s}^{dq0} = \mathbf{T}_{dq0} \cdot \mathbf{v}_{r_s}^{abc} = \mathbf{T}_{dq0} \cdot \left( \mathbf{r}_s^{abc} \cdot \left( \mathbf{T}_{dq0}^{-1} \cdot \mathbf{i}_s^{dq0} \right) \right)$$

$$\mathbf{v}_{\lambda_s}^{dq0} = \mathbf{T}_{dq0} \cdot \mathbf{v}_{\lambda_s}^{abc} = \mathbf{T}_{dq0} \cdot \left( p \left( \mathbf{T}_{dq0}^{-1} \cdot \lambda_s^{dq0} \right) \right)$$

$$\mathbf{v}_s^{dq0} = \underbrace{\mathbf{T}_{dq0} \cdot \left( \mathbf{r}_s^{abc} \cdot \left( \mathbf{T}_{dq0}^{-1} \cdot \mathbf{i}_s^{dq0} \right) \right)}_{\mathbf{v}_{r_s}^{dq0}} + \underbrace{\mathbf{T}_{dq0} \cdot \left( p \left( \mathbf{T}_{dq0}^{-1} \cdot \lambda_s^{dq0} \right) \right)}_{\mathbf{v}_{\lambda_s}^{dq0}}$$

# Modelo de Park

$$\Rightarrow \mathbf{p}(\mathbf{T}_{dq0}^{-1} \cdot \lambda_s^{dq0}) = \mathbf{p}\mathbf{T}_{dq0}^{-1} \cdot \lambda_s^{dq0} + \mathbf{T}_{dq0}^{-1} \cdot \mathbf{p}\lambda_s^{dq0}$$

$$\mathbf{p}\mathbf{T}_{dq0}^{-1} \cdot \lambda_s^{dq0} = \frac{d\mathbf{T}_{dq0}^{-1}}{dt} \cdot \lambda_s^{dq0} = \frac{d\mathbf{T}_{dq0}^{-1}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \lambda_s^{dq0} = \frac{d\mathbf{T}_{dq0}^{-1}}{d\theta} \cdot \left(\frac{d\theta}{dt}\right) \cdot \lambda_s^{dq0}$$

$$\frac{d\mathbf{T}_{dq0}^{-1}}{d\theta} = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ -\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & 0 \\ -\sin\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

$\omega$

$$\mathbf{p}(\mathbf{T}_{dq0}^{-1} \cdot \lambda_s^{dq0}) = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ -\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & 0 \\ -\sin\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) & 0 \end{bmatrix} \cdot \omega \cdot \lambda_s^{dq0} + \mathbf{T}_{dq0}^{-1} \cdot \mathbf{p}\lambda_s^{dq0}$$

# Modelo de Park

Debido que para la ecuación del voltaje para el estátor el ángulo  $\theta$  es conocido,  $\dot{\theta} = \omega$

$$\begin{bmatrix} -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ -\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & 0 \\ -\sin\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_s^{dq0} = \mathbf{r}_s^{dq0} \cdot \mathbf{i}_s^{dq0} + \omega \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \lambda_s^{dq0} + \mathbf{T}_{dq0}^{-1} \cdot p \lambda_s^{dq0}$$

## 2- Transformación de voltajes del rotor

$$\mathbf{v}_r^{abc} = \mathbf{r}_r^{abc} \cdot \mathbf{i}_r^{abc} + \frac{d\lambda_r^{abc}}{dt} = \mathbf{r}_r^{abc} \cdot \mathbf{i}_r^{abc} + p\lambda_r^{abc}$$

El procedimiento es exactamente el mismo que para el estator, con la excepción del ángulo usado. Debido a que el voltaje es transformado al lado del estator el ángulo es  $\theta - \theta_r$  y la transformación sería

$$\mathbf{T}_{dq0}(\theta - \theta_r)$$

Resolviendo el problema llegamos a la expresión siguiente para la ecuación de voltaje para el rotor

$$\mathbf{v}_r^{dq0} = \mathbf{r}_r^{dq0} \cdot \mathbf{i}_r^{dq0} + (\omega - \omega_r) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \lambda_r^{dq0} + \mathbf{T}_{dq0}^{-1} \cdot p\lambda_r^{dq0}$$

## Transformación de las resistencias

$$\mathbf{v}_s^{dq0} = \underbrace{\mathbf{T}_{dq0} \cdot \left( \mathbf{r}_s^{abc} \cdot \left( \mathbf{T}_{dq0}^{-1} \cdot \mathbf{i}_s^{dq0} \right) \right)}_{\mathbf{v}_{r_s}^{dq0}} + \underbrace{\mathbf{T}_{dq0} \cdot \left( p \left( \mathbf{T}_{dq0}^{-1} \cdot \lambda_s^{dq0} \right) \right)}_{\mathbf{v}_{\lambda_s}^{dq0}}$$

$$\mathbf{v}_{r_s}^{dq0} = \mathbf{T}_{dq0} \cdot \left( \mathbf{r}_s^{abc} \cdot \left( \mathbf{T}_{dq0}^{-1} \cdot \mathbf{i}_s^{dq0} \right) \right) = \mathbf{T}_{dq0} \cdot \left( r_s \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left( \mathbf{T}_{dq0}^{-1} \cdot \mathbf{i}_s^{dq0} \right) \right)$$

$$= r_s \cdot \mathbf{T}_{dq0} \cdot \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left( \mathbf{T}_{dq0}^{-1} \cdot \mathbf{i}_s^{dq0} \right) \right) = r_s \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{T}_{dq0} \cdot \left( \left( \mathbf{T}_{dq0}^{-1} \cdot \mathbf{i}_s^{dq0} \right) \right)$$

$$= r_s \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{i}_s^{dq0}$$

$\mathbf{r}_s^{abc} = \mathbf{r}_s^{dq0}$

$= r_s \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

# Modelo de Park

## Transformación de los encadenamientos de flujo

Para el estator tenemos

$$\lambda_s^{abc} = \mathbf{L}_{ss}^{abc} \cdot \mathbf{i}_s^{abc} + \mathbf{L}_{rs}^{abc} \cdot \mathbf{i}_r^{abc}$$

$$\begin{aligned} \lambda_s^{dq0} &= \mathbf{T}_{dq0} \cdot \lambda_s^{abc} = \mathbf{T}_{dq0} \cdot (\mathbf{L}_{ss}^{abc} \cdot \mathbf{i}_s^{abc} + \mathbf{L}_{sr}^{abc} \cdot \mathbf{i}_r^{abc}) \\ &= \mathbf{T}_{dq0}(\theta) \cdot \mathbf{L}_{ss}^{abc} \cdot \mathbf{T}_{dq0}^{-1}(\theta) \cdot \mathbf{i}_s^{dq0} + \mathbf{T}_{dq0}(\theta) \cdot \mathbf{L}_{sr}^{abc} \cdot \mathbf{T}_{dq0}^{-1}(\theta - \theta_r) \cdot \mathbf{i}_r^{dq0} \end{aligned}$$

Resolviendo esta expresión, obtenemos

$$\lambda_s^{dq0} = \begin{bmatrix} L_{ls} + \frac{3}{2} \cdot L_{ss} & 0 & 0 \\ 0 & L_{ls} + \frac{3}{2} \cdot L_{ss} & 0 \\ 0 & 0 & L_{ls} + \frac{3}{2} \cdot L_{ss} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{i}_s^{dq0} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \cdot L_{ss} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \cdot L_{ss} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{i}_r^{dq0}$$

# Modelo de Park

Para el rotor tenemos

$$\lambda_r^{abc} = \mathbf{L}_{rs}^{abc} \cdot \mathbf{i}_s^{abc} + \mathbf{L}_{rr}^{abc} \cdot \mathbf{i}_r^{abc}$$

$$\begin{aligned}\lambda_r^{dq0} &= \mathbf{T}_{dq0} \cdot \lambda_r^{abc} = \mathbf{T}_{dq0} \cdot (\mathbf{L}_{rs}^{abc} \cdot \mathbf{i}_s^{abc} + \mathbf{L}_{rr}^{abc} \cdot \mathbf{i}_r^{abc}) \\ &= \mathbf{T}_{dq0}(\theta - \theta_r) \cdot \mathbf{L}_{rs}^{abc} \cdot \mathbf{T}_{dq0}^{-1}(\theta) \cdot \mathbf{i}_s^{dq0} + \mathbf{T}_{dq0}(\theta - \theta_r) \cdot \mathbf{L}_{rr}^{abc} \cdot \mathbf{T}_{dq0}^{-1}(\theta - \theta_r) \cdot \mathbf{i}_r^{dq0}\end{aligned}$$

Resolviendo esta expresión, obtenemos

$$\lambda_r^{dq0} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \cdot L_{ss} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \cdot L_{ss} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{i}_s^{dq0} + \begin{bmatrix} L_{ls} + \frac{3}{2} \cdot L_{ss} & 0 & 0 \\ 0 & L_{ls} + \frac{3}{2} \cdot L_{ss} & 0 \\ 0 & 0 & L_{ls} + \frac{3}{2} \cdot L_{ss} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{i}_r^{dq0}$$

# Modelo de Park

Por tanto vemos que

- No hay ángulos en las matrices.
- El sistema está desacoplado (Hay ceros fuera de la diagonal).
- La secuencia cero en el estator y en el rotor son enteramente independiente.

La expresión compacta de las ecuaciones anteriores es

$$\lambda_{dq0} = \mathbf{L}_{dq0} \cdot \mathbf{i}_{dq0}$$



$$\begin{bmatrix} \lambda_{ds} \\ \lambda_{qs} \\ \lambda_{0s} \\ \lambda_{dr} \\ \lambda_{qr} \\ \lambda_{0r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ls} + L_m & 0 & 0 & L_m & 0 & 0 \\ 0 & L_{ls} + L_m & 0 & 0 & L_m & 0 \\ 0 & 0 & L_{ls} & 0 & 0 & 0 \\ L_m & 0 & 0 & L'_{lr} + L_m & 0 & 0 \\ 0 & L_m & 0 & 0 & L'_{lr} + L_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L'_{lr} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{ds} \\ i_{qs} \\ i_{0s} \\ i_{rd} \\ i_{rq} \\ i_{0r} \end{bmatrix}$$

## Circuito equivalente

Los resultados anteriores son un conjunto de ecuaciones que describen el sistema electromagnético en un sistema de referencia móvil.

Estas ecuaciones que describen el sistema podrían ser interpretadas como un circuito equivalente, que podría ayudar a entender la dinámica del sistema.

$$\mathbf{v}_s^{dq0} = \mathbf{r}_s^{dq0} \cdot \mathbf{i}_s^{dq0} + \omega \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \lambda_s^{dq0} + \mathbf{T}_{dq0}^{-1} \cdot p\lambda_s^{dq0}$$

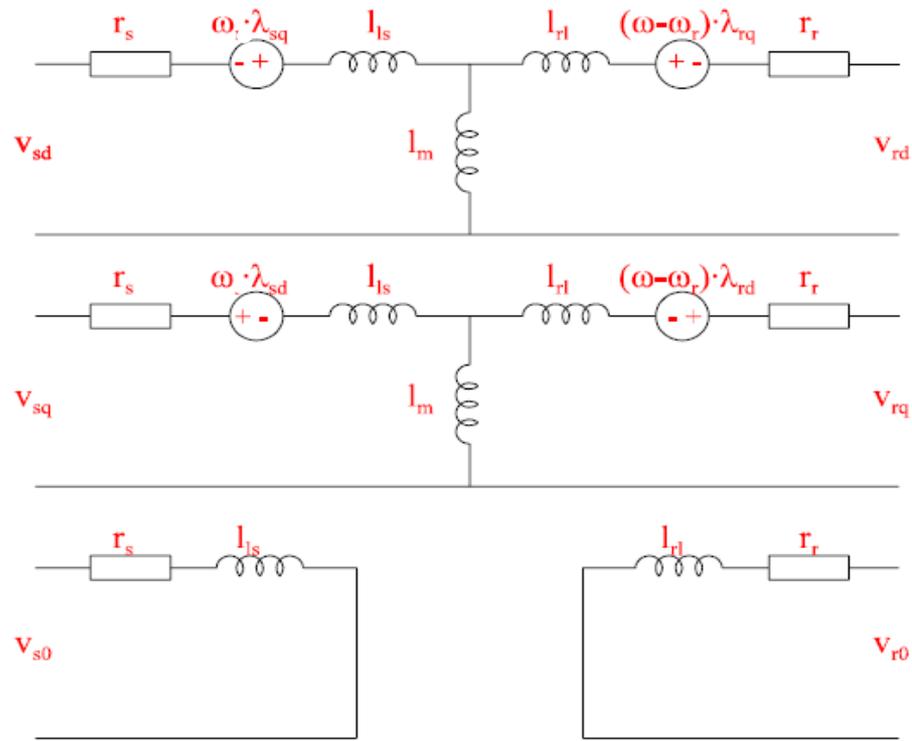
$$\mathbf{v}_r^{dq0} = \mathbf{r}_r^{dq0} \cdot \mathbf{i}_r^{dq0} + (\omega - \omega_r) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \lambda_r^{dq0} + \mathbf{T}_{dq0}^{-1} \cdot p\lambda_r^{dq0}$$

# Modelo de Park

**Para un sistema de referencia móvil tenemos**

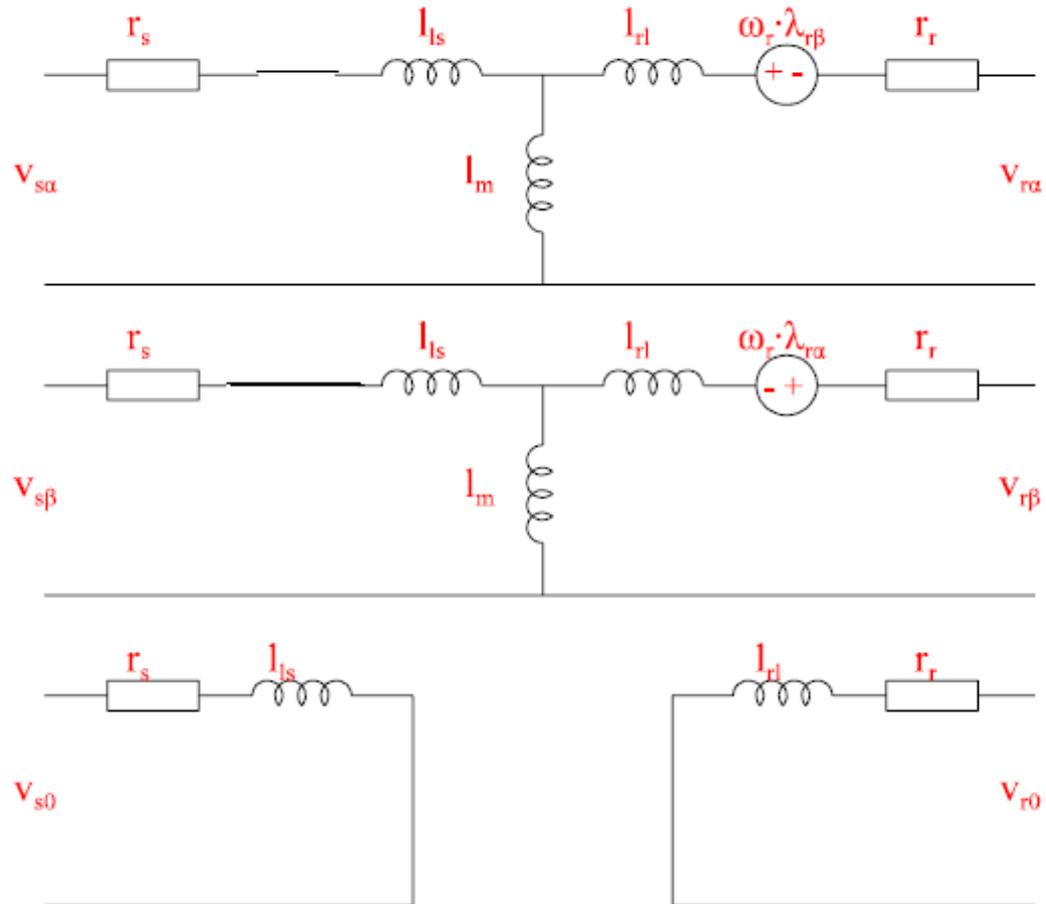
$$\mathbf{v}_s^{dq0} = \mathbf{r}_s^{dq0} \cdot \mathbf{i}_s^{dq0} + \omega \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \lambda_s^{dq0} + \mathbf{T}_{dq0}^{-1} \cdot p \lambda_s^{dq0}$$

$$\mathbf{v}_r^{dq0} = \mathbf{r}_r^{dq0} \cdot \mathbf{i}_r^{dq0} + (\omega - \omega_r) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \lambda_r^{dq0} + \mathbf{T}_{dq0}^{-1} \cdot p \lambda_r^{dq0}$$



# Modelo de Park

Para un sistema de referencia fijo tenemos



## Par electromagnético

$$P_{in} = v_{sa} \cdot i_{sa} + v_{sb} \cdot i_{sb} + v_{sc} \cdot i_{sc} + v_{ra} \cdot i_{ra} + v_{rb} \cdot i_{rb} + v_{rc} \cdot i_{rc}$$

$$P_{in} = \frac{3}{2} \cdot (v_{sd} \cdot i_{sd} + v_{sq} \cdot i_{sq} + 2 \cdot v_{s0} \cdot i_{s0} + v_{rd} \cdot i_{rd} + v_{rq} \cdot i_{rq} + 2 \cdot v_{r0} \cdot i_{r0})$$

Pérdidas en Cobre

$$P_{in} = \frac{3}{2} \cdot \left( \begin{array}{l} r_s \cdot i_{sd}^2 + \omega \cdot \lambda_{sq} \cdot i_{sd} + p\lambda_{sd} \cdot i_{sd} \\ + r_s \cdot i_{sq}^2 - \omega \cdot \lambda_{sd} \cdot i_{sq} + p\lambda_{sq} \cdot i_{sq} \\ + 2 \cdot r_s \cdot i_{s0}^2 + 0 + 2 \cdot p\lambda_{s0} \cdot i_{s0} \\ + r_r \cdot i_{rd}^2 + (\omega - \omega_r) \cdot \lambda_{rq} \cdot i_{rd} + p\lambda_{rd} \cdot i_{rd} \\ + r_r \cdot i_{rq}^2 - (\omega - \omega_r) \cdot \lambda_{rd} \cdot i_{rq} + p\lambda_{rq} \cdot i_{rq} \\ + 2 \cdot r_r \cdot i_{r0}^2 + 0 + 2 \cdot p\lambda_{r0} \cdot i_{r0} \end{array} \right)$$

Cambio energético entre bobina y las partes magnéticas

Describe la energía eléctrica convertida a energía mecánica y viceversa

# Modelo de Park

$$\begin{aligned} P_{el} &= \frac{3}{2} \cdot (\omega \cdot \lambda_{sq} \cdot i_{sd} - \omega \cdot \lambda_{sd} \cdot i_{sq} + (\omega - \omega_r) \cdot \lambda_{rq} \cdot i_{rd} - (\omega - \omega_r) \cdot \lambda_{rd} \cdot i_{rq}) \\ &= \frac{3}{2} \cdot (\omega \cdot (\lambda_{sq} \cdot i_{sd} - \lambda_{sd} \cdot i_{sq}) + (\omega - \omega_r) \cdot (\lambda_{rq} \cdot i_{rd} - \lambda_{rd} \cdot i_{rq})) \end{aligned}$$

$$P_{el} = \omega_r \cdot T_{el}$$

$$T'_{el} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\omega_r} \cdot [\omega \cdot (\lambda_{sq} \cdot i_{sd} - \lambda_{sd} \cdot i_{sq}) + (\omega - \omega_r) \cdot (\lambda_{rq} \cdot i_{rd} - \lambda_{rd} \cdot i_{rq})]$$

$$T_{el} = T'_{el} \cdot \frac{p}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{p}{\omega_r \cdot 2} \cdot [\omega \cdot (\lambda_{sq} \cdot i_{sd} - \lambda_{sd} \cdot i_{sq}) + (\omega - \omega_r) \cdot (\lambda_{rq} \cdot i_{rd} - \lambda_{rd} \cdot i_{rq})]$$

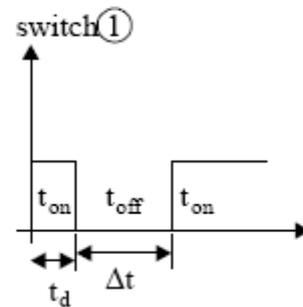
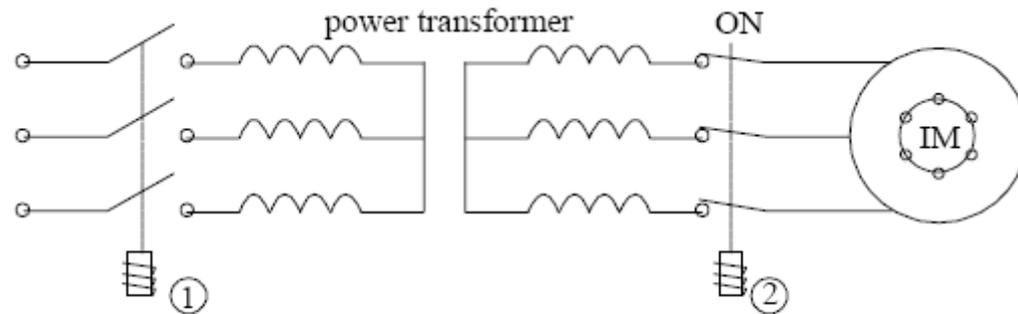
$$\lambda_{sd} \cdot i_{sq} - \lambda_{sq} \cdot i_{sd} = -(\lambda_{rd} \cdot i_{rq} - \lambda_{rq} \cdot i_{rd}) = L_m \cdot (i_{rd} \cdot i_{sq} - i_{rq} \cdot i_{sd})$$

$$\begin{aligned} T_{el} &= \frac{3}{2} \cdot \frac{p}{2} \cdot (\lambda_{rq} \cdot i_{rd} - \lambda_{rd} \cdot i_{rq}) = \frac{3}{2} \cdot \frac{p}{2} \cdot (\lambda_{sd} \cdot i_{sq} - \lambda_{sq} \cdot i_{sd}) \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{p}{2} \cdot L_m \cdot (i_{rd} \cdot i_{sq} - i_{rq} \cdot i_{sd}) \end{aligned}$$

# Ejemplo de unos de los transitorios más severos

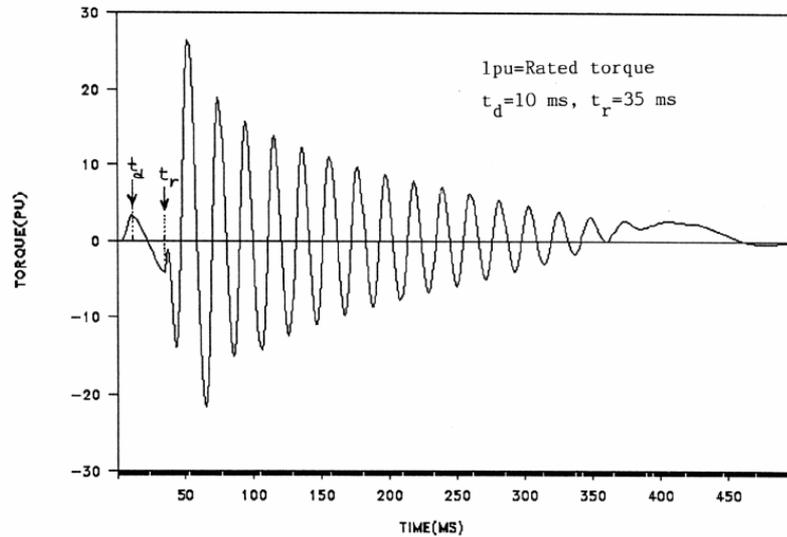
- Los picos de corriente y de par en un cortocircuito repentino, no son en general más grandes que para una conexión directa a la red cuando se encuentra a cualquier velocidad, y en este último caso el pico de corriente y par son aproximadamente los mismos cuando se conecta a la red con distintas velocidades.
- La reconexión, después de un periodo corto de desconexión antes que la velocidad y la corriente de rotor haya disminuido, produce grandes transitorios si el voltaje residual en los terminales del estator está en oposición de fase con la fuente de voltaje en el momento de reconexión.
- El caso más severo ocurre cuando el primario del transformador que alimenta un motor de inducción es desconectado por un intervalo corto (10 ms) y luego muy rápido se conecta. El secundario del transformador, ahora sin carga en el primario, introduce una gran constante de tiempo al estator el cual mantiene la continua del estator por más tiempo. (Estas corrientes de continua son corrientes que aparecen para oponerse al cambio de flujo)

# Ejemplo de unos de los transitorios más severos

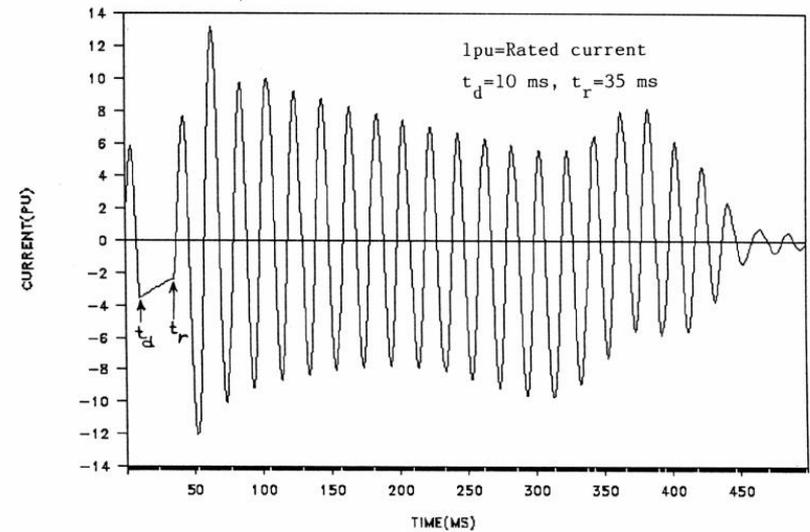


Size HP	$V_L$ line	rpm	$T_n$ Nm	$I_n$ A	$R_s$ $\Omega$	$X_{ls}$ $\Omega$	$X_m$ $\Omega$	$R_r$ $\Omega$	$X_{lr}$ $\Omega$	$J$ $\text{Kgm}^2$	$f_1$ Hz
7.5	440	1440	37.2	9.53	0.974	2.463	68.7	1.213	2.463	0.042	50

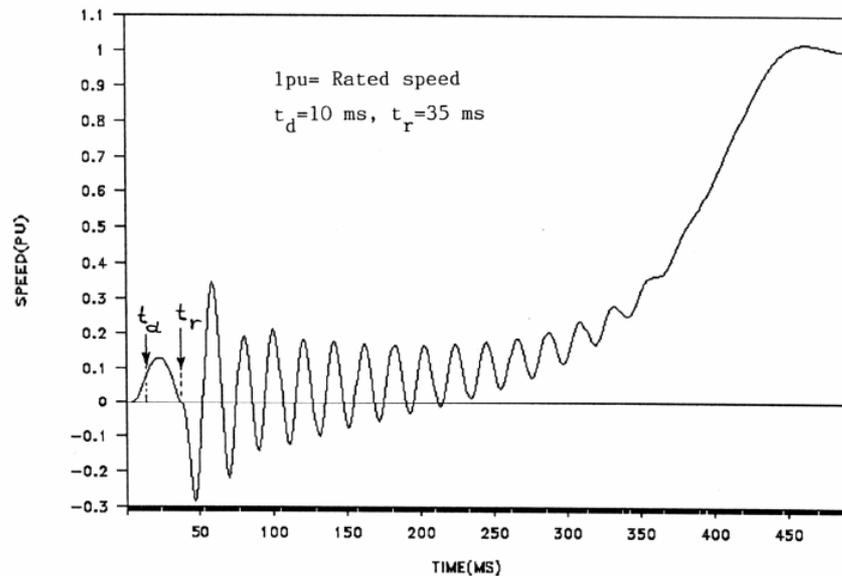
# Ejemplo de unos de los transitorios más severos



Torque-time pattern-7.5 HP machine



Current-time pattern-7.5 HP machine



Speed - time pattern - 7.5HP machine

# Ejemplo de unos de los transitorios arranque

## 4.6.2 INDUCTION MACHINES

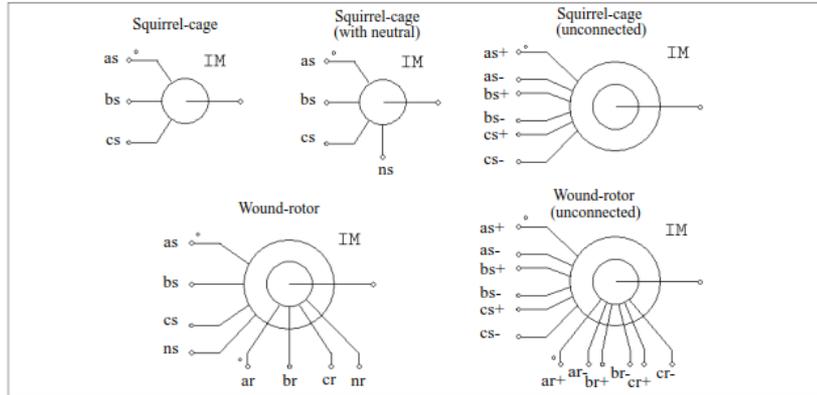
Linear and nonlinear models are provided for squirrel-cage and wound-rotor induction machines. The linear model is further divided into general type and symmetrical type. This section describes the linear models.

Four linear models are provided:

- Symmetrical 3-phase squirrel-cage induction machine
- General 3-phase squirrel-cage induction machine
- Symmetrical 3-phase wound-rotor induction machine
- General 3-phase wound-rotor induction machine

The images and parameters are shown as follows.

Images:



Attributes:

Parameters	Description
$R_s$ (stator)	Stator winding resistance, in Ohm
$L_s$ (stator)	Stator winding leakage inductance, in H
$R_r$ (rotor)	Rotor winding resistance referred to the stator side, in Ohm
$L_r$ (rotor)	Rotor winding leakage inductance referred to the stator side, in H
$L_m$ (magnetizing)	Magnetizing inductance, in H
Ns/Nr Turns Ratio	Stator and rotor winding turns ratio (for wound-rotor machine only)
No. of Poles	Number of poles $P$ of the machine (an even integer)
Moment of Inertia	Moment of inertia $J$ of the machine, in $\text{kg}\cdot\text{m}^2$
Torque Flag	Output flag for internal torque $T_{em}$
Master/Slave Flag	Master/slave flag of the machine (1: master; 0: slave)

All the parameters are referred to the stator side.

For more details on the definition and use of the master/slave flag, refer to Section 4.6.1.

The models of the squirrel-cage induction machine with and without the neutral are the same internally.

The operation of a 3-phase induction machine is described by the following equations:

$$[v_{abc,s}] = [R_s] \cdot [i_{abc,s}] + [L_s] \cdot \frac{d}{dt}[i_{abc,s}] + [M_{sr}] \cdot \frac{d}{dt}[i_{abc,r}]$$

$$[v_{abc,r}] = [R_r] \cdot [i_{abc,r}] + [L_r] \cdot \frac{d}{dt}[i_{abc,r}] + [M_{sr}]^T \cdot \frac{d}{dt}[i_{abc,s}]$$

where

$$[v_{abc,s}] = \begin{bmatrix} v_{a,s} \\ v_{b,s} \\ v_{c,s} \end{bmatrix} \quad [v_{abc,r}] = \begin{bmatrix} v_{a,r} \\ v_{b,r} \\ v_{c,r} \end{bmatrix} \quad [i_{abc,s}] = \begin{bmatrix} i_{a,s} \\ i_{b,s} \\ i_{c,s} \end{bmatrix} \quad [i_{abc,r}] = \begin{bmatrix} i_{a,r} \\ i_{b,r} \\ i_{c,r} \end{bmatrix}$$

For squirrel-cage machines,  $v_{a,r} = v_{b,r} = v_{c,r} = 0$ . The parameter matrices are defined as:

$$[R_s] = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 \\ 0 & 0 & R_s \end{bmatrix} \quad [R_r] = \begin{bmatrix} R_r & 0 & 0 \\ 0 & R_r & 0 \\ 0 & 0 & R_r \end{bmatrix}$$

$$[L_s] = \begin{bmatrix} L_s + M_{sr} & -\frac{M_{sr}}{2} & -\frac{M_{sr}}{2} \\ -\frac{M_{sr}}{2} & L_s + M_{sr} & -\frac{M_{sr}}{2} \\ -\frac{M_{sr}}{2} & -\frac{M_{sr}}{2} & L_s + M_{sr} \end{bmatrix} \quad [L_r] = \begin{bmatrix} L_r + M_{sr} & -\frac{M_{sr}}{2} & -\frac{M_{sr}}{2} \\ -\frac{M_{sr}}{2} & L_r + M_{sr} & -\frac{M_{sr}}{2} \\ -\frac{M_{sr}}{2} & -\frac{M_{sr}}{2} & L_r + M_{sr} \end{bmatrix}$$

$$[M_{sr}] = M_{sr} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos \theta & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos \theta \end{bmatrix}$$

where  $M_{sr}$  is the mutual inductance between the stator and rotor windings, and  $\theta$  is the mechanical angle. The mutual inductance is related to the magnetizing inductance as:

$$L_m = \frac{3}{2} M_{sr}$$

The mechanical equation is expressed as:

$$J \cdot \frac{d\omega_m}{dt} = T_{em} - T_L$$

where the developed torque  $T_{em}$  is defined as:

$$T_{em} = \frac{P}{2} \cdot [i_{abc,s}]^T \cdot \frac{d}{d\theta} [M_{sr}] \cdot [i_{abc,r}]$$

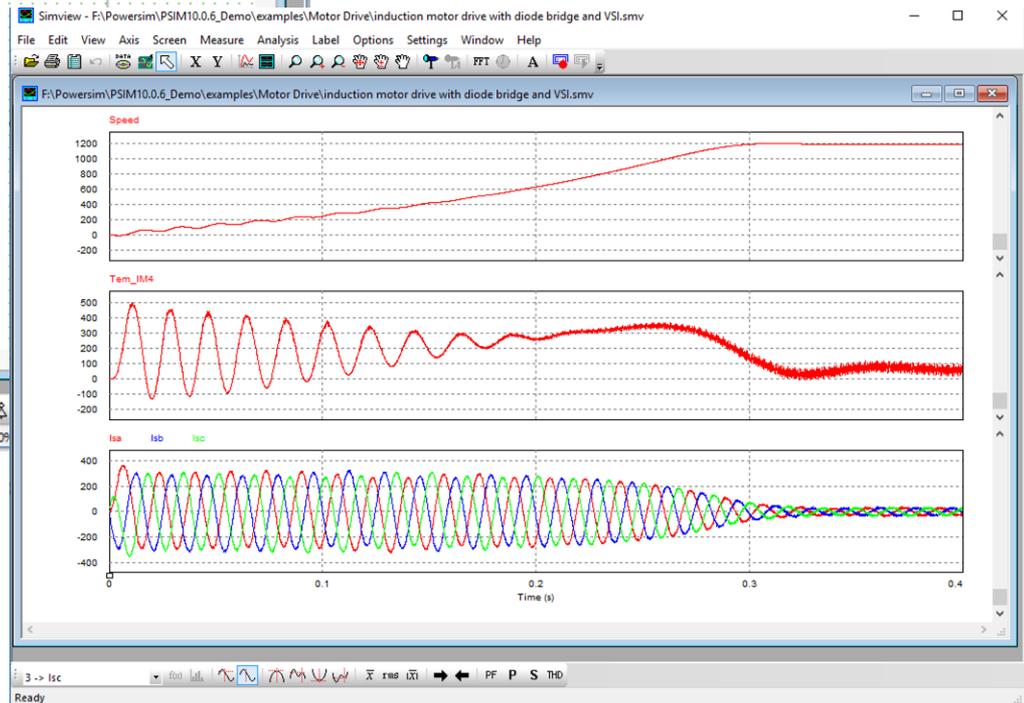
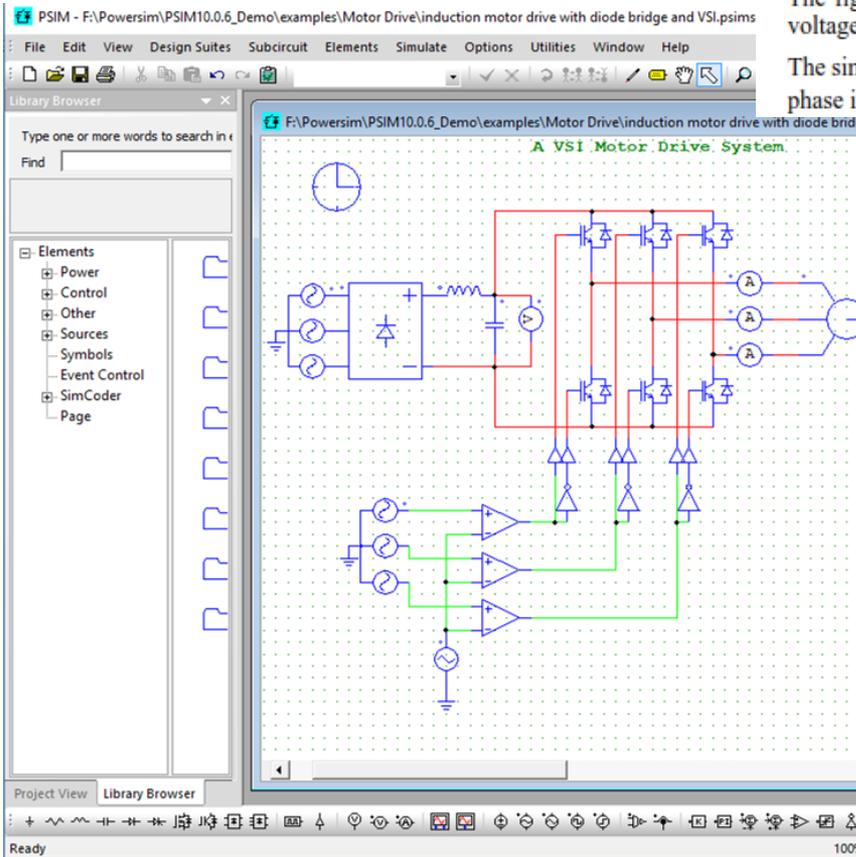
For a symmetrical squirrel-cage induction machine, the steady state equivalent circuit is shown below. In the figure,  $s$  is the slip.

# Ejemplo de unos de los transitorios arranque

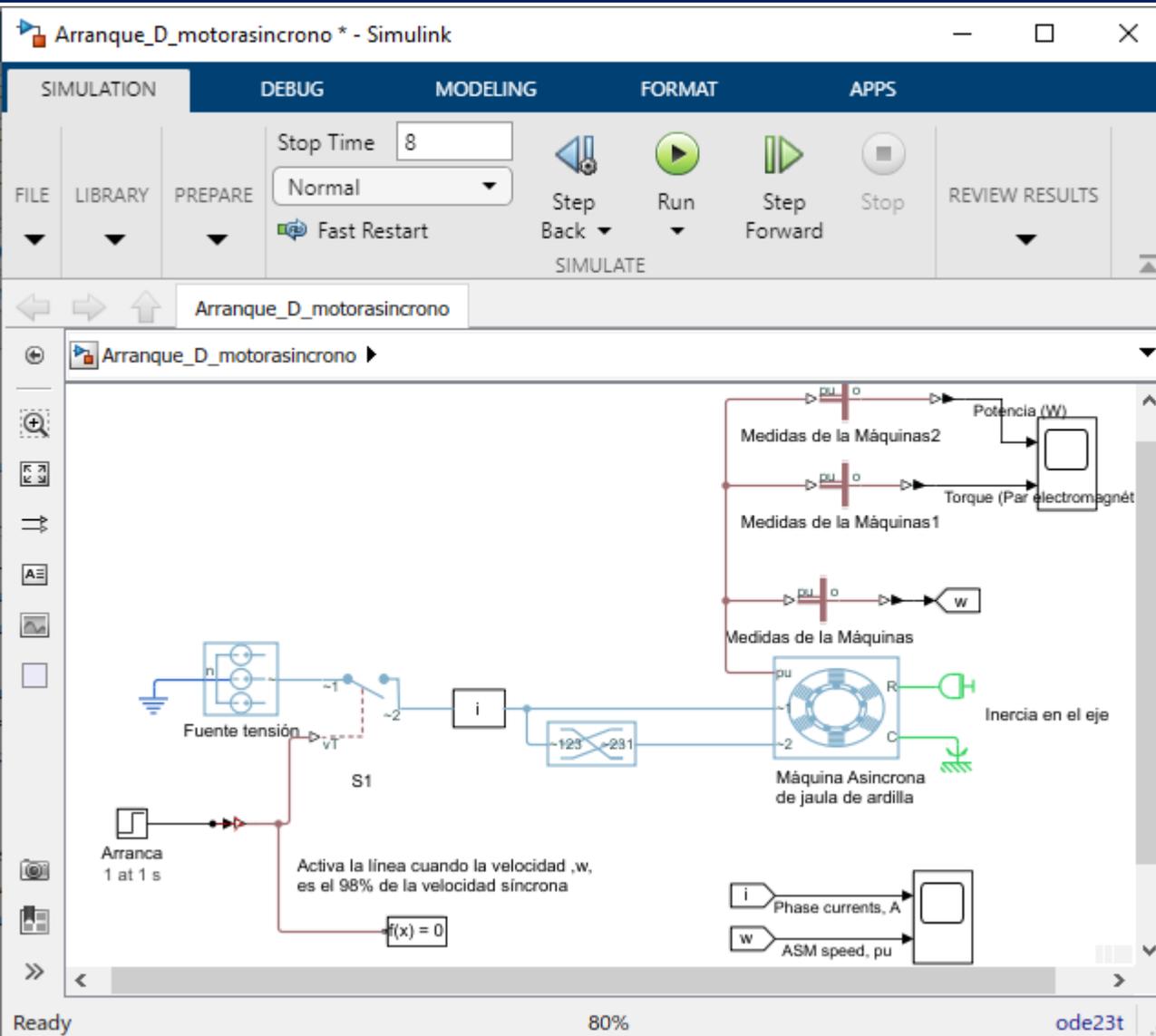
## Example: A VSI Induction Motor Drive System

The figure below shows an open-loop induction motor drive system. The motor has 6 poles and is fed by a voltage source inverter with sinusoidal PWM. The dc bus is fed through a diode bridge.

The simulation waveforms of the mechanical speed (in rpm), developed torque  $T_{em}$  and load torque  $T_{load}$ , and 3-phase input currents show the start-up transient.



# Arranque directo D de motor asíncrono trifásico



# Model Dinámico de la máquina asíncrona

Las ecuaciones de la máquina asíncrona (máquina de inducción) se expresan con respecto a un Sistema de referencia síncrono definido por

$$\theta_e(t) = \int_0^t 2\pi f_{rated} dt,$$

Donde  $f_{rated}$  es el valor frecuencia eléctrica nominal.

La transformación de Park transforma las ecuaciones del estator al sistema de referencia que gira a la frecuencia eléctrica nominal. La transformación de Park se define como

$$P_s = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos \theta_e & \cos(\theta_e - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta_e + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin \theta_e & -\sin(\theta_e - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta_e + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Siendo  $\theta_e$  es el ángulo eléctrico.

# Model Dinámico de la máquina asíncrona

La transformación de Park es usado para definir las ecuaciones de la máquina asíncrona por unidad:

-Las ecuaciones de voltaje del estator son:

$$v_{ds} = \frac{1}{\omega_{base}} \frac{d\psi_{ds}}{dt} - \omega\psi_{qs} + R_s i_{ds}$$

$$v_{0s} = \frac{1}{\omega_{base}} \frac{d\psi_{0s}}{dt} + R_s i_{0s}$$

$$v_{qs} = \frac{1}{\omega_{base}} \frac{d\psi_{qs}}{dt} + \omega\psi_{ds} + R_s i_{qs}$$

Donde  $\omega_b$  es la velocidad eléctrica base por unidad y

$$\begin{bmatrix} v_{ds} \\ v_{qs} \\ v_{0s} \end{bmatrix} = P_s \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i_{ds} \\ i_{qs} \\ i_{0s} \end{bmatrix} = P_s \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix}$$

# Model Dinámico de la máquina asíncrona

- Las ecuaciones de voltaje del rotor son:

$$v_{dr} = \frac{1}{\omega_{base}} \frac{d\psi_{dr}}{dt} - (\omega - \omega_r)\psi_{qr} + R_{rd}i_{dr} = 0$$

$$v_{qr} = \frac{1}{\omega_{base}} \frac{d\psi_{qr}}{dt} + (\omega - \omega_r)\psi_{dr} + R_{rd}i_{qr} = 0,$$

Donde  $\omega$  es la velocidad síncrona por unidad. Para un sistema de referencia síncrono  $\omega=1$  y  $\omega_r$  es la velocidad mecánica del rotor por unidad.  $R_{rd}$  es la resistencia del rotor referida al estator.

# Model Dinámico de la máquina asíncrona

Las ecuaciones del encadenamiento de flujo del estator son:

$$\begin{aligned}\psi_{ds} &= L_{ss}i_{ds} + L_m i_{dr}, & \psi_{0s} &= L_{ss}i_{0s}, \\ \psi_{qs} &= L_{ss}i_{qs} + L_m i_{qr},\end{aligned}$$

Donde  $L_{ss}$  es la auto inductancia del estator y  $L_m$  es la inductancia de magnetización (o inductancia mutua)

Las ecuaciones del encadenamiento de flujo del rotor son

$$\begin{aligned}\psi_{dr} &= L_{rrd}i_{dr} + L_m i_{ds} & \psi_{qr} &= L_{rrd}i_{qr} + L_m i_{qs},\end{aligned}$$

Donde  $L_{rrd}$  es la auto inductancia referida al estator.

La autoinductancia del estator y del rotor son:  $L_{ss} = L_{ls} + L_m$      $L_{rrd} = L_{lrd} + L_m$ .

Donde  $L_{ls}$  es la inductancia de dispersión del estator y  $L_{lrd}$  es la inductancia de dispersión del rotor.

# Model Dinámico de la máquina asíncrona

El par (torque) del rotor es definido por

$$T = \psi_{ds} \dot{i}_{qs} - \psi_{qs} \dot{i}_{ds}$$

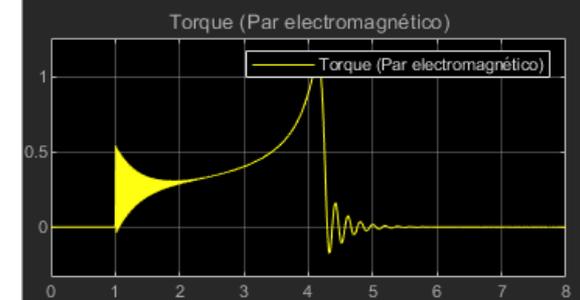
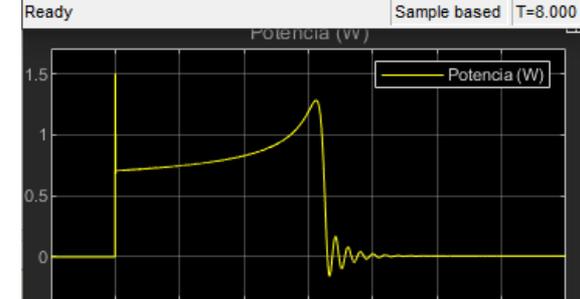
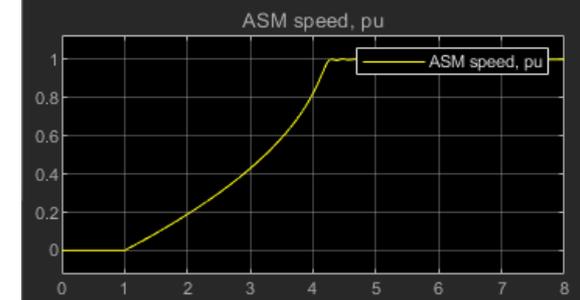
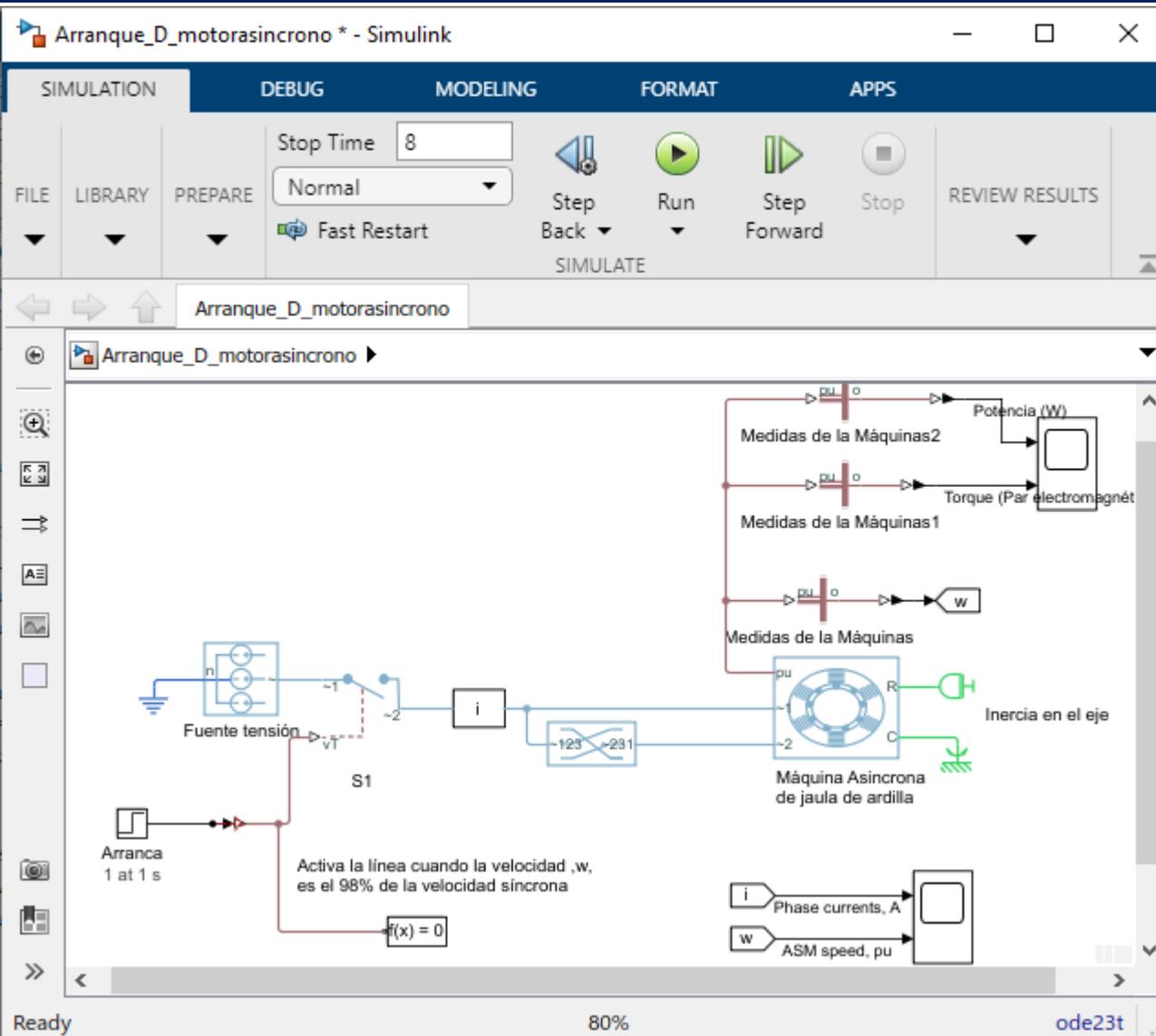
Cuando se proporciona una curva de saturación, las ecuaciones para determinar la inductancia de magnetización saturada en función del flujo de magnetización son:

$$L_{m\_sat} = f(\psi_m)$$

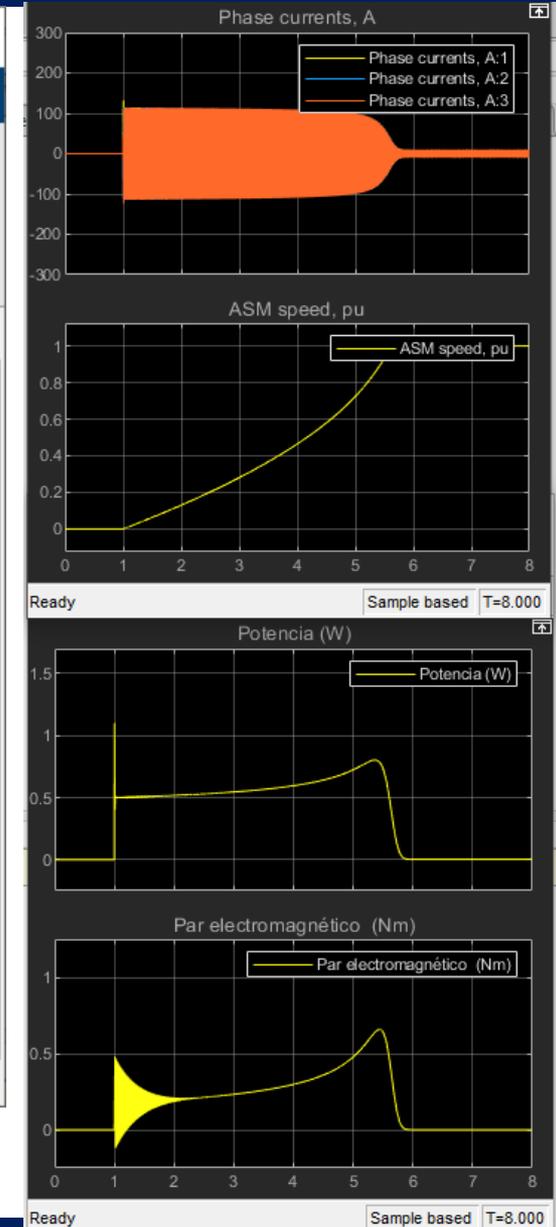
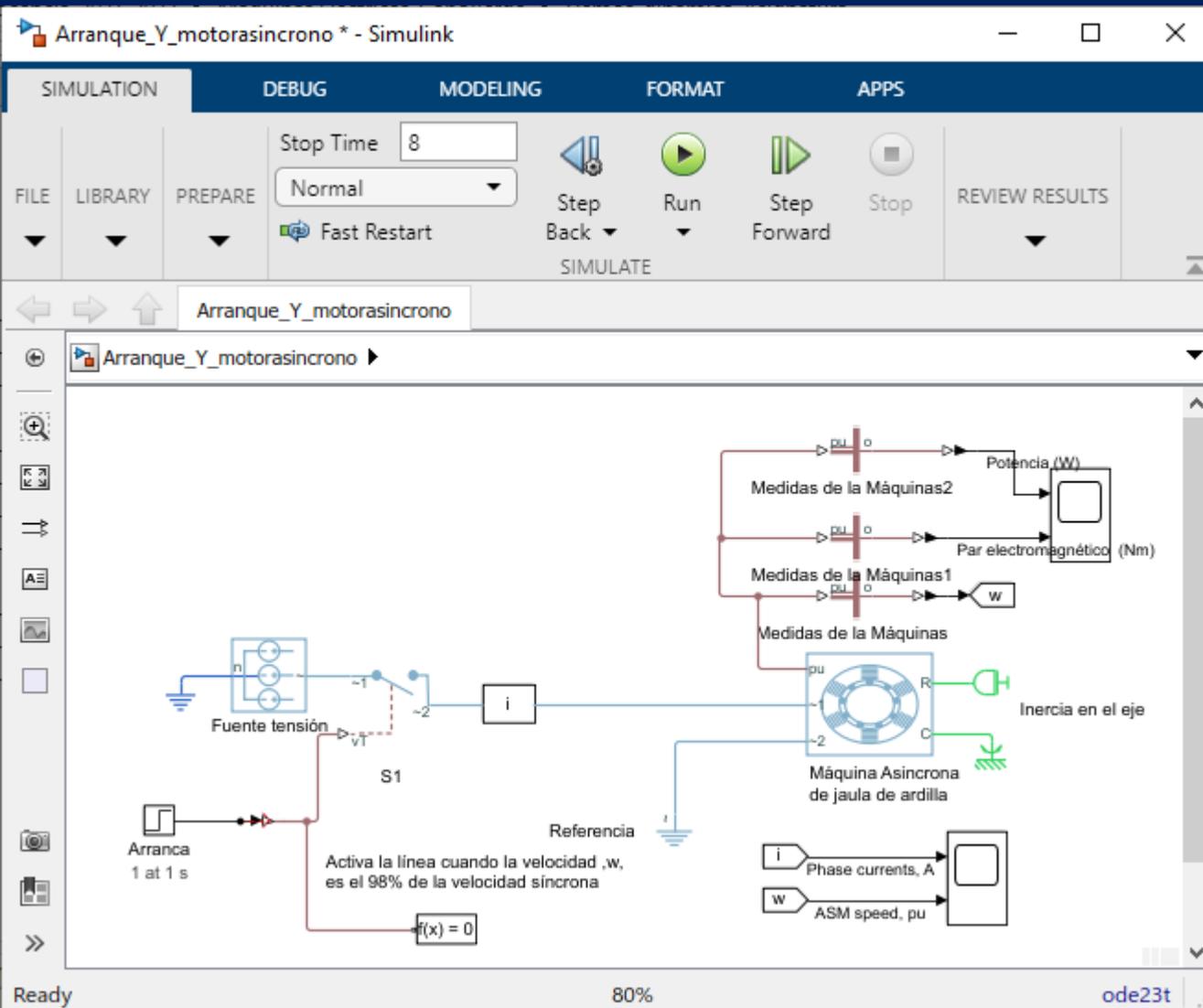
$$\psi_m = \sqrt{\psi_{dm}^2 + \psi_{qm}^2}$$

Si no hay saturación la ecuación se reduce a  $L_{m\_sat} = L_m$

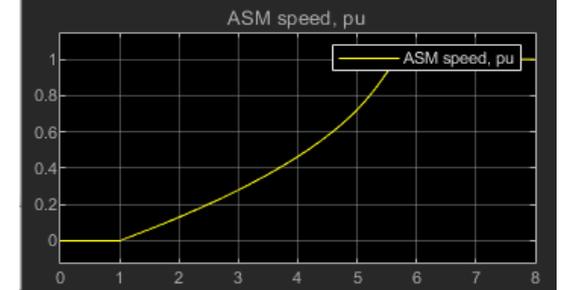
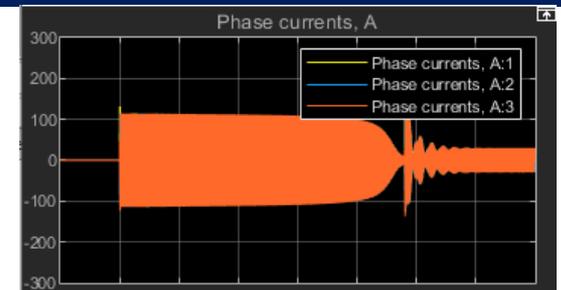
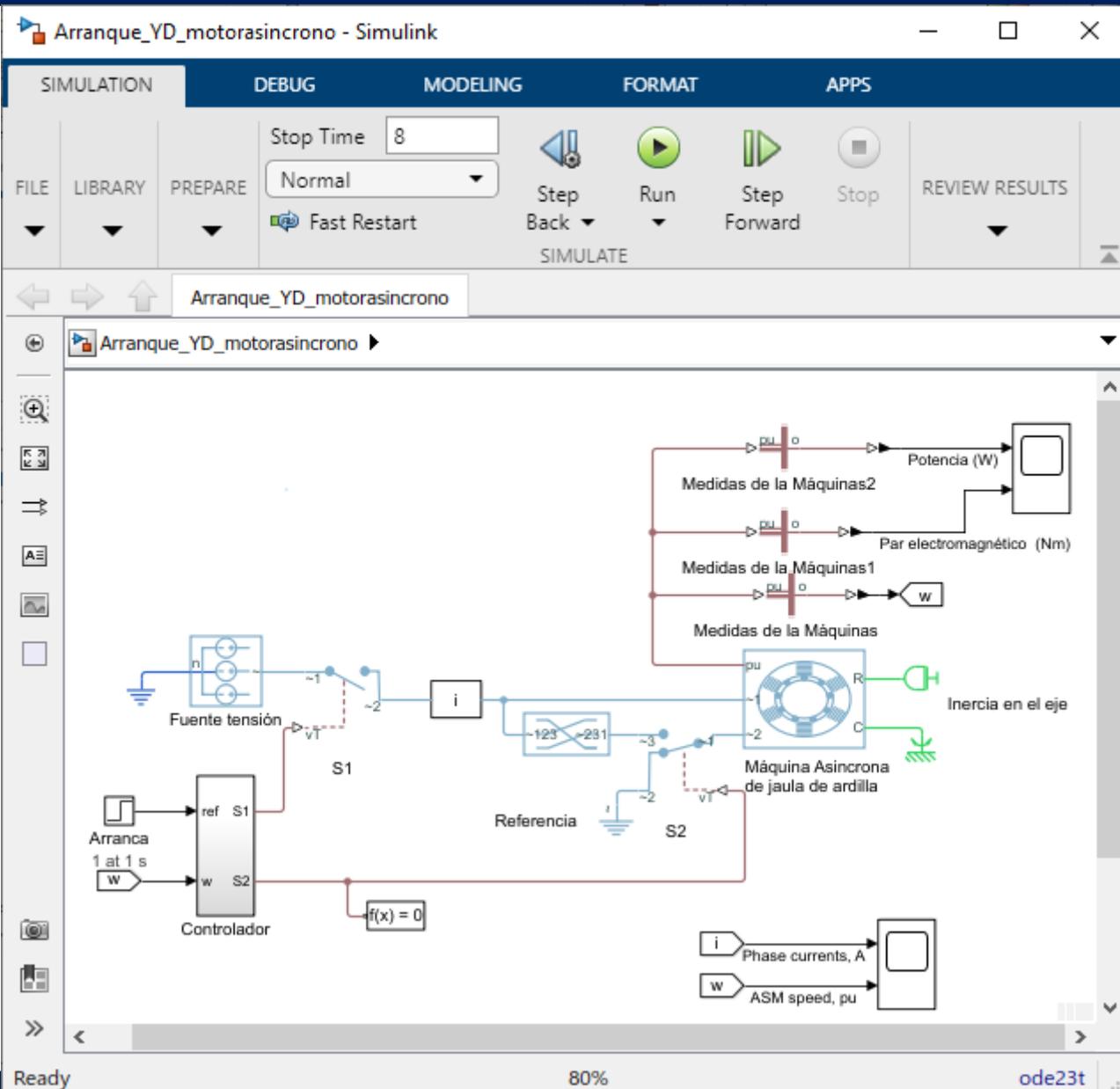
# Arranque directo D de motor asíncrono trifásico



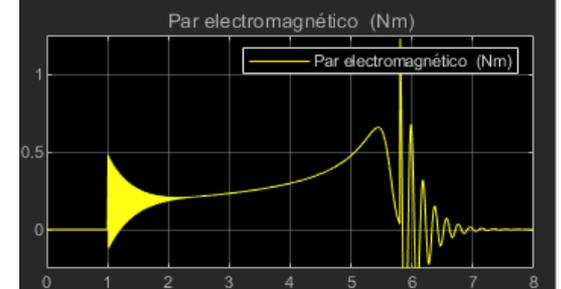
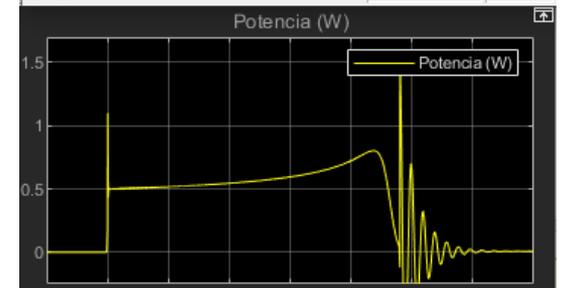
# Arranque directo D de motor asíncrono trifásico



# Arranque YD de motor asíncrono trifásico

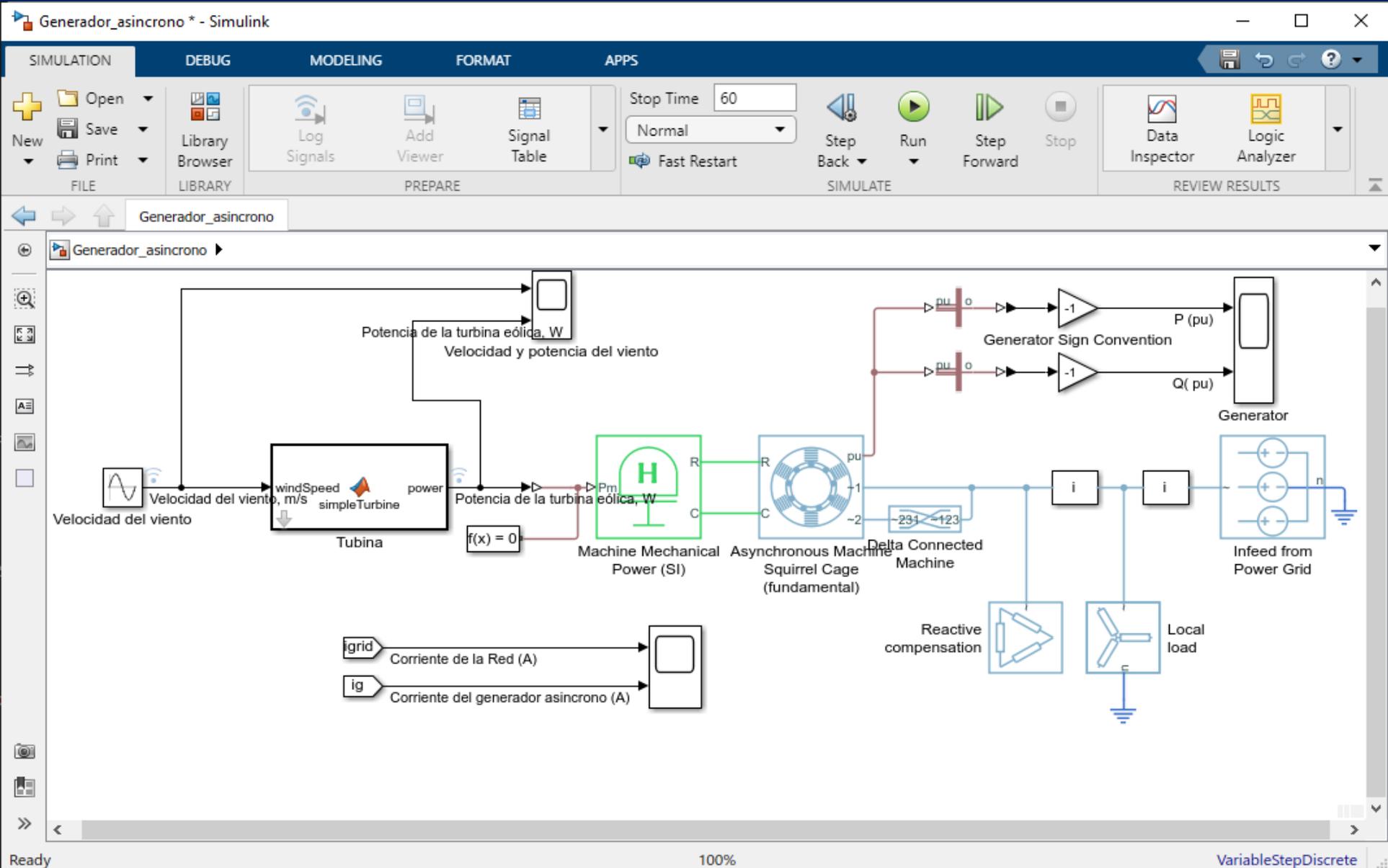


Ready Sample based T=8.000

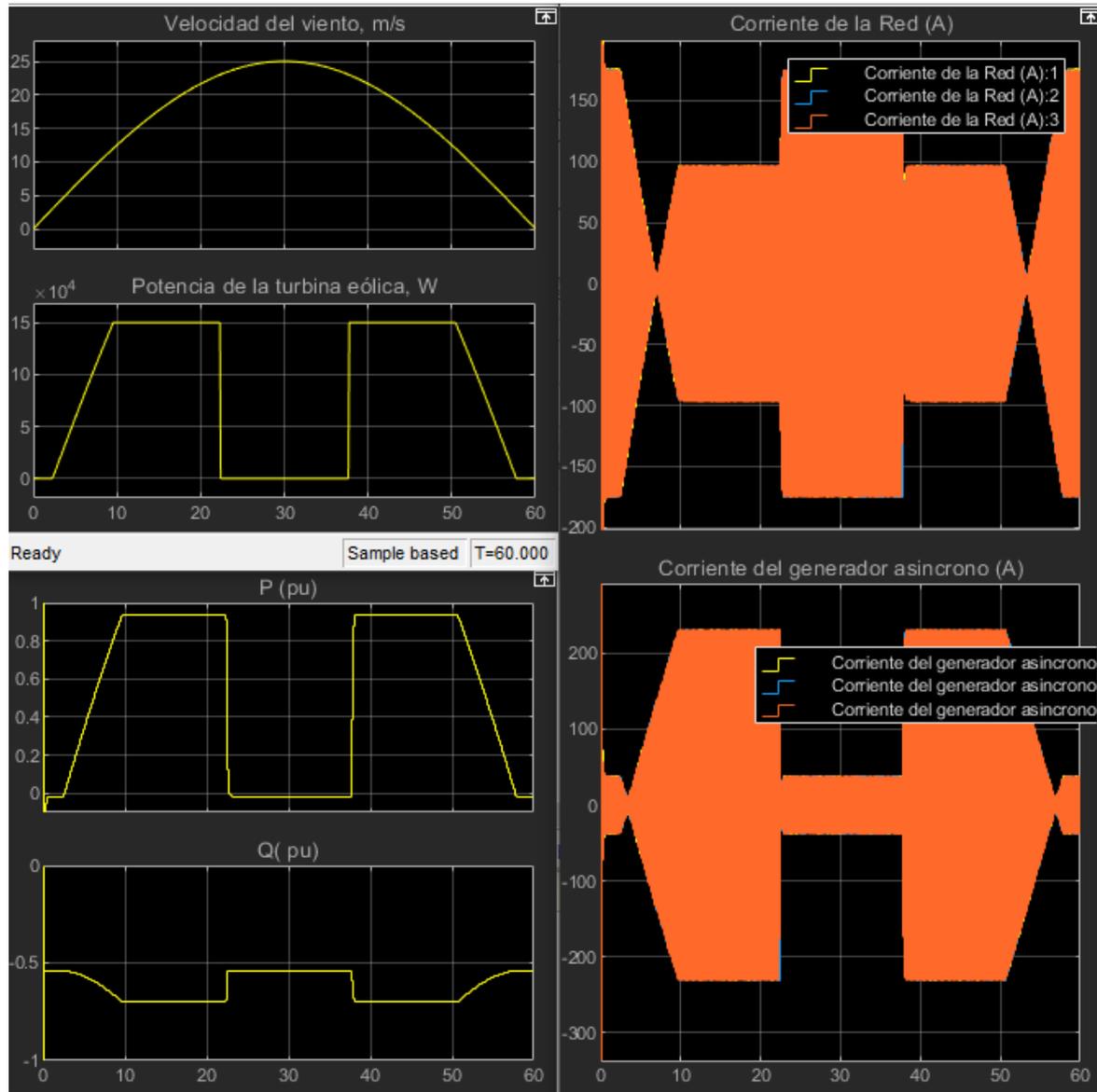


Ready Sample based T=8.000

# Generador eólico con máquina asíncrona con jaula de ardilla



# Generador eólico con máquina asíncrona con jaula de ardilla



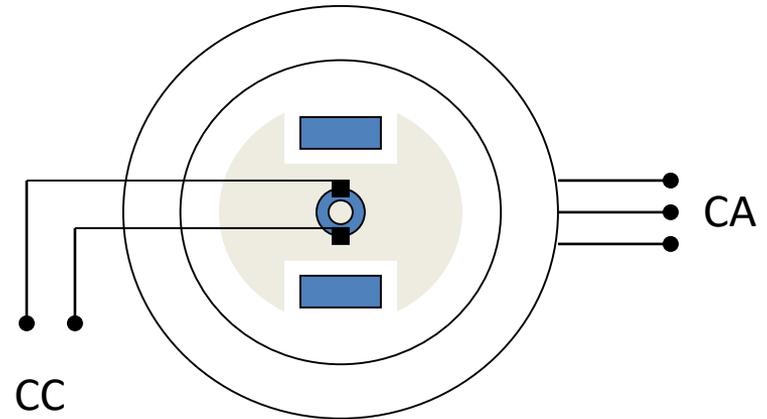
Tema 2: DINÁMICA, REGULACIÓN Y CONTROL DE MÁQUINAS ELÉCTRICAS

# **DINÁMICA DE MÁQUINAS ELÉCTRICAS: GENERADOR SÍNCRONO**

# Dinámica del generador síncrono. Transitorios eléctricos

Hay dos tipos de operaciones transitorias:

- Un transitorio eléctrico.
- Un transitorio mecánico



## Transitorios eléctricos

El transitorio más severo es el cortocircuito súbito de sus tres terminales. En este caso, en un generador que esté operando a la velocidad síncrona en condición sin carga (no hay corriente en el devanado de fase), la corriente en cada fase se sostiene por el voltaje generado  $E_{\phi}$  de la máquina.

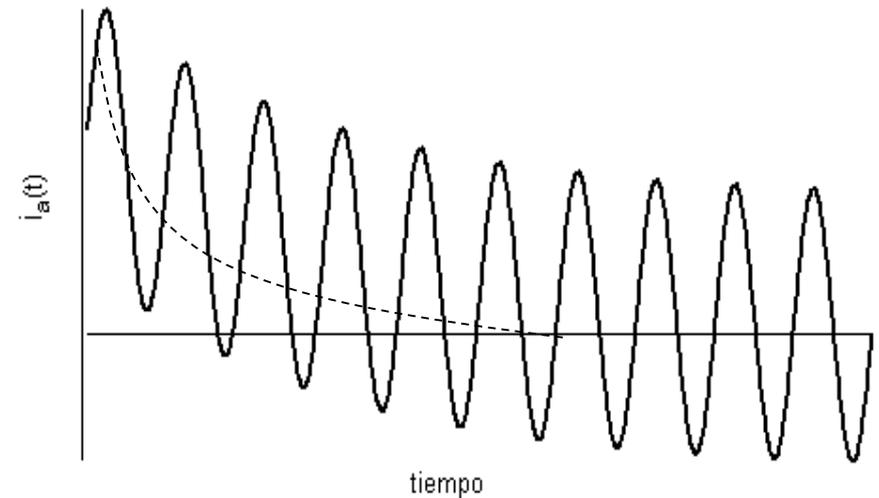
# Dinámica del generador síncrono. Transitorios eléctricos

Al aplicar el cortocircuito-trifásico:

- Las corrientes en los devanados de armadura son tales que mantienen el encadenamiento de flujo en el devanado de armadura en el valor que tenía cuando se presentó el corto. Hay 2 componentes de corriente:

- Una corriente de CA para oponerse al flujo variable en el tiempo que produce el devanado de campo cuando gira.

- Y una corriente de CC que corresponde al encadenamiento inicial de flujo que existía cuando se presentó el corto.

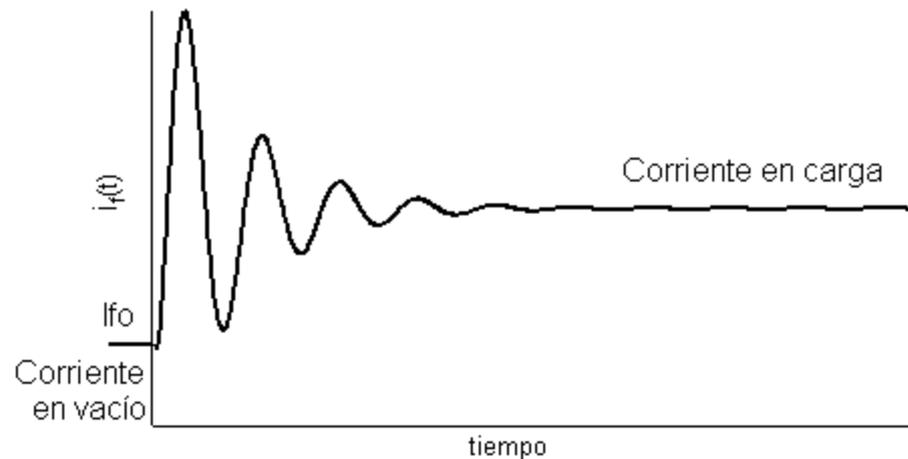


# Dinámica del generador síncrono. Transitorios eléctricos

- En el devanado de campo responde:

- Con una corriente de CA que se opone a la de CC del devanado de armadura.

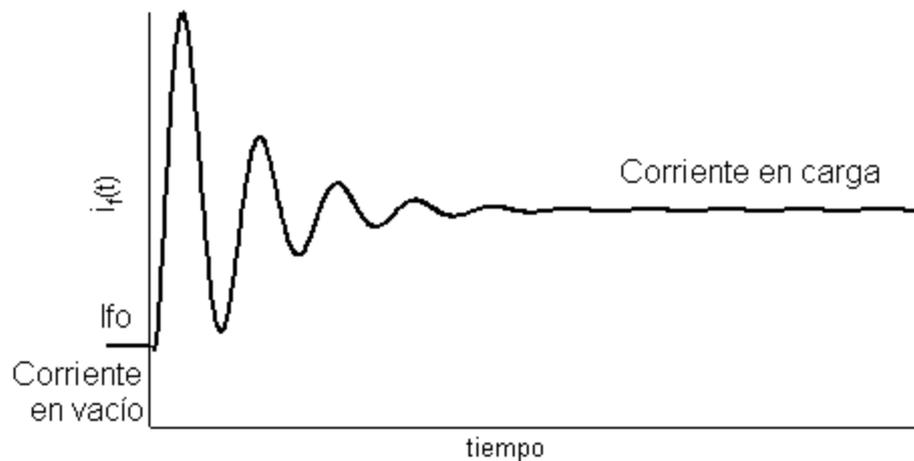
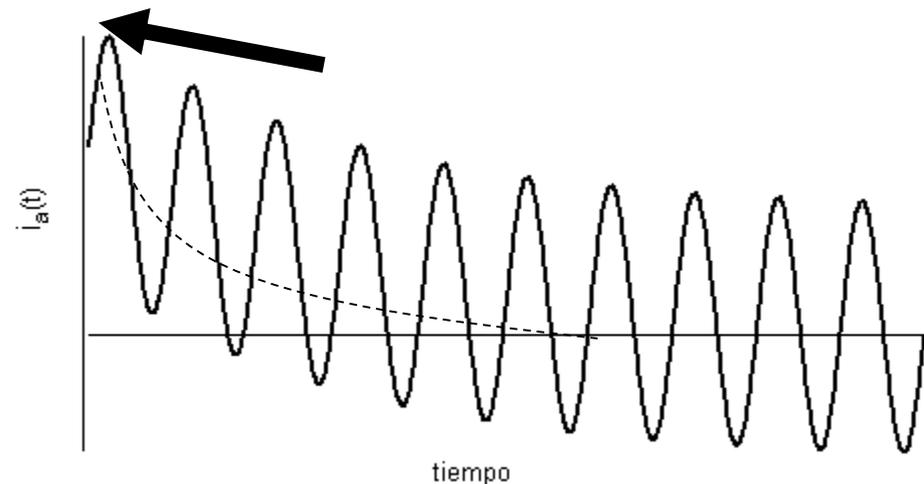
- Y una CC que se opone a la componente de flujo rotatorio síncrono, creado por las CA de armadura.



# Dinámica del generador síncrono. Transitorios eléctricos

En cada corriente de fase tiene una componente de CC decayendo, aún cuando sólo están presentes voltajes de CA en el circuito de la armadura.

Esto es porque la máquina intenta mantener los concatenamientos constantes de flujo para cada una de las tres fases.



Debe haber una componente inducida de CC que se oponga a la componente de flujo rotatorio síncrono creado por las corrientes alternas de la armadura

# Dinámica del generador síncrono. Transitorios eléctricos

Para el desarrollo teórico suponemos:

- Generador opera en la región lineal de su característica de magnetización.
- Las resistencias de los devanados son despreciables.
- Suponemos que la máquina no usa un devanado de amortiguamiento.

Justo antes del cortocircuito, los concatenamientos totales de flujo del devanado de campo son

$$\lambda_f = N_f \phi_f = L_f I_f$$

$L_f$   $\equiv$  inductancia efectiva del devanado de campo

$I_f$   $\equiv$  corriente de campo

$$\lambda_f = (L_{lf} + L_{af}) I_f \quad (1)$$

$L_{lf}$   $\equiv$  inductancia de dispersión

$L_{af}$   $\equiv$  inductancia mútua entre los devanados del campo y la armadura

# Dinámica del generador síncrono. Transitorios eléctricos

Como el generador ha estado operando sin carga antes del cortocircuito el concatenamiento de flujo debido al devanado de la armadura es

$$\lambda_a = 0$$

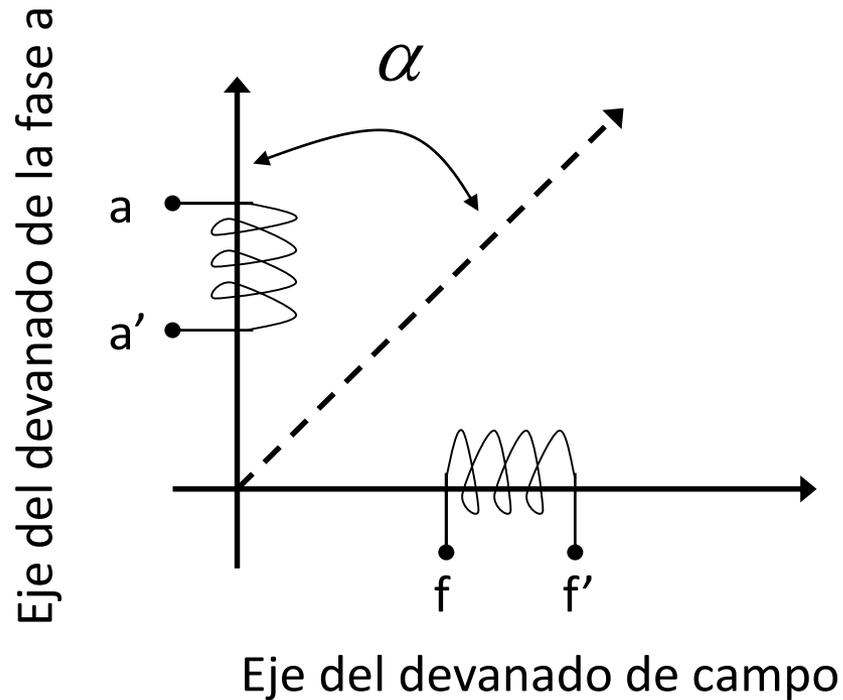
Cuando ocurre un cortocircuito trifásico a través de los terminales de la armadura en  $t=0$ , los ejes magnéticos del devanado del campo y del devanado de la armadura (tomamos como ejemplo la fase a) se consideran ortogonales.

Después de un tiempo breve, el rotor alcanza cierta posición angular  $\alpha$  respecto al eje magnético del devanado de la fase a y origina corrientes

$$\begin{array}{ll} i_a & \text{en la fase} \\ I_f + i_f & \text{en el devanado de campo} \end{array}$$

Con el objetivo de mantener los mismos concatenamientos de flujo total.

# Dinámica del generador síncrono. Transitorios eléctricos



El concatenamientos de flujo de la fase a es

$$\lambda_a = i_a (L_{la} + L_{af}) + (I_f + i_f) L_{af} \text{sen}(90^\circ - \alpha) \quad (2)$$

El concatenamientos de flujo para el devanado de campo es

$$\lambda_f = (I_f + i_f) (L_{lf} + L_{af}) + i_a L_{af} \text{sen}(90^\circ - \alpha) \quad (3)$$

# Dinámica del generador síncrono. Transitorios eléctricos

$$\lambda_f = (L_{lf} + L_{af})I_f \quad (1)$$

$$\lambda_a = i_a(L_{la} + L_{af}) + (I_f + i_f)L_{af}\text{sen}(90^\circ - \alpha) \quad (2)$$

$$\lambda_f = (I_f + i_f)(L_{lf} + L_{af}) + i_a L_{af}\text{sen}(90^\circ - \alpha) \quad (3)$$

Resolviendo el sistema tenemos las corrientes transitorias

$$i_a = \frac{L_{af} I_f (L_{lf} + L_{af}) \text{sen}(90^\circ - \alpha)}{L_{af}^2 \text{sen}^2(90^\circ - \alpha) - (L_{lf} + L_{af})(L_{la} + L_{af})}$$

$$i_f = -\frac{L_{af}^2 \text{sen}^2(90^\circ - \alpha) I_f}{L_{af}^2 \text{sen}^2(90^\circ - \alpha) - (L_{lf} + L_{af})(L_{la} + L_{af})}$$

La condición transitoria más severa ocurre cuando las corrientes son máximas.

Eso sucede cuando  $\alpha = 0$



$$i_a = \frac{L_{af} I_f (L_{lf} + L_{af})}{L_{af}^2 - (L_{lf} + L_{af})(L_{la} + L_{af})} \quad (4)$$

$$i_f = -\frac{L_{af}^2 I_f}{L_{af}^2 - (L_{lf} + L_{af})(L_{la} + L_{af})}$$

# Dinámica del generador síncrono. Transitorios eléctricos

De (4) podemos determinar la reactancia transitoria del generador síncrono que sigue su comportamiento durante el periodo transitorio.

Si multiplicamos y dividimos en (4) por  $\omega^2$  y simplificamos

$$i_a = \frac{\omega L_{af} I_f (\omega L_{lf} + \omega L_{af})}{\omega^2 L_{af}^2 - (\omega L_{lf} + \omega L_{af})(\omega L_{la} + \omega L_{af})}$$

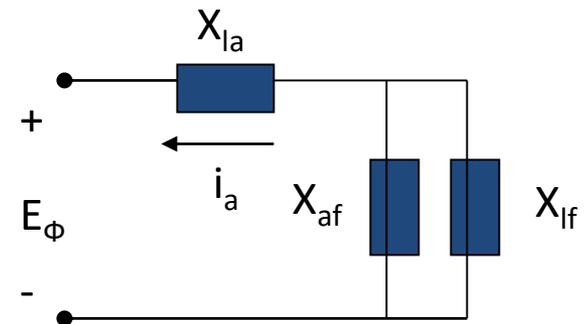
$$i_a = - \frac{E_\phi (X_{lf} + X_{af})}{X_{lf} X_{la} + X_{lf} X_{af} + X_{fa} X_{la}} \Rightarrow X'_d = \frac{E_\phi}{-i_a} = X_{la} + \frac{X_{af} X_{lf}}{X_{af} + X_{lf}}$$

Reactancia transitoria

El circuito equivalente es

$$E_\phi = I_f \omega L_{af} = I_f X_{af}$$

$E_\phi$  es el voltaje generado antes del cortocircuito en condiciones sin carga



## Corrientes de cortocircuito

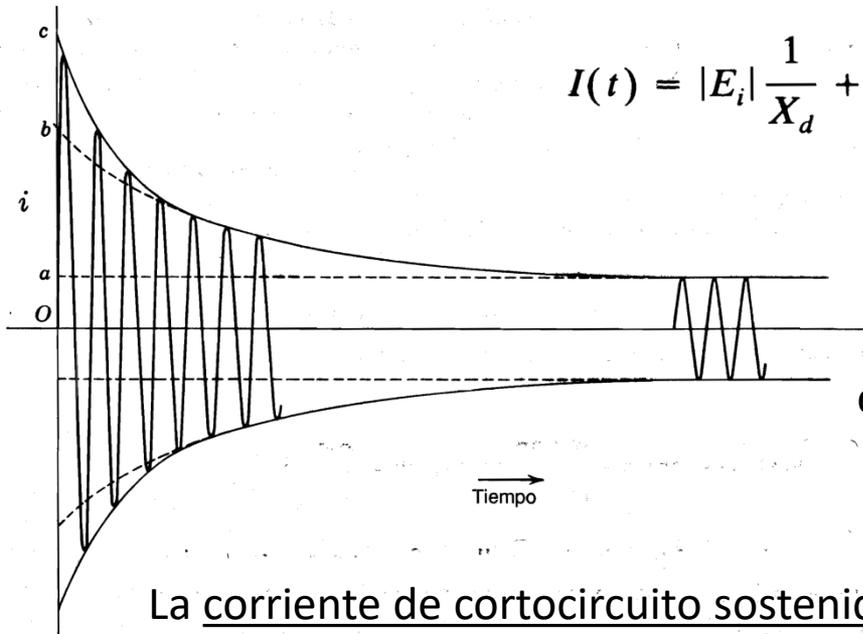
Cuando se aplica repentinamente un voltaje de ca a un circuito serie RL, la corriente que fluye tiene dos componentes: una de cd, que decae conforme a una constante de tiempo  $L/R$  de circuito.; y una componente de estado estable de amplitud constante que varía sinusoidalmente.

Un fenómeno similar pero más complejo, ocurre cuando un cortocircuito se presenta repentinamente en las terminales de una máquina síncrona.

Una buena forma de analizar el efecto de los cortocircuitos trifásicos en las terminales de un generador previamente descargado, es tomar un oscilograma de la corriente en una de las fases cuando se presenta la falla. Como los voltajes generados en las fases de las máquinas trifásicas están desplazados  $120^\circ$  eléctricos uno de otro, el cortocircuito ocurre en diferentes puntos de la onda de voltaje de cada fase. Por esta razón la componente transitoria unidireccional o de cd, es diferente en cada fase. Si se elimina la corriente cd de cada fase, la amplitud de la componente de ca de cada corriente de fase varía de la forma

$$I(t) = |E_i| \frac{1}{X_d} + |E_i| \left( \frac{1}{X'_d} - \frac{1}{X_d} \right) \varepsilon^{-t/T'_d} + |E_i| \left( \frac{1}{X''_d} - \frac{1}{X'_d} \right) \varepsilon^{-t/T''_d}$$

# Dinámica del generador síncrono. Transitorios eléctricos



$$I(t) = |E_i| \frac{1}{X_d} + |E_i| \left( \frac{1}{X'_d} - \frac{1}{X_d} \right) e^{-t/T'_d} + |E_i| \left( \frac{1}{X''_d} - \frac{1}{X'_d} \right) e^{-t/T''_d}$$

Donde

$$e_i = \sqrt{2} |E_i| \cos \omega t$$

es el voltaje síncrono sin carga de la máquina

La corriente de cortocircuito sostenida

$$|I| = \frac{0-a}{\sqrt{2}} = \frac{|E_i|}{X_d}$$

La corriente de transitoria

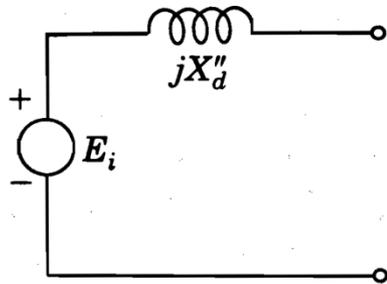
$$|I'| = \frac{0-b}{\sqrt{2}} = \frac{|E_i|}{X'_d}$$

La corriente subtransitoria ( corriente rms inicial simétrica inmediatamente después del cortocircuito)

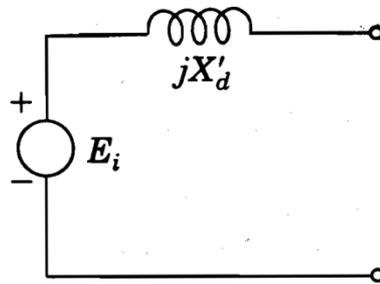
$$|I''| = \frac{0-c}{\sqrt{2}} = \frac{|E_i|}{X''_d}$$

# Dinámica del generador síncrono. Transitorios eléctricos

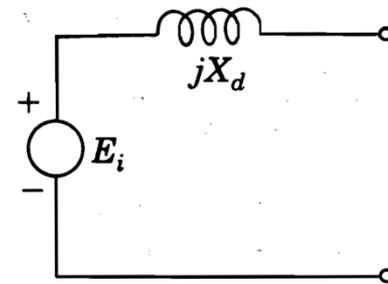
Si el generador está sin carga cuando ocurre la falla, se representa la máquina por el voltaje sin carga al neutro, en serie con la reactancia apropiada.



a)



b)



c)

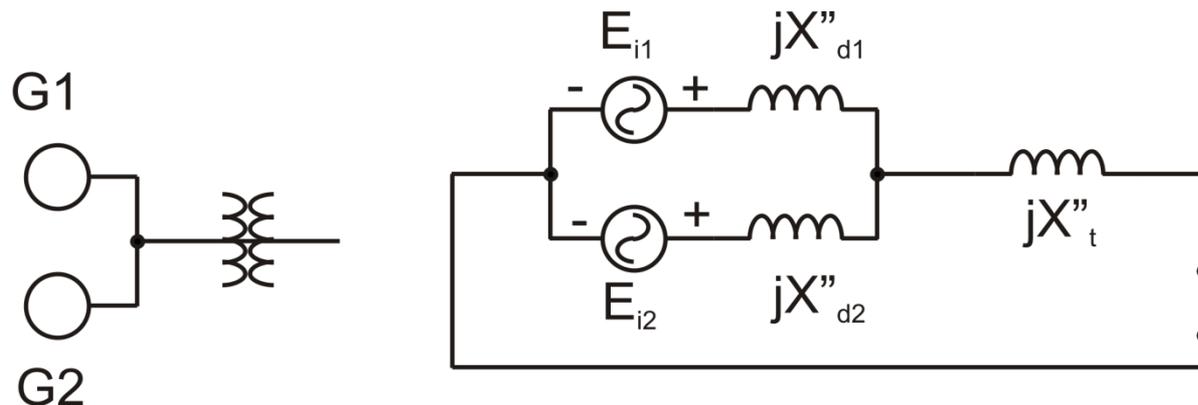
Circuitos equivalentes para un generador síncrono con voltaje interno  $E_i$

- a) Reactancia subtransitoria  $X''_d$
- b) Reactancia Transitoria  $X'_d$
- c) Reactancia sincrónica  $X_d$

# Dinámica del generador síncrono. Transitorios eléctricos

## Ejemplo

Se conectan dos generadores en paralelo al lado de bajo voltaje de un transformador D-Y trifásico. El generador 1 es de 50000 kVA, y 13.89 kV. El generador 2 es de 25000 kVA y 13.89 kV. Cada generador tiene una reactancia subtransitoria de 25% sobre su propia base. El transformador es de 75000 kVA, 13.89 D/69Y kV, con una reactancia de 10%. Antes de que la falla ocurra, el voltaje en el lado de alta tensión del transformador es de 66 kV. El transformador está sin carga y no hay corrientes circulando entre los generadores. Encuentre la corriente subtransitoria en cada generador cuando ocurre un cortocircuito trifásico en el lado de alto voltaje del transformador

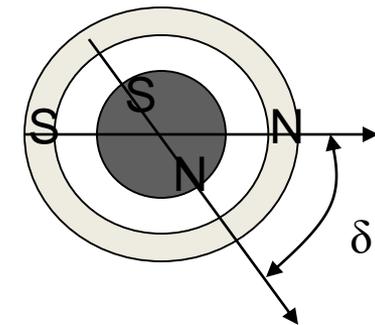


## Transitorios mecánicos

Se puede producir por un transitorio eléctrico en los terminales de su armadura. Si ocurre una modificación repentina en la potencia suministrada por el generador, necesita un cambio también repentino en el ángulo de potencia  $\delta$ . Sin embargo,  $\delta$  no puede cambiar súbitamente debido a la inercia del rotor. Esto conduce a una situación en la que la potencia de entrada no es igual a la de salida. La diferencia entre ellas produce un cambio en la energía cinética del rotor, lo que afecta a su velocidad.

Durante este proceso transitorio, el rotor acelera o desacelera hasta que las potencias de entrada y salida se igualan. Cuando pasa esto, el rotor recupera su velocidad síncrona.

Lo mismo pasa con un cortocircuito repentino.



# Dinámica del generador síncrono. Transitorios mecánicos

Durante el estado transitorio, la ecuación mecánica del par viene dado por:

$$\underbrace{T_d(t)}_{\substack{\text{Par desarrollado} \\ \text{en el generador} \\ \text{síncrono en un} \\ \text{momento dado}}} + D\omega_m(t) + J \frac{d\omega_m(t)}{dt} = \underbrace{T_m}_{\substack{\text{Par mecánico} \\ \text{aplicado al} \\ \text{generador}}} \quad (5)$$

Si despreciamos las pérdidas por rotación en (5)

$$J \frac{d\omega_m(t)}{dt} = T_m - T_d(t) \Rightarrow J \frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} = T_m - T_d(t) \quad (6)$$

Donde  $\theta_m$  es el desplazamiento del rotor respecto al marco de referencia estacionario:

$$\theta_m(t) = \underbrace{\omega_s}_{\substack{\text{velocidad} \\ \text{de sincronismo}}} t + \underbrace{\delta_m(t)}_{\substack{\text{ángulo de} \\ \text{potencia en } t}} \Rightarrow \frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} = \frac{d^2\delta_m(t)}{dt^2}$$

Por lo que de (6) tenemos:

$$\boxed{J \frac{d^2\delta_m(t)}{dt^2} = T_m - T_d(t)} \quad (7)$$

# Dinámica del generador síncrono. Transitorios eléctricos

Multiplicando por  $\omega_m(t)$  en (7)

$$\underbrace{J\omega_m(t)}_{\text{Momento angular } M(t)} \frac{d^2\delta_m(t)}{dt^2} = \underbrace{\omega_m(t)T_m}_{P_m(t)} - \underbrace{\omega_m(t)T_d(t)}_{\text{Potencia desarrollada } P_d(t)}$$

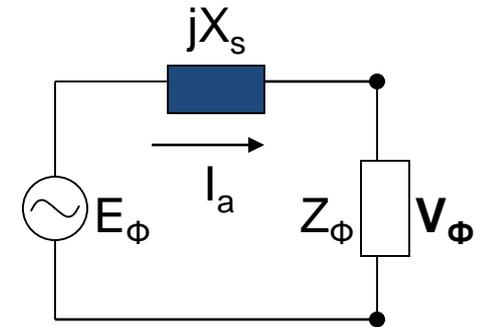
Nota:

Buscamos expresar la potencia desarrollada en un generador como función del ángulo de potencia  $\delta$ .

$$P_d = 3V_\phi I_\phi \cos\theta$$

$$\bar{V}_\phi = \bar{E}_\phi - j\bar{I}_\phi X_s \Rightarrow \bar{I}_\phi = \frac{\bar{E}_\phi - \bar{V}_\phi}{jX_s}$$

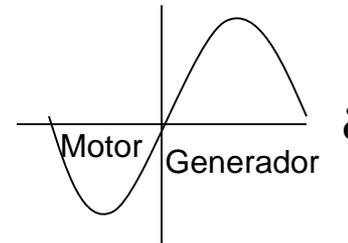
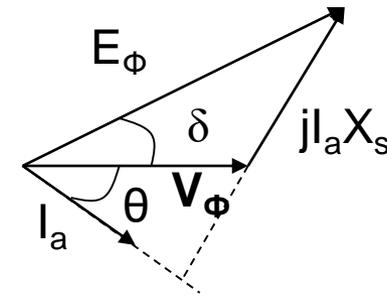
$$\left. \begin{aligned} \bar{E}_\phi &= E_\phi \cos\delta + jE_\phi \text{sen}\delta \\ \bar{I}_\phi &= \frac{E_\phi \text{sen}\delta}{X_s} - j \frac{E_\phi \cos\delta - V_\phi}{X_s} \end{aligned} \right\}$$



$$\bar{I}_\phi = I_\phi \cos\theta - jI_\phi \text{sen}\theta \quad \rightarrow \quad I_\phi \cos\theta = \frac{E_\phi \text{sen}\delta}{X_s}$$

⇓

$$P_d = 3V_\phi I_\phi \cos\theta \quad \rightarrow \quad P_d = 3V_\phi \frac{E_\phi \text{sen}\delta}{X_s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_d = P_{dm} \text{sen}\delta}$$



# Dinámica del generador síncrono. Transitorios eléctricos

$$\underbrace{J\omega_m(t)}_{\text{Momento angular } M(t)} \frac{d^2 \delta_m(t)}{dt^2} = \underbrace{\omega_m(t)T_m}_{P_m(t)} - \underbrace{\omega_m(t)T_d(t)}_{\text{Potencia desarrollada } P_d(t)}$$

Por lo tanto tenemos la siguiente ecuación (Ec. de vaivén)

$$J\omega_m(t) \frac{d^2 \delta_m(t)}{dt^2} = P_m(t) - P_{dm} \text{sen} \delta_m(t) \quad (8)$$

Esto es una ecuación diferencial no lineal de segundo orden. Esta ecuación se puede resolver numéricamente por ejemplo usando el algoritmo de Runge-Kutta. También se puede hacer lineal suponiendo  $\delta_m$  es un ángulo pequeño

$$\text{sen}(\delta_m) \approx \delta_m$$

# Dinámica del generador síncrono. Transitorios eléctricos

Expresando la ec. (8) en términos de cantidades por unidad respecto a la potencia específica del generador síncrono  $S_n$ , tenemos

$$\frac{J\omega_m(t)}{S_n} \frac{d^2\delta_m(t)}{dt^2} = \frac{P_m(t)}{S_n} - \frac{P_{dm}}{S_n} \text{sen}\delta_m(t)$$

Definimos la constante de inercia del generador como

$$H = \frac{1}{2} \frac{J\omega_s^2(t)}{S_n} = \frac{1}{2} \frac{J\omega_m^2(t)}{S_n}$$

Para que se cumpla la segunda igualdad se ha supuesto que el momento angular es constante.

Por lo tanto la ecuación de vaivén se expresa como

$$\frac{2H}{\omega_s} \frac{d^2\delta_m(t)}{dt^2} = p_m - p_{dm} \text{sen}\delta_m(t) \quad (9)$$

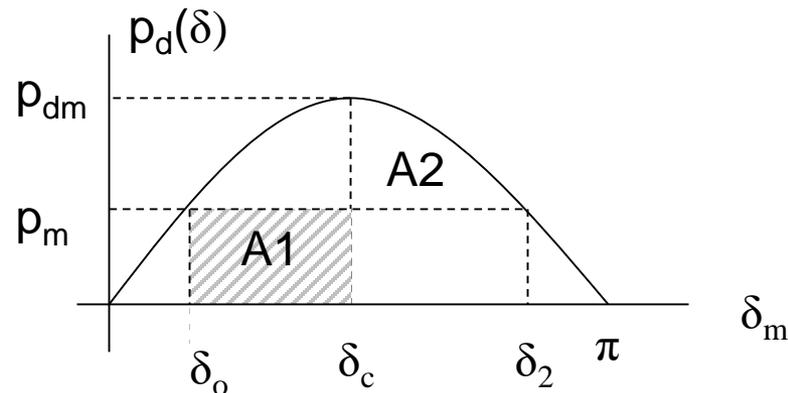
$p_m$  y  $p_{dm}$  potencias por unidad

## Criterio de igual área

Es otro método para determinar la estabilidad de un generador síncrono durante un estado transitorio.

Suponemos que el generador trabaja con una potencia  $p_o$  correspondiente al ángulo de potencia  $\delta_o$ . Además si ocurre un cortocircuito súbito en las tres fases, la potencia desarrollada se vuelve igual a 0,  $p_{dm}=0$  al desconectarse la máquina del bus-bar (barra de colectores) por medio de un sistema automático de protección. Por otro lado, el impulsor primario aún está suministrando energía mecánica al generador.

Por tanto de (9) y como



# Dinámica del generador síncrono. Transitorios eléctricos

como

$$\theta_m(t) = \omega_s t + \delta_m(t) \Rightarrow \omega_m(t) = \frac{d\theta_m(t)}{dt} = \omega_s + \frac{d\delta_m(t)}{dt} \Rightarrow \frac{d\omega_m(t)}{dt} = \frac{d^2\delta_m(t)}{dt^2}$$

de la ec. de vaivén (9)

$$\frac{2H}{\omega_s} \frac{d^2\delta_m(t)}{dt^2} = p_m \Rightarrow \frac{d\omega_m(t)}{dt} = \frac{\omega_s}{2H} p_m$$

Integrando y con  $\omega_m(0) = \omega_s$

$$\int_{\omega_m(0)}^{\omega_m} d\omega_m(t) = \int_0^t \frac{\omega_s}{2H} p_m dt \Rightarrow \boxed{\omega_m(t) = \omega_s + \frac{\omega_s}{2H} p_m t} \quad (10)$$

Por tanto, vemos que la velocidad del eje es mayor que la velocidad síncrona y aumenta con el tiempo. Por lo que la máquina podría salirse de control

# Dinámica del generador síncrono. Transitorios eléctricos

Integrando (10) obtenemos el ángulo de potencia

$$\delta_m(t) = \delta_o + \frac{\omega_s}{4H} p_m t^2$$

$\delta_o$  es el ángulo de potencia en el momento en que ocurre el cortocircuito.

Si la falla se corrige en el instante  $t_c$ , el generador se iniciará desarrollando potencia a un nivel más elevado que el del estado anterior a la falla pues

$$\delta_m(t) > \delta_o$$

Esto ocasiona que el rotor se desacelere. Si se corrige el fallo cuando  $P_{dm} < P_m$  ya no se podrá parar.

# Dinámica del generador síncrono. Transitorios eléctricos

como  $\theta_m(t) = \omega_s t + \delta_m(t) \Rightarrow \frac{d\delta_m(t)}{dt} = \frac{d\theta_m(t)}{dt} - \omega_s = \omega_m(t) - \omega_s$

Multiplicando por  $\frac{d\delta_m(t)}{dt}$  la ec.  $\frac{2H}{\omega_s} \frac{d\omega_m(t)}{dt} = p_m - p_d$

$$\left( \frac{2H}{\omega_s} \frac{d\omega_m(t)}{dt} \right) \frac{d\delta_m(t)}{dt} = (p_m - p_d) \frac{d\delta_m(t)}{dt}$$

$$\frac{H}{\omega_s} \left( 2\omega_m \frac{d\omega_m(t)}{dt} - 2\omega_s \frac{d\omega_m(t)}{dt} \right) = (p_m - p_d) \frac{d\delta_m(t)}{dt}$$

↓ Integrando

$\omega_{mo} \equiv$  es la velocidad angular antes del inicio del cortocircuito  
 $\omega_{m2} \equiv$  velocidad angular correspondiente al valor máximo de  $\delta_2$  después de que se ha corregido el cortocircuito

$$\frac{H}{\omega_s} \left( \int_{\omega_{mo}}^{\omega_{m2}} 2\omega_m d\omega_m - \int_{\omega_{mo}}^{\omega_{m2}} 2\omega_s d\omega_m \right) = \int_{\delta_o}^{\delta_2} (p_m - p_d) d\delta_m$$

$$\frac{H}{\omega_s} \left( (\omega_{m2}^2 - \omega_{mo}^2) - 2\omega_s (\omega_{m2} - \omega_{mo}) \right) = \int_{\delta_o}^{\delta_2} (p_m - p_d) d\delta_m$$

$$\omega_{mo} = \omega_s$$

en el máximo de  $\delta_m$  se cumple

$$\frac{d\delta_m(t_2)}{dt} = 0 \Rightarrow 0 = \omega_m(t) - \omega_s \Rightarrow \omega_{m2} = \omega_s$$

La ecuación se queda de la forma

$$\int_{\delta_o}^{\delta_2} (p_m - p_d) d\delta_m = 0$$
$$\int_{\delta_o}^{\delta_c} \left( p_m - \underbrace{p_d}_{=0} \right) d\delta_m = \int_{\delta_c}^{\delta_2} (p_d - p_m) d\delta_m$$

$\delta_c$  es el ángulo de potencia en donde la falla se corrige en el instante  $t_c$

## Ejemplo

Un generador síncrono, tetrapolar de 1000 KVA, 4.6 KV y 60 Hz, entrega 0.9 por unidad de potencia promedio con un ángulo de potencia de 18 grados cuando ocurre un cortocircuito trifásico a través de sus terminales. Calcular:

- a) La potencia generada por unidad por el generador cuando la falla se corrige 4 ciclos después de su inicio.
- b) El tiempo crítico para eliminar la falla con objeto de no perder la estabilidad.

La constante de inercia  $H=10$  J/VA

# Resumen

- Aunque los transitorios mecánicos en los generadores síncronos son los menos frecuentes, son los más importantes porque la máquina podría sufrir autodestrucción.
- Después de un transitorio mecánico, el ángulo de potencia varía como función del tiempo y lo modela una ecuación diferencial de segundo orden (ec. de vaivén).
- Si la causa del transitorio mecánico se corrige dentro del lapso breve (algunos ciclos) la máquina no pierde su estabilidad durante el estado transitorio. De otro modo podría exceder su velocidad y causar daños permanentes al rotor.
- El criterio de igual área es una herramienta útil para determinar la estabilidad transitoria de un generador síncrono.

# Modelo dinámico de una máquina síncrona para los estudios de estabilidad del Sistema de Potencia

**Tradicionalmente, los estudios de estabilidad del sistema de potencia se enfocaban en la capacidad del sistema para mantener una operación síncrona después de una perturbación severa.**

Sin embargo, con el crecimiento continuo de las interconexiones, el mayor uso de nuevas tecnologías y la mayor necesidad de **operar los sistemas de energía en condiciones de alto estrés**, han surgido **otras formas de estabilidad** como fuentes de mayor preocupación que en el pasado.

Claramente, la **inestabilidad en un sistema de potencia** puede manifestarse de muchas maneras diferentes **según la configuración del sistema**, el modo de operación y la forma de perturbación.

# Modelo dinámico de una máquina síncrona para los estudios de estabilidad del Sistema de Potencia

**Análisis de problemas de estabilidad**, incluida la identificación de factores esenciales que contribuyen a la inestabilidad e idear métodos **para mejorar el funcionamiento estable** se facilita en gran medida mediante la **clasificación en categorías** apropiadas. Estos se basan en las siguientes consideraciones:

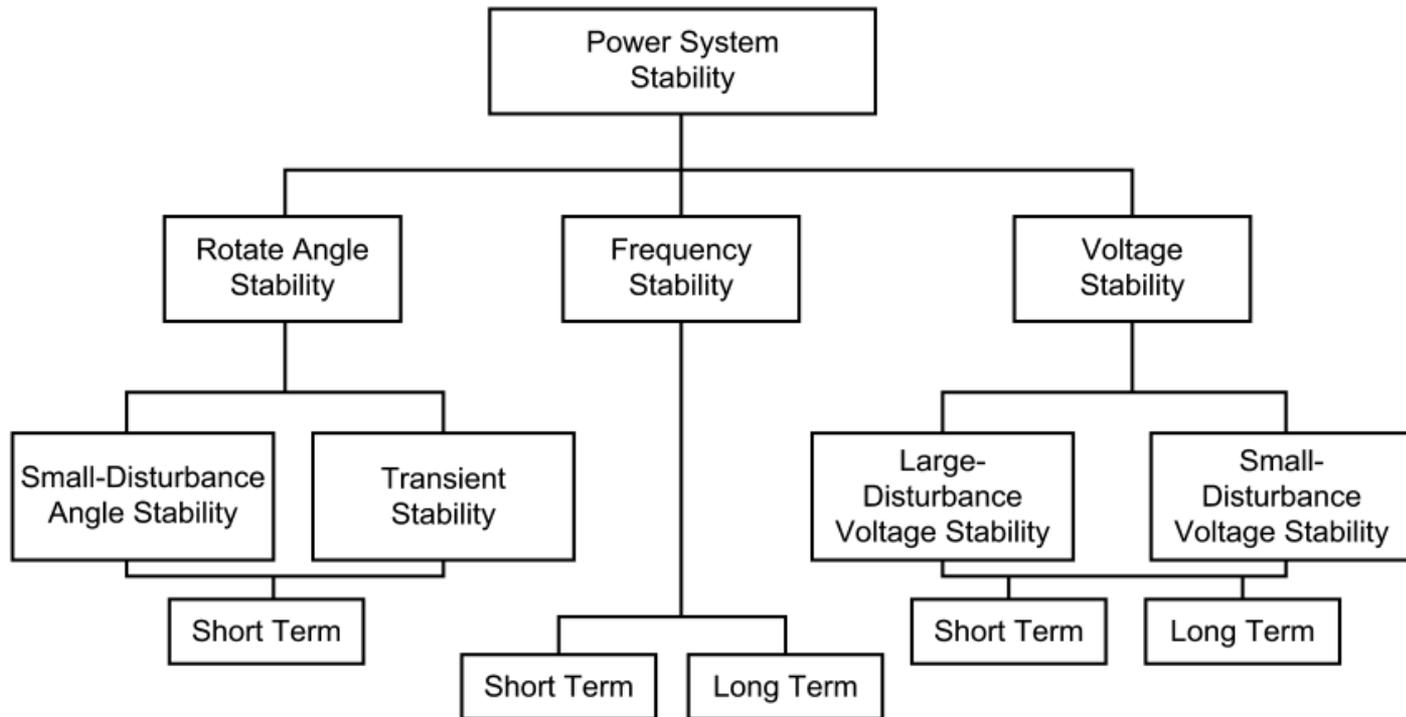
- La **naturaleza física de la inestabilidad resultante**, es decir, los principales parámetros del sistema en los que la inestabilidad se puede observar;
- El **tamaño de la perturbación considerada**, que repercute en el método de análisis aplicable.

Con **base en la naturaleza física de los fenómenos**, la estabilidad del sistema de potencia se puede clasificar en tres categorías principales:

- estabilidad del ángulo del rotor,
- estabilidad de voltaje y
- estabilidad de frecuencia.

# Modelo dinámico de una máquina síncrona para los estudios de estabilidad del Sistema de Potencia

## Estabilidad del Sistema de potencia



**Figure 1—Classification of power system stability [B34]**

[B34] IEEE/CIGRE joint task force on stability terms and definitions, "Definition and classification of power system stability," IEEE Transactions on Power Systems, vol. 19, no. 3, pp. 1387-1401, Aug. 2004.

# Modelo dinámico de una máquina síncrona para los estudios de estabilidad del Sistema de Potencia

La **ESTABILIDAD DEL ÁNGULO DEL ROTOR** (o **estabilidad del ángulo**) se refiere a la capacidad de las máquinas síncronas interconectadas de un sistema de potencia para permanecer en sincronismo en condiciones normales de funcionamiento y después de haber estado sujetas a una perturbación.

Un factor fundamental en este aspecto de la estabilidad es la forma en que el par y la potencia de salida de las máquinas síncronas varían a medida que oscilan sus rotores.

El mecanismo por el cual las máquinas síncronas mantienen el sincronismo entre sí es mediante el desarrollo de **pares restauradores** siempre que existan fuerzas que tiendan a acelerar o desacelerar las máquinas entre sí.

El cambio en el par electromagnético de una máquina síncrona después de una perturbación se puede descomponer en dos componentes: (i) un componente de **par de sincronización**, en fase con la desviación del ángulo del rotor, y (ii) un componente de **par de amortiguación**, en fase con la velocidad desviación.

La falta de un par de sincronización suficiente da como resultado una inestabilidad aperiódica, mientras que la falta de un par de amortiguación da como resultado una inestabilidad oscilatoria.

# Modelo dinámico de una máquina síncrona para los estudios de estabilidad del Sistema de Potencia

Por conveniencia en el análisis y para comprender mejor la naturaleza de los problemas de estabilidad, es útil caracterizar la estabilidad angular en las siguientes subcategorías según el tamaño de la perturbación considerada:

**a) La estabilidad del ángulo de gran perturbación**, comúnmente denominada estabilidad transitoria, se refiere a la capacidad del sistema de potencia para mantener el sincronismo cuando se somete a una perturbación grave, como una falla transitoria en un circuito de transmisión o la pérdida de un generador grande.

La respuesta del sistema resultante involucra grandes variaciones de los ángulos del rotor del generador y está influenciada por la relación no lineal entre potencia y ángulo de las máquinas síncronas. Por lo general, la perturbación altera el sistema de tal manera que las condiciones posteriores a la perturbación serán diferentes de las anteriores a la perturbación. La inestabilidad tiene la forma de una deriva aperiódica del ángulo del rotor debido a un par de sincronización insuficiente. En grandes sistemas de potencia, la inestabilidad transitoria no siempre puede ocurrir como una inestabilidad de primera oscilación asociada con un solo modo; podría ser el resultado de una mayor desviación máxima causada por la superposición de varios modos de oscilación que provocan grandes excursiones del ángulo del rotor más allá de la primera oscilación. El período de interés en la estabilidad transitoria generalmente se limita a unos 3 a 5 segundos después de la perturbación.

# Modelo dinámico de una máquina síncrona para los estudios de estabilidad del Sistema de Potencia

Por conveniencia en el análisis y para comprender mejor la naturaleza de los problemas de estabilidad, es útil caracterizar la estabilidad angular en las siguientes subcategorías según el tamaño de la perturbación considerada:

**b) La estabilidad del ángulo de pequeña perturbación** se refiere a la capacidad del sistema de potencia para mantener el sincronismo bajo pequeñas perturbaciones como las que ocurren continuamente en la operación normal del sistema de potencia.

Se considera que las perturbaciones son lo suficientemente pequeñas como para permitir la linealización de las ecuaciones del sistema con fines de análisis. El análisis de pequeña señal utilizando técnicas lineales proporciona información valiosa sobre las características dinámicas inherentes del sistema de potencia.

La inestabilidad que puede resultar puede ser de dos formas:

- (i) aumento en el ángulo del rotor a través de un modo no oscilatorio o aperiódico debido a la falta de par de sincronización, o
- (ii) oscilaciones del rotor de amplitud creciente debido a la falta de par de amortiguación suficiente.

# Modelo dinámico de una máquina síncrona para los estudios de estabilidad del Sistema de Potencia

La **ESTABILIDAD DEL VOLTAJE** se refiere a la capacidad de un sistema de potencia para mantener voltajes estables y aceptables en todos los buses del sistema en condiciones normales de operación y después de haber estado sujeto a una perturbación.

La inestabilidad que puede resultar ocurre en la forma de una caída o aumento progresivo del voltaje de algunos buses con solo desviaciones moderadas de los ángulos del generador.

El factor principal que causa la inestabilidad del voltaje es la incapacidad del sistema de potencia para mantener un equilibrio adecuado de potencia reactiva en todo el sistema. Esto está significativamente **influenciado por las características de las cargas del sistema y los dispositivos de control de voltaje, incluidos los generadores y su sistema de excitación.**

# Modelo dinámico de una máquina síncrona para los estudios de estabilidad del Sistema de Potencia

Clasificación de la estabilidad de voltaje en las siguientes dos subcategorías según el tamaño de la perturbación considerada:

- a) **La estabilidad de tensión ante grandes perturbaciones** se refiere a la capacidad de un sistema para mantener tensiones estables después de perturbaciones graves. La evaluación de la estabilidad generalmente requiere el examen del desempeño dinámico del sistema de potencia durante un período de tiempo suficiente para capturar las interacciones de dispositivos tales como cambiadores de tomas de transformadores bajo carga y limitadores de corriente de campo del generador. El período de estudio puede extenderse desde unos pocos segundos hasta varios minutos.
  
- b) **La estabilidad del voltaje ante pequeñas perturbaciones** se refiere a la capacidad de un sistema para mantener voltajes constantes después de pequeñas perturbaciones, como cambios incrementales en la carga. El análisis de pequeñas perturbaciones utilizando técnicas lineales brinda información valiosa relacionada con la estabilidad de voltaje desde una perspectiva de todo el sistema e identifica claramente las áreas que tienen problemas potenciales.

# Modelo dinámico de una máquina síncrona para los estudios de estabilidad del Sistema de Potencia

La **ESTABILIDAD DE FRECUENCIA** se refiere a la capacidad de un sistema de potencia para mantener la frecuencia dentro de un rango nominal después de una alteración severa del sistema, que puede o no resultar en que el sistema se divida en subsistemas (islas eléctricas). Depende de la capacidad de restablecer el equilibrio entre la generación del sistema y la carga con una pérdida mínima de carga.

El análisis de la estabilidad de la frecuencia se lleva a cabo utilizando simulaciones en el dominio del tiempo que incluyen todas las dinámicas rápidas y lentas apropiadas, suficientes para modelar los sistemas de control y protección que responden a grandes excursiones de frecuencia, así como a los grandes cambios que las acompañan en los voltajes y otras variables del sistema.

En el caso de grandes sistemas de energía interconectados, las simulaciones requeridas pueden incluir perturbaciones severas más allá de los criterios de diseño normales, lo que resulta en una cascada y división del sistema de energía en varias islas separadas con generadores en cada isla que permanecen en sincronismo. La estabilidad en este caso es una cuestión de si cada isla alcanzará o no un estado aceptable de equilibrio con una mínima pérdida de carga.

# Modelo dinámico de una máquina síncrona para los estudios de estabilidad del Sistema de Potencia

En el transcurso de una perturbación que resulte en inestabilidad de frecuencia, los tiempos característicos de los procesos y dispositivos que son activados por los grandes cambios en la frecuencia y otras variables del sistema oscilarán entre unos pocos segundos, correspondientes a las respuestas de dispositivos tales como controles de generador , a varios minutos, correspondientes a las respuestas de dispositivos tales como sistemas de suministro de energía del motor primario y reguladores de voltaje de carga.

# Requerimientos para el modelo de máquinas síncronas

**Las máquinas síncronas se pueden modelar con el mayor detalle posible en el estudio de la mayoría de las categorías de estabilidad del sistema de potencia.** Esto incluye una representación adecuada (sujeta a la disponibilidad de datos) de la **dinámica del circuito de campo, el sistema de excitación y los circuitos del amortiguador del rotor.** Con las herramientas informáticas actuales, no existe una necesidad apremiante de simplificar los modelos para tipos específicos de estudios. Además, la experiencia ha demostrado que los problemas críticos pueden quedar enmascarados por el uso de modelos simplificados que a veces se perciben como aceptables para un tipo particular de estudio.

Para el análisis de muchos problemas de estabilidad de voltaje y estabilidad de frecuencia utilizando simulaciones en el dominio del tiempo, los períodos de estudio están en el rango de decenas de segundos a varios minutos. Para mejorar la eficiencia computacional de tales simulaciones dinámicas a largo plazo, en lugar de simplificar los modelos al descuidar la dinámica rápida, es mejor usar técnicas de perturbación singular para separar la dinámica rápida y lenta y aproximar apropiadamente la dinámica rápida.

# Requerimientos para el modelo de máquinas síncronas

No obstante lo anterior, es importante reconocer los siguientes requisitos especiales en la representación de máquinas síncronas para diferentes categorías de estudios de estabilidad:

- a) **Para el análisis de estabilidad del ángulo del rotor de grandes perturbaciones**, particularmente para generadores con sistemas de excitación de alta respuesta inicial, **los efectos de saturación magnética deben representarse con precisión** en los niveles de flujo correspondientes a la operación normal hasta los valores más altos experimentados con la excitación. Si se subestiman los efectos de saturación, los resultados del análisis serían demasiado optimistas. Es particularmente importante representar la dinámica del circuito de campo, ya que tiene una influencia significativa en la efectividad del sistema de excitación para mejorar la estabilidad del ángulo del rotor con grandes perturbaciones.

# Requerimientos para el modelo de máquinas síncronas

b)

Para el **análisis de estabilidad del ángulo del rotor con perturbaciones pequeñas**, es importante una **representación precisa del circuito de campo, así como de los circuitos amortiguadores del rotor**.

c)

Para los **estudios de estabilidad de voltaje, el control de voltaje y las capacidades de suministro de energía reactiva de los generadores son de suma importancia**. Durante condiciones de bajo voltaje del sistema, la demanda de potencia reactiva en los generadores puede exceder sus límites de corriente de campo. En tales situaciones, por lo general, las corrientes de campo del generador se limitan automáticamente mediante limitadores de sobreexcitación, lo que agrava aún más la situación y posiblemente provoque inestabilidad de voltaje. Por lo tanto, **los modelos de generadores deben ser capaces de determinar con precisión las corrientes de campo transitorias y tener en cuenta las acciones de los limitadores de corriente de campo**.

# Modelo dinámico de una máquina síncrona

Los **generadores síncronos se construyen** más comúnmente con:

- un devanado de armadura trifásico en el estator (aunque también se encuentran otros arreglos polifásicos) y
- un devanado de excitación (conocido como devanado de campo) en el rotor.

Además, los rotores de generadores síncronos incluyen otras rutas conductoras en las que se pueden inducir corrientes durante un transitorio. En algunos casos, el diseñador incluye intencionalmente estos caminos conductores; por ejemplo, **devanados amortiguadores** de cara polar. En otros casos, son inherentes al diseño de la máquina, como es el caso de las **corrientes que se pueden ser inducidas** en el cuerpo rotor de un turbogenerador de rotor sólido.

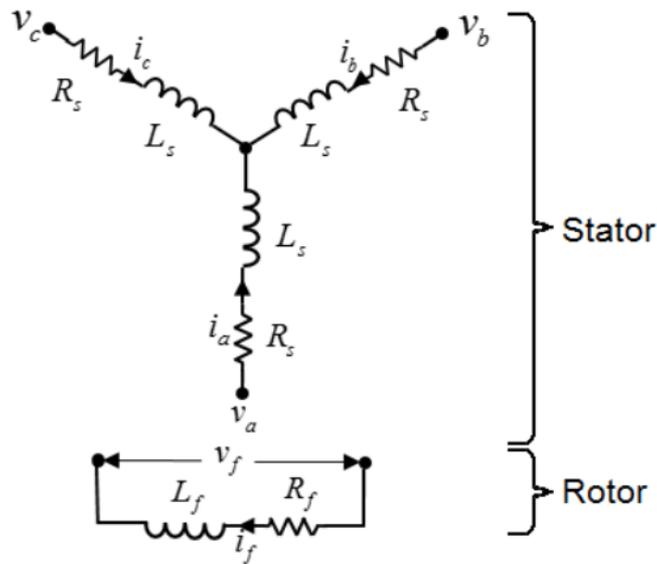
El proceso de desarrollo de técnicas para el análisis de máquinas síncronas, se reconoció que los análisis pueden simplificarse mucho si se realizan en un **marco de referencia que gira con el rotor**. Para tales análisis, las corrientes y voltajes del inducido se transforman en dos conjuntos de variables ortogonales, un conjunto **alineado con el eje magnético del devanado de campo, conocido como el eje directo del rotor (eje d)**, y un **segundo conjunto alineado a lo largo del rotor en una posición a 90 grados eléctricos del eje magnético del devanado de campo**. Este segundo eje se conoce como **eje de cuadratura del rotor (eje q)**.

# Modelo dinámico de una máquina síncrona

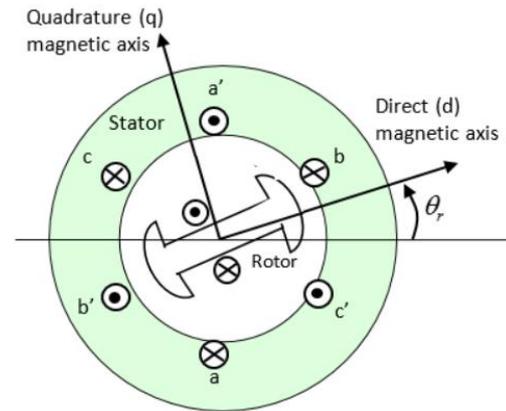
La representación del sistema en el marco de referencia dq (Park) tiene las siguientes dos características:

- 1) En condiciones de **operación de estado estacionario**, todas **las corrientes y flujos**, incluidos los de los devanados del rotor y los devanados del inducido transformados, **tienen valores constantes (DC)**.
- 2) Al elegir los dos ejes con una **separación de 90 grados eléctricos**, **los flujos** producidos por las corrientes **en los devanados de un eje no producen enlaces de flujo en los devanados del otro eje**. Por tanto, estos conjuntos de devanados son ortogonales. Esto simplifica enormemente la relación flujo-corriente del modelo y da lugar a una estructura de modelo que consta de dos redes independientes, una para el eje directo y otra para el eje de cuadratura.

# Modelo dinámico de una máquina síncrona



El diagrama muestra la construcción del motor con un solo par de polos en el rotor. Para la convención de ejes, cuando el ángulo mecánico del rotor  $\theta_r$  es cero, los flujos de imán permanente y de fase a están alineados.



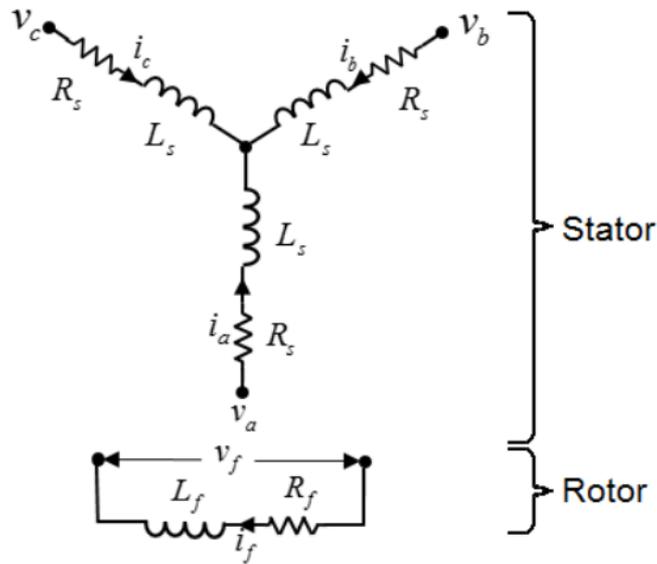
$$\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 \\ 0 & 0 & R_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{d\psi_a}{dt} \\ \frac{d\psi_b}{dt} \\ \frac{d\psi_c}{dt} \end{bmatrix}$$

$$v_f = R_f i_f + \frac{d\psi_f}{dt}$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = T - T_L - B_m \omega$$

$B_m$  es la amortiguación del rotor.

# Modelo dinámico de una máquina síncrona



Las inductancias en los devanados del estator son funciones del ángulo eléctrico del rotor y están definidas por:

$$\theta_e = N\theta_r + \text{rotor offset},$$

$$L_{aa} = L_s + L_m \cos(2\theta_e),$$

$$L_{bb} = L_s + L_m \cos(2(\theta_e - 2\pi/3)),$$

$$L_{cc} = L_s + L_m \cos(2(\theta_e + 2\pi/3)),$$

$$L_{ab} = L_{ba} = -M_s - L_m \cos(2(\theta_e + \pi/6)),$$

$$L_{bc} = L_{cb} = -M_s - L_m \cos(2(\theta_e + \pi/6 - 2\pi/3)),$$

$$L_{ca} = L_{ac} = -M_s - L_m \cos(2(\theta_e + \pi/6 + 2\pi/3)),$$

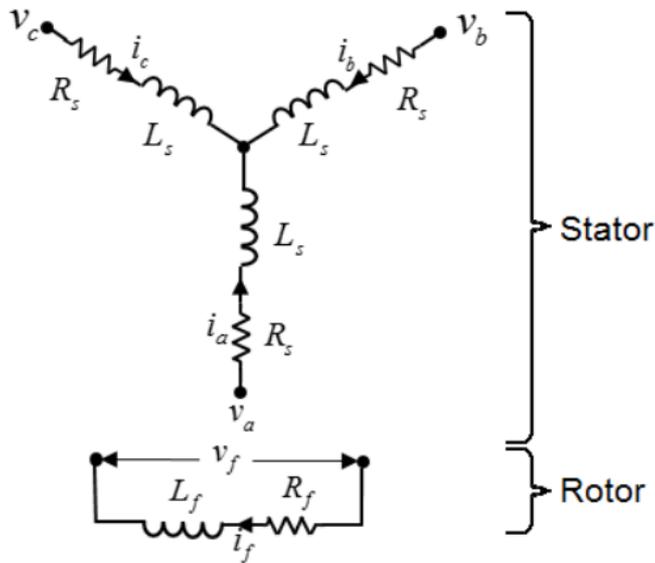
$$L_{mf} = \begin{bmatrix} L_{amf} \\ L_{bmf} \\ L_{cmf} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{mf} \cos \theta_e \\ L_{mf} \cos(\theta_e - 2\pi/3) \\ L_{mf} \cos(\theta_e + 2\pi/3) \end{bmatrix}$$

“Rotor offset” es 0 si define el ángulo eléctrico del rotor con respecto al eje d, o -pi/2 si define el ángulo eléctrico del rotor con respecto al eje q.

$$\begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{ab} & L_{ac} \\ L_{ba} & L_{bb} & L_{bc} \\ L_{ca} & L_{cb} & L_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{amf} \\ L_{bmf} \\ L_{cmf} \end{bmatrix} i_f$$

$$\Psi_f = L_f i_f + L_{mf}^T \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix}$$

# Modelo dinámico de una máquina síncrona



Las inductancias en los devanados del estator son funciones del ángulo eléctrico del rotor y están definidas por:

$$\theta_e = N\theta_r + \text{rotor offset},$$

$$L_{aa} = L_s + L_m \cos(2\theta_e),$$

$$L_{bb} = L_s + L_m \cos(2(\theta_e - 2\pi/3)),$$

$$L_{cc} = L_s + L_m \cos(2(\theta_e + 2\pi/3)),$$

$$L_{ab} = L_{ba} = -M_s - L_m \cos(2(\theta_e + \pi/6)),$$

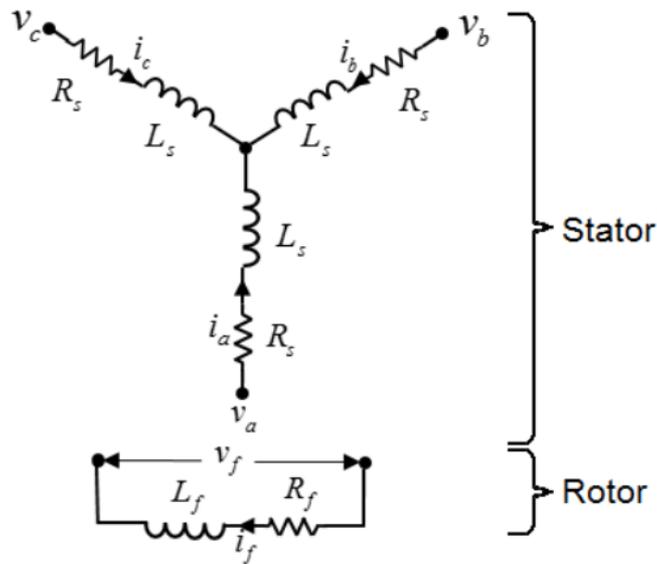
$$L_{bc} = L_{cb} = -M_s - L_m \cos(2(\theta_e + \pi/6 - 2\pi/3)),$$

$$L_{ca} = L_{ac} = -M_s - L_m \cos(2(\theta_e + \pi/6 + 2\pi/3)),$$

$$L_{mf} = \begin{bmatrix} L_{amf} \\ L_{bmf} \\ L_{cmf} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{mf} \cos \theta_e \\ L_{mf} \cos(\theta_e - 2\pi/3) \\ L_{mf} \cos(\theta_e + 2\pi/3) \end{bmatrix}$$

- $L_s$  es la autoinductancia del estator por fase.
- $M_s$  es la inductancia mutua del estator.
- $L_m$  es la fluctuación de la inductancia del estator. Este valor es la fluctuación en la autoinducción y la inductancia mutua con el cambio del ángulo del rotor.
- $L_{mf}$  es inductancia mutual del devanda de campo

# Modelo dinámico de una máquina síncrona



La aplicación de la transformación de Park a las ecuaciones de definición eléctrica del bloque produce una expresión para el par que es independiente del ángulo del rotor.

La transformación de Park está definida por

$$P = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos \theta_e & \cos(\theta_e - 2\pi/3) & \cos(\theta_e + 2\pi/3) \\ -\sin \theta_e & -\sin(\theta_e - 2\pi/3) & -\sin(\theta_e + 2\pi/3) \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

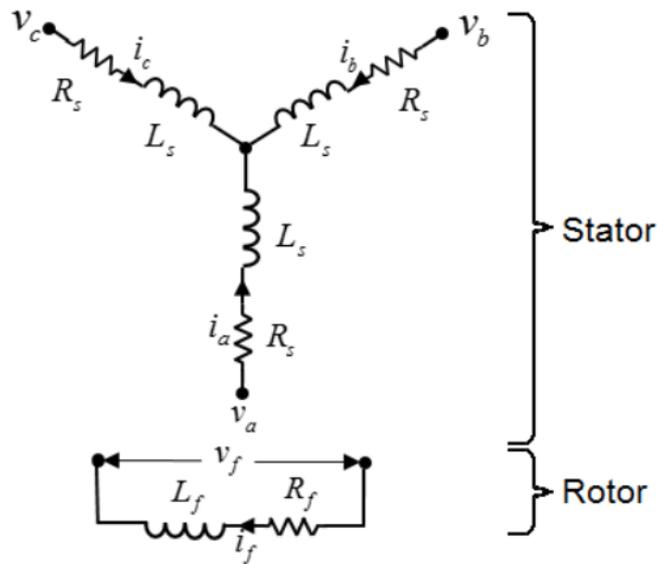
$$\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 \\ 0 & 0 & R_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{d\psi_a}{dt} \\ \frac{d\psi_b}{dt} \\ \frac{d\psi_c}{dt} \end{bmatrix}$$

$$v_f = R_f i_f + \frac{d\psi_f}{dt}$$



$$\begin{bmatrix} v_d = R_s i_d + L_d \frac{di_d}{dt} + L_{mf} \frac{di_f}{dt} - N\omega i_q L_q \\ v_q = R_s i_q + L_q \frac{di_q}{dt} + N\omega(i_d L_d + i_f L_{mf}), \\ v_0 = R_s i_0 + L_0 \frac{di_0}{dt}, \\ v_f = R_f i_f + L_f \frac{di_f}{dt} + \frac{3}{2} L_{mf} \frac{di_d}{dt} \end{bmatrix}$$

# Modelo dinámico de una máquina síncrona



La **aplicación de la transformación de Park** a las ecuaciones de definición eléctrica del bloque produce una expresión para el **par que es independiente del ángulo del rotor.**

La transformación de Park está definida por

$$P = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos \theta_e & \cos(\theta_e - 2\pi/3) & \cos(\theta_e + 2\pi/3) \\ -\sin \theta_e & -\sin(\theta_e - 2\pi/3) & -\sin(\theta_e + 2\pi/3) \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$



$$T = \frac{3}{2} N (i_q (i_d L_d + i_f L_{mf}) - i_d i_q L_q)$$

$$L_d = L_s + M_s + 3/2 L_m$$

$$L_q = L_s + M_s - 3/2 L_m$$

$$L_0 = L_s - 2M_s$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = T - T_L - B_m \omega$$

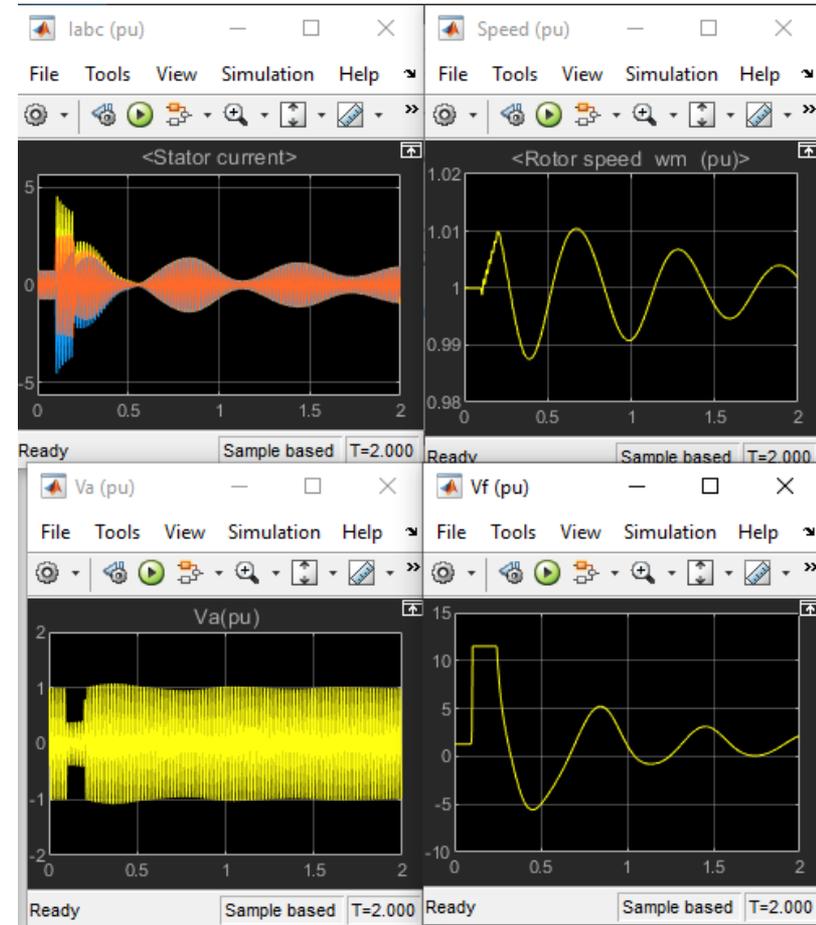
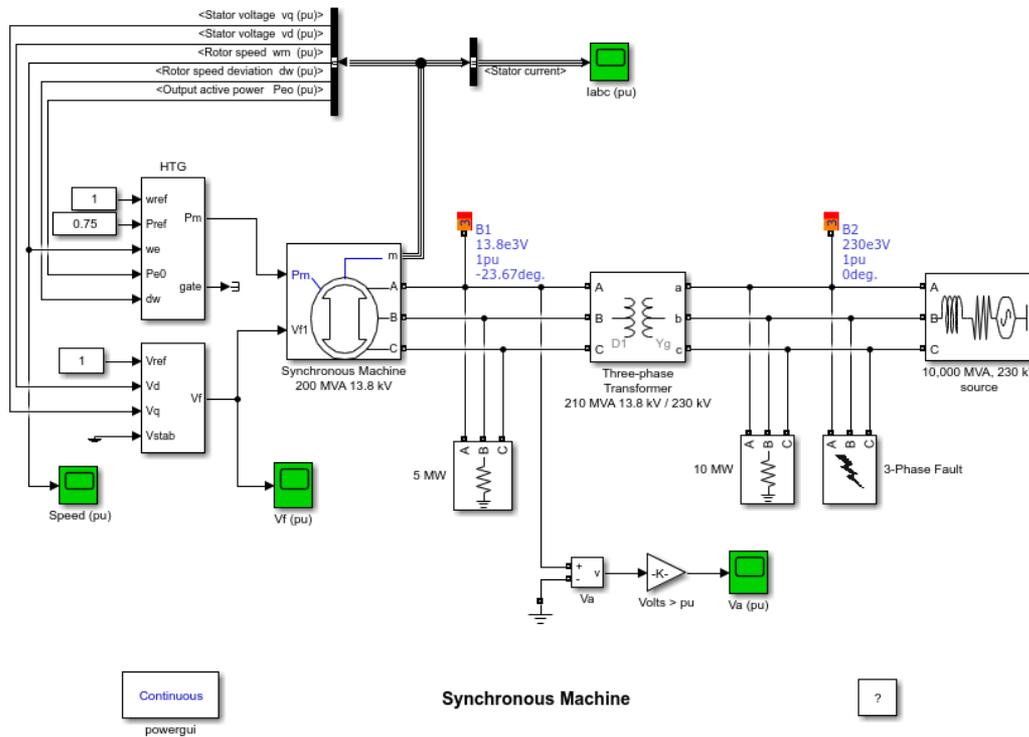
$$T_e = \frac{1}{2} p_1 [i]^T \cdot \frac{dL(\theta_{er})}{d\theta_{er}} \cdot [i]$$

(13)

$B_m$  es la amortiguación del rotor.

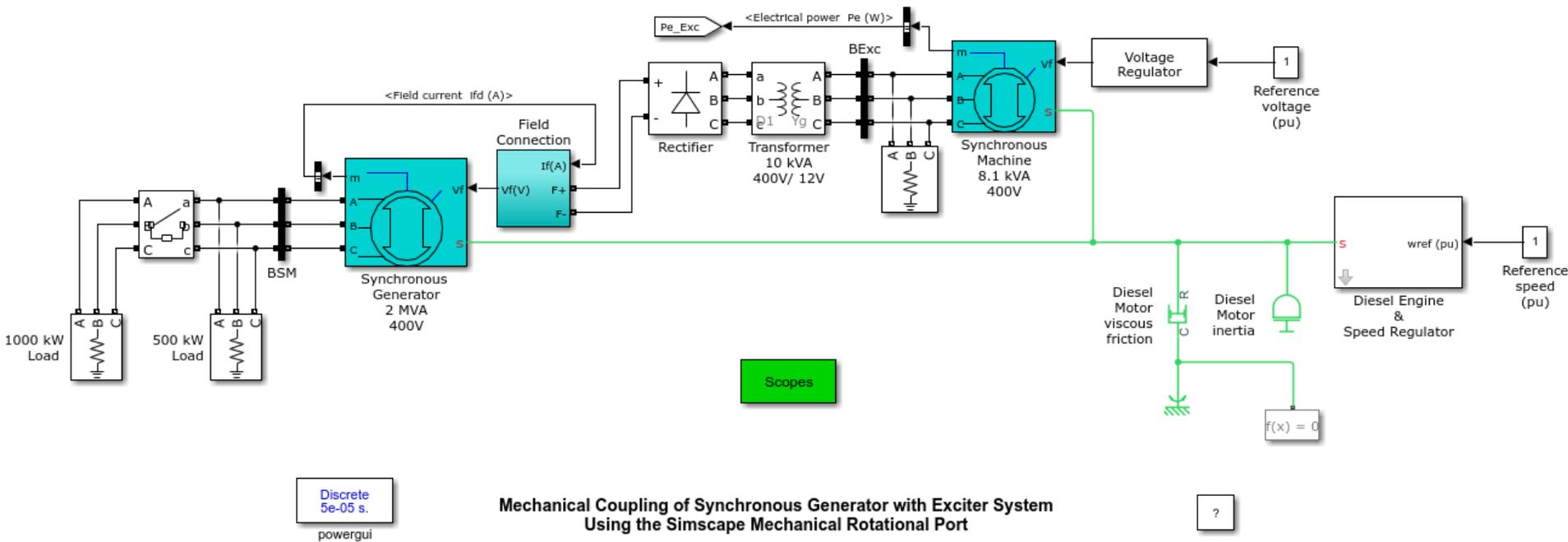
# Ejemplo. Modelo dinámico de una máquina síncrona

Un generador trifásico de 200 MVA, 13.8 kV, 112.5 rpm está conectado a una red de 230 kV, 10 000 MVA a través de un transformador Delta-Triángulo de 210 MVA. En  $t = 0.1$  s, ocurre una falla trifásica a tierra en la barra de 230 kV. El fallo se elimina después de 6 ciclos ( $t = 0,2$  s).

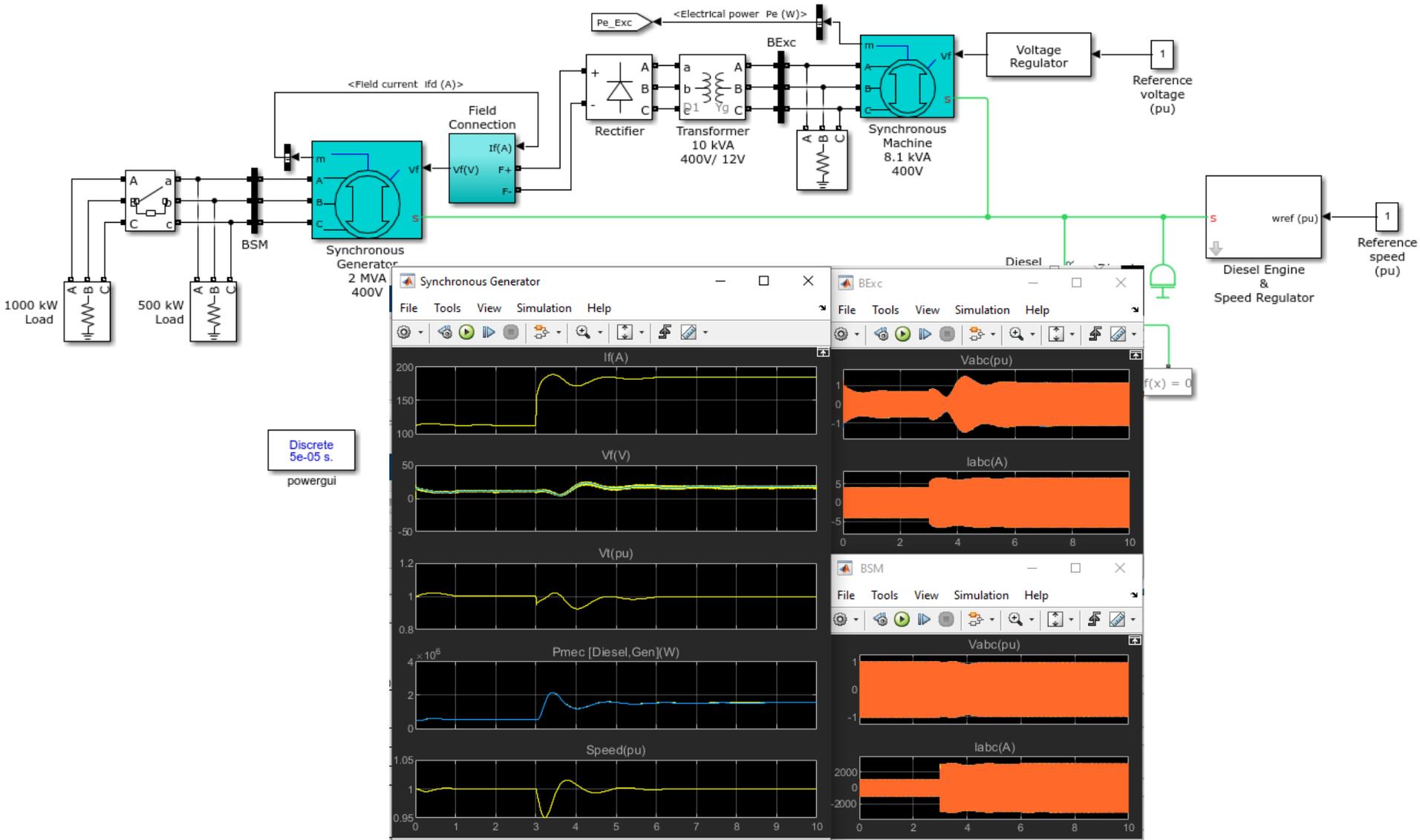


# Ejemplo. Modelo dinámico de una máquina síncrona

En los grandes alternadores, el sistema de excitación lo proporciona una pequeña máquina síncrona conectada al eje del generador síncrono. La rectificación de corriente se realiza mediante un puente de diodos giratorios montado en el eje del generador, evitando así anillos colectores para proporcionar alimentación de CC al campo del generador síncrono. El generador síncrono es accionado por un motor diesel con regulación de velocidad.



# Ejemplo. Modelo dinámico de una máquina síncrona



Tema 2: DINÁMICA, REGULACIÓN Y CONTROL DE MÁQUINAS ELÉCTRICAS

# **DINÁMICA DE MÁQUINAS ELÉCTRICAS: MÁQUINAS CC**

# Transitorios en las Máquinas Eléctricas

Cuando las condiciones en que se opera una máquina eléctrica cambian abruptamente, esta no puede responder de manera instantánea al cambio debido a la inercia. Así la máquina pasa por un **estado transitorio (dinámico)** para reajustar el equilibrio de energía desde el momento en que comienza el cambio hasta que se alcanza el estado final.

La situación transitoria puede deberse a un cambio súbito en la carga, en el voltaje o ambos.

Por ejemplo, cortocircuitos repentinos en los terminales de un motor de inducción produce grandes picos de corriente y gran par.

¿Por qué modelar los transitorios?

Es requerido para el **control de velocidad variable de los motores**, en los cuales **hay transitorios Electromagnéticos y Mecánicos**.

# Dinámica de las máquinas de Corriente Continua

Para un motor shunt en Condiciones Estables tenemos que:

Donde

$K_a$  = la constante de la máquina

$I_a$  = la corriente de armadura

$\phi_p$  = flujo por polo

$R_a$  = resistencia efectiva del circuito de la armadura

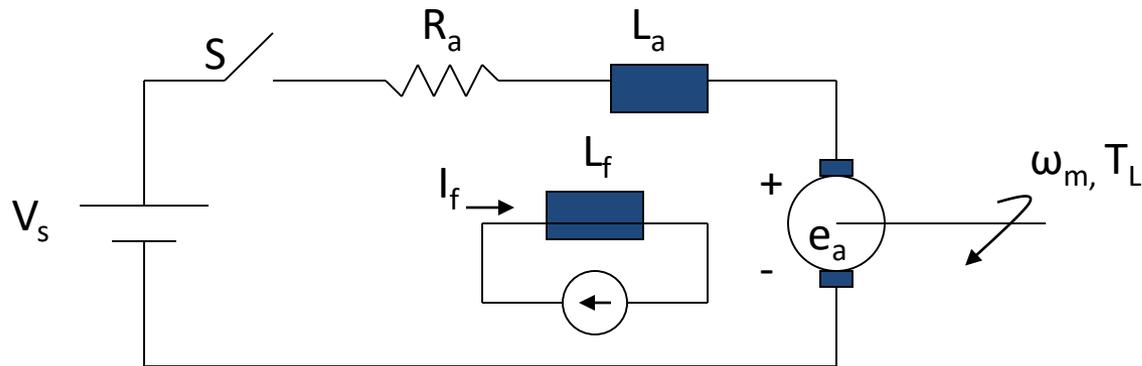
$V_s$  = el voltaje de suministro

$$T_d = K_a I_a \phi_p \quad \text{par desarrolla do}$$
$$\omega_m = \frac{V_s - I_a R_a}{K_a \phi_p} \quad \text{velocidad angular}$$

Hay 2 métodos para controlar la velocidad:

- Método de control de la armadura (modificando el voltaje  $V_s$  o la resistencia  $R_a$ ).
- Método de control de campo (modificando el flujo que se controla con la corriente del devanado del campo shunt,  $I_f$ ).

# Motores de C.C. controlados por armadura (rotor)



Al cerrar  $S$  el motor de cc experimenta un estado transitorio debido a la aplicación súbita del voltaje a la armadura.

Si la corriente del campo se mantiene constante o se trata de un motor con imanes permanentes, la variación de la corriente de la armadura puede representarse por:

$$R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + k\omega_m(t) = V_s$$

donde

$k = K_a \phi_p$  es la fuerza contraelectromotriz del motor

El par desarrollado por el motor puede expresarse como:

$$T_L + D\omega_m(t) + J \frac{d\omega_m(t)}{dt} = ki_a(t)$$

Donde

$Ki_a(t)$  = es el par desarrollado  $T_d$

$T_L$  = par de la carga

$D$  = coeficiente de fricción viscosa

$J$  = momento de inercia de los elementos giratorios

$$\left. \begin{aligned} R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + k\omega_m(t) &= V_s \\ T_L + D\omega_m(t) + J \frac{d\omega_m(t)}{dt} &= ki_a(t) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + k\omega_m(t) &= V_s \\ T_L + D\omega_m(t) + J \frac{d\omega_m(t)}{dt} &= ki_a(t) \end{aligned} \right\}$$

En forma matricial :

$$\begin{bmatrix} \frac{d\omega_m(t)}{dt} \\ \frac{di_a(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{D}{J} & \frac{K}{J} \\ -\frac{K}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} * \underbrace{\begin{bmatrix} \omega_m(t) \\ i_a(t) \end{bmatrix}}_{\text{Variables de estado}} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{J} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} T_L \\ V_s \end{bmatrix}}_{\text{Variables de entrada}}$$

# Resolvemos las ecuaciones por el método de Transformación de Laplace:

$$\left. \begin{aligned} R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + k\omega_m(t) &= V_s \\ T_L + D\omega_m(t) + J \frac{d\omega_m(t)}{dt} &= ki_a(t) \end{aligned} \right\}$$

Resolvemos las ecuaciones por el método de Transformación de Laplace:

$$\left. \begin{aligned} R_a I_a(s) + sL_a I_a(s) - L_a i_a(0) + k\Omega_m(s) &= V_s(s) \\ T_L(s) + D\Omega_m(s) + sJ\Omega_m(s) - J\omega_m(0) &= kI_a(s) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} (R_a + sL_a)I_a(s) + k\Omega_m(s) &= V_s(s) + L_a i_a(0) \\ -kI_a(s) + (D + sJ)\Omega_m(s) &= J\omega_m(0) - T_L(s) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} (R_a + sL_a)I_a(s) + k\Omega_m(s) &= V_s(s) + L_a i_a(0) \\ -kI_a(s) + (D + sJ)\Omega_m(s) &= J\omega_m(0) - T_L(s) \end{aligned} \right\}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones algebraico tenemos:

$$I_a(s) = \frac{(D + sJ)(V_s(s) + L_a i_a(0) - k(J\omega_m(0) - T_L(s)))}{(R_a + sL_a)(D + sJ) + k^2}$$

$$\Omega_m(s) = \frac{(R_a + sL_a)(J\omega_m(0) - T_L(s) + (V_s(s) + L_a i_a(0)))}{(R_a + sL_a)(D + sJ) + k^2}$$

En este punto hay que aplicar las condiciones iniciales del problema y aplicar la antitransformada de Laplace. De esta forma obtendremos la velocidad del motor y la corriente de la armadura en el dominio del tiempo

# Ejemplo 1

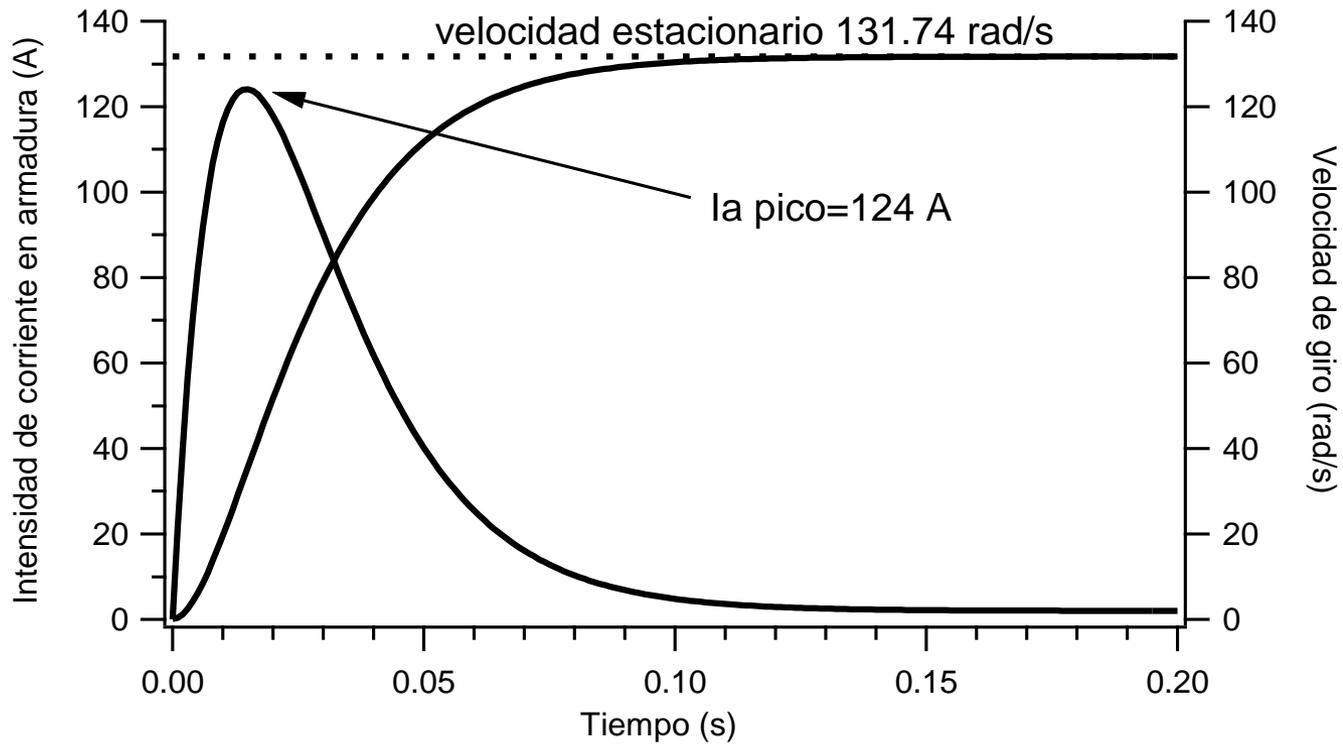
Un motor de C.C. de 240 V e imanes permanentes toma 2 A siempre que opera sin carga. La resistencia del devanado de su armadura y su inductancia son de 1.43 y 10,4 mH, respectivamente. El flujo por polo es de 5 mWb y la constante del motor  $K_a$  es 360, el momento de inercia es de 0.068 Kgm<sup>2</sup>.

- a) Si el motor se conecta de manera repentina a un suministro de C.C. de 240 V, mientras trabaja sin carga, determinar su velocidad y
- b) La corriente de la armadura como función del tiempo.
- c) determinar el valor del pico de corriente máxima. ¿Cuánto tiempo tarda en alcanzar dicho valor? Y ¿Qué velocidad tiene el motor cuando circula el pico de corriente?

Solución:

$$\omega_m(t) = 131.74 + 351.87e^{-79.84t} - 483.56e^{-58.10t}$$

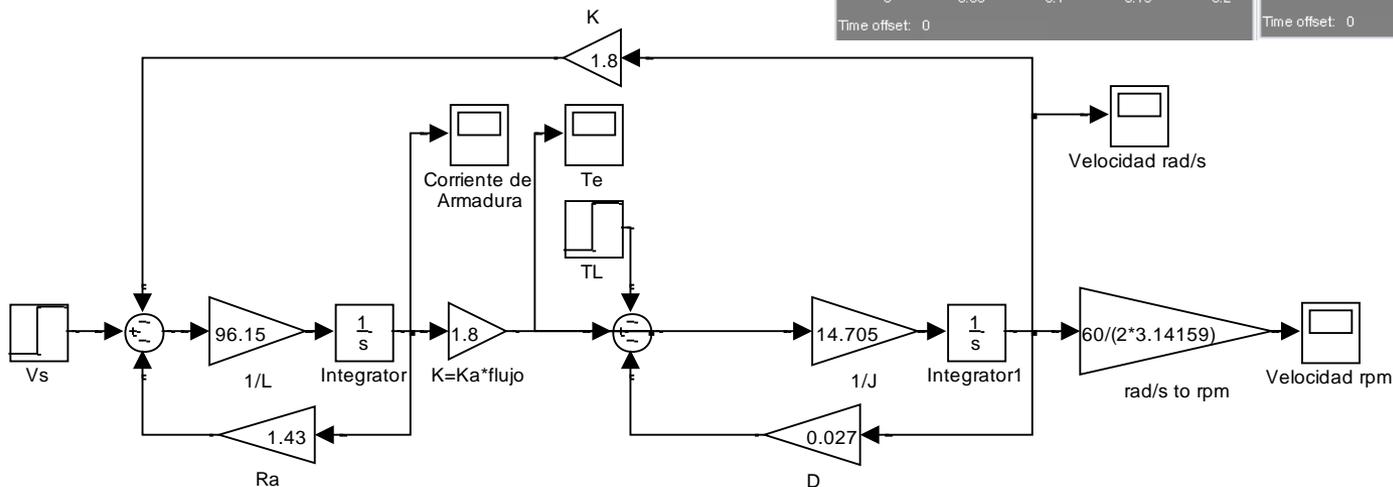
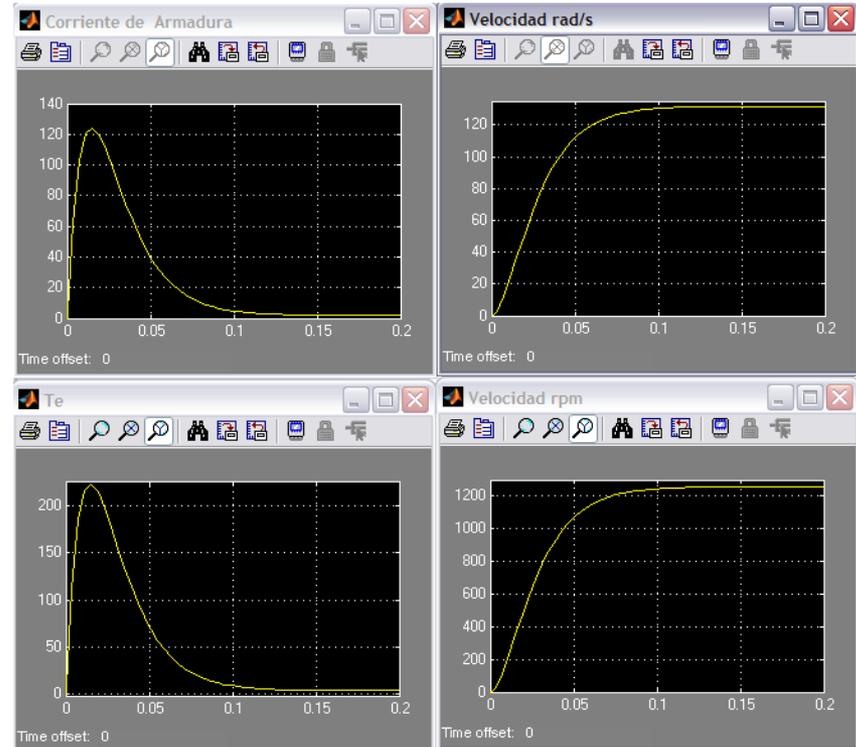
$$i_a(t) = 2 + 1054e^{-58.10t} - 1056e^{-79.84t}$$



# Modelo de la máquina de CC con Simulink

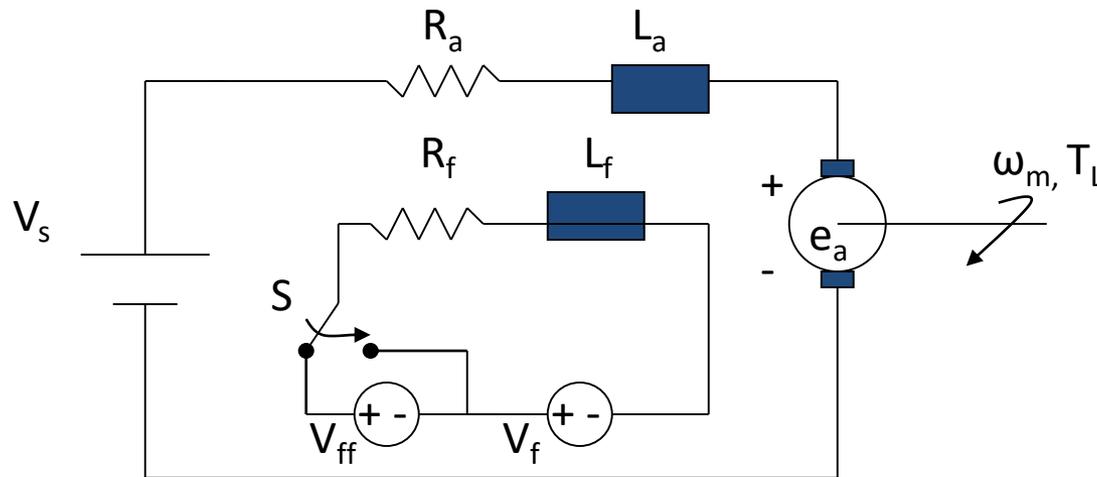
Resolvemos el problema de la máquina de CC con Simulink

$$\left. \begin{aligned} R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + k\omega_m(t) &= V_s \\ T_L + D\omega_m(t) + J \frac{d\omega_m(t)}{dt} &= ki_a(t) \end{aligned} \right\}$$



# Motores de C.C. controlados por el campo

Lo que varía es la corriente del campo.



Motor de CC con excitación independiente, que experimenta un cambio de voltaje de campo en  $t=0$ .

Suponemos que trabaja en la región lineal de su característica de magnetización de modo que el flujo que produce es proporcional a la corriente del campo

$$\phi_p = k_f i_f$$

La fuerza contraelectromotriz y el par desarrollado en el motor son:

$$E_a = k_a \phi_p \omega_m = k_a k_f i_f \omega_m = k_T i_f \omega_m$$

$$T_d = k_a \phi_p i_a = k_T i_f i_a$$

A medida que el voltaje del campo,  $V_f$ , o la resistencia total,  $R_f$ , en el circuito del campo se ajusta para modificar la corriente del campo  $i_f$ , se cumple que

$$V_f = R_f i_f(t) + L_f \frac{di_f(t)}{dt} \quad (1)$$

Si  $i_f$  cambia, también lo hace la fuerza contraelectromotriz y el par desarrollado

$$\overbrace{k_T i_f(t) \omega_m(t)}^{e_a} = V_s - R_a i_a(t) - L_a \frac{di_a(t)}{dt} \quad (2)$$

$$\underbrace{k_T i_f(t)}_{k_a k_f} i_a(t) = T_L + D \omega_m(t) + J \frac{d\omega(t)}{dt} \quad (3)$$

Tenemos tres ecuaciones y tres variables de estado,  $\omega_m$ ,  $i_a(t)$  e  $i_f(t)$ .

Las ecuaciones 2 y 3 no son lineales por tener productos de dos variables.

Se puede hacer una suposición para linealizarlas:

- En un motor eléctrico, la constante de tiempo del circuito eléctrico es mucho más pequeña que la constante de tiempo dependiente de sus elementos mecánicos.

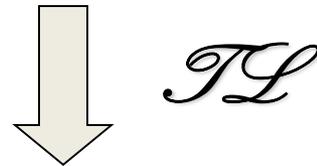
Por ende, puede suponerse que **la corriente del campo ya alcanzó su nuevo valor de estado estable** (corriente constante,  $I_f$ ) **antes de que la armadura** (rotor) responda a los cambios en la corriente del campo.

En este caso las ecuaciones 2 y 3 se convierten en ecuaciones lineales.

$$\left. \begin{aligned} k_T I_f \omega_m(t) &= V_s - R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} \\ k_T I_f i_a(t) &= T_L + D \omega_m(t) + J \frac{d\omega(t)}{dt} \\ V_f &= R_f i_f(t) + L_f \frac{di_f(t)}{dt} \end{aligned} \right\}$$

Aplicamos la **transformada de Laplace** para obtener las respuestas dinámicas. El sistema de ecuaciones ahora es

$$\left. \begin{aligned} k_T I_f \omega_m(t) &= V_s - R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} \\ k_T I_f i_a(t) &= T_L + D \omega_m(t) + J \frac{d\omega(t)}{dt} \\ V_f &= R_f i_f(t) + L_f \frac{di_f(t)}{dt} \end{aligned} \right\}$$



$$\left. \begin{aligned} k_T I_f \Omega_m(s) &= V_s(s) - (R_a + sL_a)I_a(s) + L_a i(0) \\ k_T I_f I_a(s) &= T_L(s) + (D - sJ)\Omega_m(s) - j\omega_m(0) \\ V_f(s) &= (R_f + sL_f)I_f(s) - L_f i_f(0) \end{aligned} \right\}$$

## Ejemplo 2

Un motor de CC con excitación independiente de 240 V y 12 hp trabaja con una carga de 15 Nm en la región lineal de su característica de magnetización y tiene los parámetros  $R_a=0.28$  ohm,  $L_a=2.81$  mH,  $R_f=320$  ohm,  $L_f=2$  H,  $J=0.087$  Kgm<sup>2</sup>,  $D=0.02$  Nms,  $K_T=1.03$

Determinar la variación de la velocidad del motor, la corriente de la armadura y la corriente del campo, como función del tiempo cuando, el voltaje del campo se reduce bruscamente de 240 V a 192 V, en  $t=0$ .

Solución:

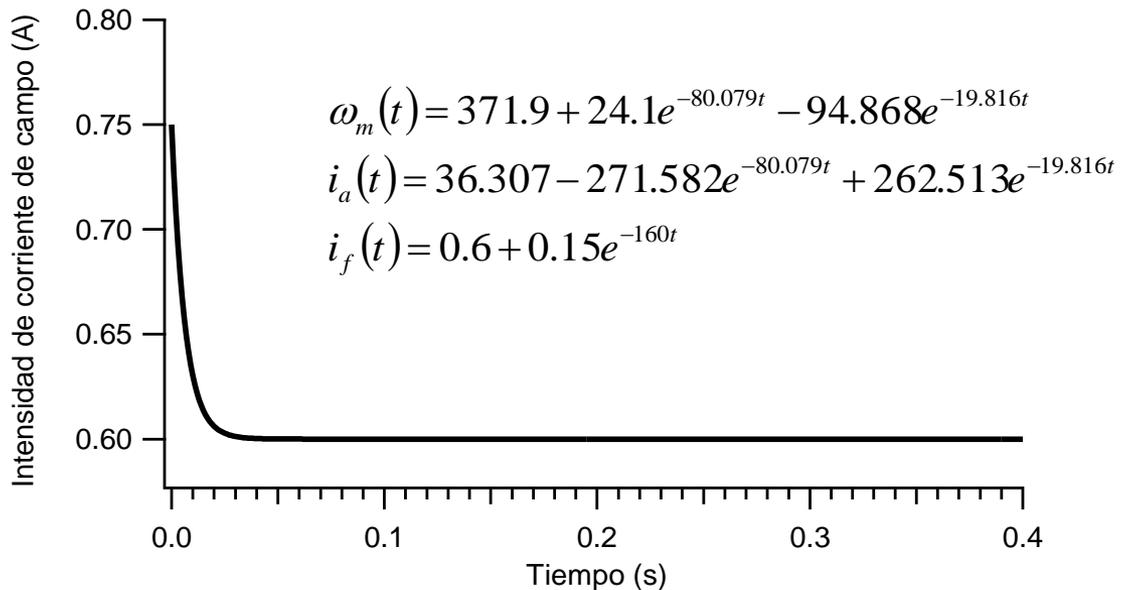
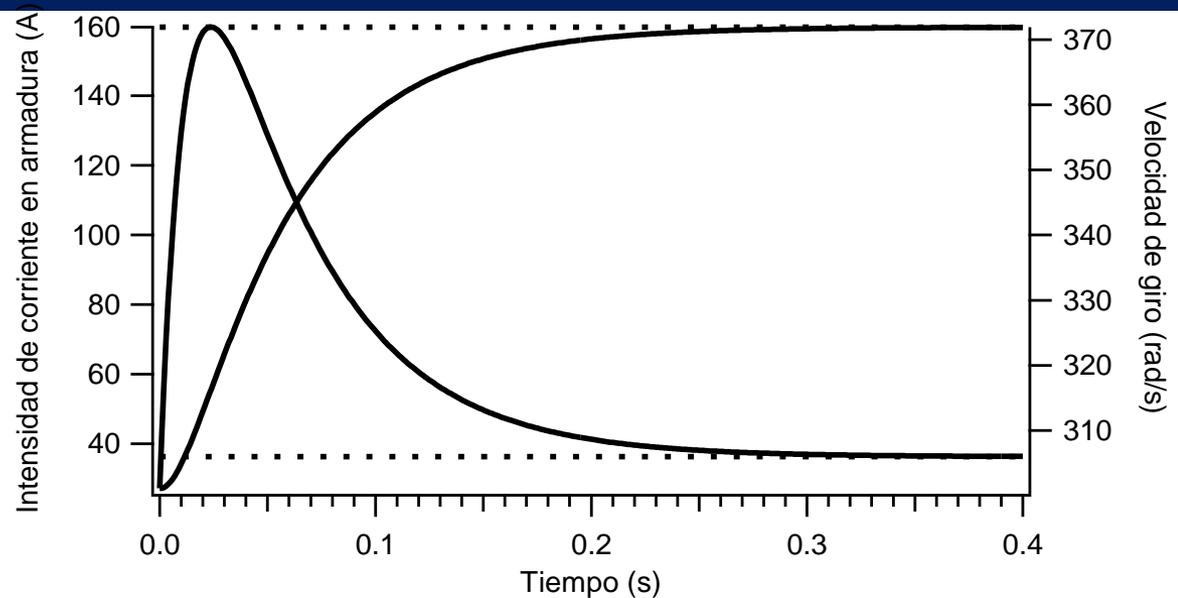
$i_f$  alcanza su estado estable alrededor de los 30 ms y por otro lado  $i_a$  y  $\omega_m$  a los 300 ms. Esto concuerda con la suposición de que la respuesta mecánica es más lenta en comparación con la respuesta eléctrica que resultada del cambio de estados.

El valor de pico de la armadura está muy por arriba de la especificación del motor. Esto se debe a que la constante de tiempo mecánica del motor no permite un cambio rápido en la fuerza contraelectromotriz.

Por tanto, se recomienda que la corriente de campo se modifique gradualmente.

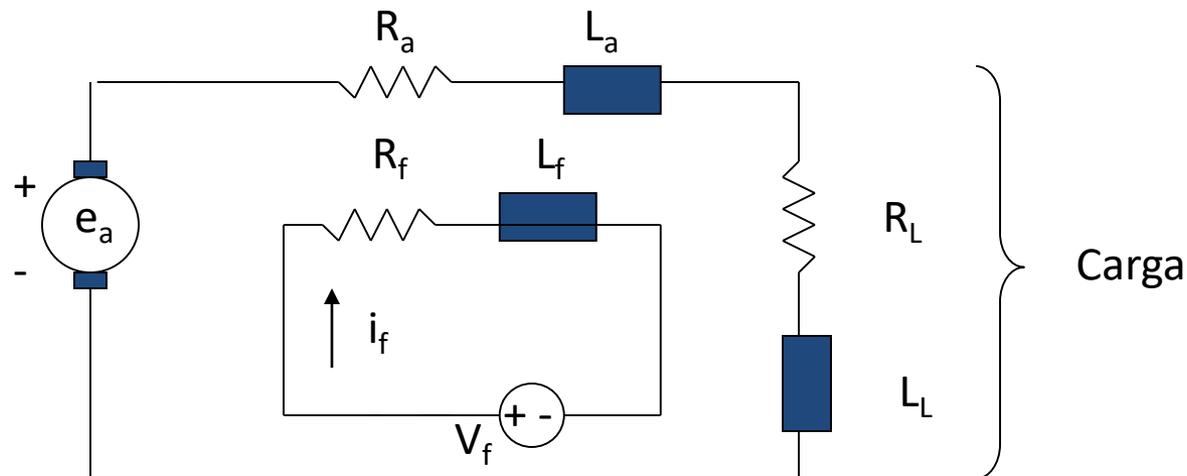
El valor final de la corriente de la armadura es más elevado que el que se tenía antes de reducirse la corriente de campo. La razón es que las pérdidas mecánicas aumentan con la velocidad del motor lo cual exige un par más elevado.

Por tanto, el incremento de par desarrollado ocasionó un aumento de la corriente de la armadura.



# Dinámica de los generadores de C.C.

Circuito equivalente de un generador de C.C. con excitación independiente.



- Suponemos que el generador trabaja en la región lineal.
  - Suponemos que la velocidad del eje es prácticamente constante.
- Podemos entonces determinar un comportamiento dinámico respecto a los cambios de las corrientes de la armadura y del campo.

En estado dinámico las ecuaciones que describen al generador son:

-El voltaje del campo

$$V_f = R_f i_f(t) + L_f \frac{di_f(t)}{dt}$$

- El voltaje generado

$$\underbrace{e_a(t)}_{K_e i_f(t)} = (R_a + R_L) i_a(t) + (L_a + L_L) \frac{di_a(t)}{dt}$$

donde  
 $K_e = k_a k_f \omega_m$

$$\begin{bmatrix} \frac{di_a(t)}{dt} \\ \frac{di_f(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a + R_L}{L_a + L_L} & \frac{K_e}{L_a + L_L} \\ 0 & -\frac{R_f}{L_f} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} i_a(t) \\ i_f(t) \end{bmatrix}}_{\text{variables de estado}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L_f \end{bmatrix} \underbrace{V_f}_{\text{variable de entrada}}$$

# Algoritmo de Runge-Kutta de 4º orden

Consideramos un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden en forma matricial

$$\frac{d\bar{X}(t)}{dt} = A\bar{X} + B\bar{u}(t)$$

$\bar{X}$  vector variable de estado

$\bar{u}$  vector de variables de entrada

$A$  y  $B$  matrices de constantes

La solución de la ecuación puede darse en instantes definidos de tiempo

$$\bar{X}_{n+1} = \bar{X}_n + \frac{\bar{K}_1 + 2\bar{K}_2 + 2\bar{K}_3 + \bar{K}_4}{6}$$

si

$$f(\bar{X}_n) = A\bar{X}_n + B\bar{U}_n$$

$$\bar{K}_1 = hf(\bar{X}_n)$$

$$\bar{K}_2 = hf(\bar{X}_n + 0.5\bar{K}_1)$$

$$\bar{K}_3 = hf(\bar{X}_n + 0.5\bar{K}_2)$$

$$\bar{K}_4 = hf(\bar{X}_n + \bar{K}_3)$$

$h$  es la longitud de paso, que se expresa como el tiempo entre dos instantes definidos

Tema 2: DINÁMICA, REGULACIÓN Y CONTROL DE MÁQUINAS ELÉCTRICAS

# **REGULACIÓN DE MOTORES DE CORRIENTE CONTINUA**

## 2.12 Regulación de la velocidad de giro del motor de c.c.

La velocidad de giro de un motor es directamente proporcional a la tensión aplicada al inducido e inversamente proporcional al flujo magnético. Ello nos permite deducir que la variación de dicha velocidad puede conseguirse de cualquiera de las tres formas siguientes:

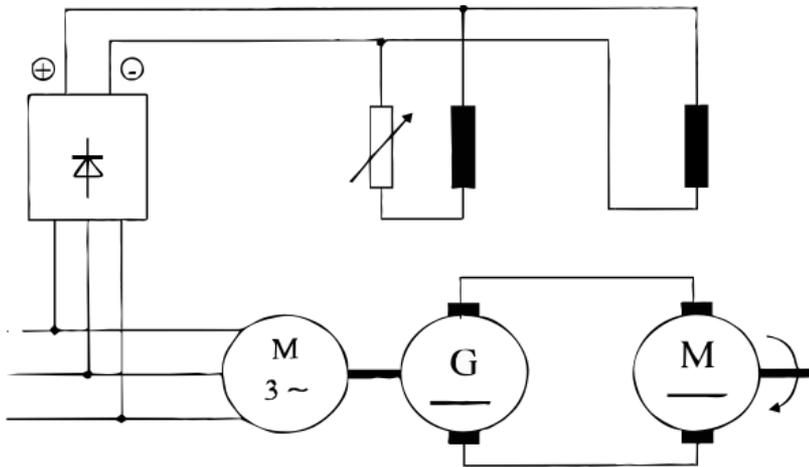
- Cambiando la resistencia del devanado de campo
- Cambiando el voltaje del inducido
- Cambiando la resistencia del inducido

De todos ellos, el más utilizado es el de control de voltaje en el inducido. A lo largo de los años se han ido desarrollando numerosos sistemas de control de motores de c.c. entre los cuales destacamos el conocido como sistema Ward-Leonard.

Este sistema está diseñado para trabajar con corriente alterna.

Este sistema aporta las siguientes ventajas:

- Variación de velocidad continua entre amplios márgenes y en cualquier sentido de rotación.
- Aceleración suave.
- Capacidad del sistema para regenerar o devolver la energía cinética de la máquina a las líneas de suministro. En efecto si arriamos un peso, bien mediante una grúa o bien con una maquinilla y un sistema de puntales, el motor del sistema actúa como generador, devolviendo potencia a la red.
- Un alto par o momento de rotación.



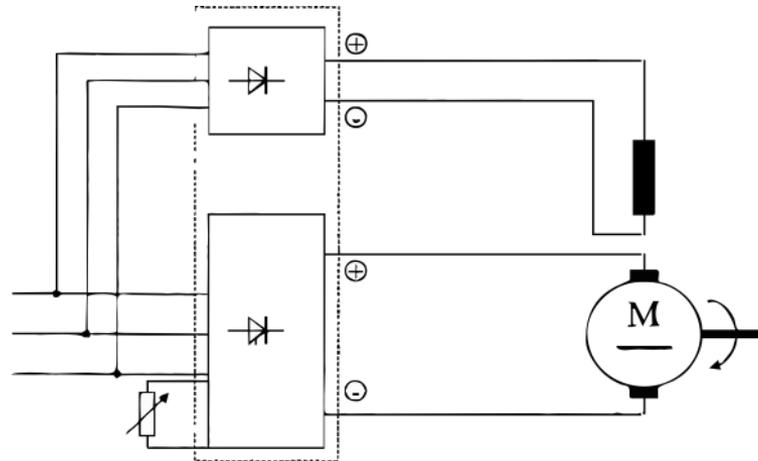
## 2.12 Regulación de la velocidad de giro del motor de c.c.

El sistema de la figura anterior consta de los siguientes elementos:

- Un motor trifásico de inducción que gira a una velocidad constante.
- Un generador de c.c. o dinamo movido por el motor anterior.
- El motor del sistema alimentado directamente desde la dinamo
- Un rectificado trifásico que proporciona la c.c. necesaria a los devanados de excitación del generador y del motor.

El voltaje de la dinamo se controla actuando sobre la corriente de excitación mediante un reóstato, mientras que la velocidad del motor será controlada directamente por el voltaje de la dinamo.

Este sistema es costoso porque se requieren tres máquinas. Por eso el sistema Ward-Leonard ha sido desplazado por circuitos controladores basados en diodos controlados de silicio.



## 2.13 Método de frenado de un motor de c.c.

El frenado de un motor puede realizarse por procedimientos

- a) Mecánicos: utiliza la fuerza de rozamiento entre una llanta rotórica acoplada al accionamiento y unas zapatas que la aprisionan.
- b) o eléctricos: se hace funcionar el motor de c.c. como generador cuya energía suministrada procede de la energía cinética de todas las masas giratoria acopladas al rotor.

Una particularidad de los frenos eléctricos es que su acción desaparece cuando el motor se para, por lo que hay que combinarlos con frenos mecánicos para impedir el movimiento.

Hay tres métodos de frenos eléctricos :

- a) Freno regenerativo o por recuperación de energía
- b) Freno reostático o dinámico.
- c) Freno a contracorriente.

## 2.14 Freno regenerativo

Este tipo de frenado se utiliza en la tracción eléctrica cuando un tren baja por una pendiente elevada. Al superar el tren la velocidad de vacío  $n_0$ , se devuelve energía a la red y esta energía es aprovechada por los diversos ferrocarriles que estén circulando por la vía alimentados por la misma catenaria.

Este tipo de frenado también es posible en los accionamientos de máquinas de elevación y transporte durante el descenso de las cargas, limitando la velocidad de caída de las mismas.

$$n = \frac{V - R_i I_i}{K_E \phi} = \frac{1}{K_E \phi} V - \frac{R_i}{K_E \phi} I_i = \frac{1}{K_E \phi} V - \frac{R_i}{K_E K_T \phi^2} T$$

En una máquina de excitación independiente, si la velocidad de la máquina es mayor que la velocidad en vacío, la f.c.e.m  $E$  del motor es mayor que  $V$ , y la corriente  $I_i$  del inducido cambia de sentido, por lo que la máquina trabaja como generador y la red actuará como un receptor de energía, frenando a la máquina.

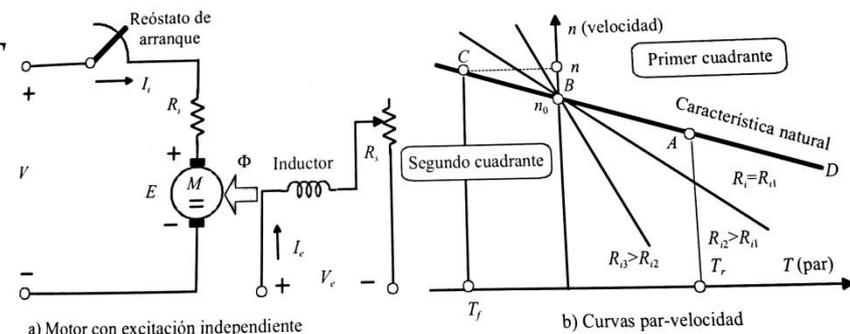


Figura 6.45. Motor con excitación independiente. Frenado regenerativo o por recuperación de energía.

## 2.15 Freno reostático o dinámico

El frenado dinámico hace uso del comportamiento de un motor como generador. Si se desconecta el inducido de un motor de la red de alimentación mientras permanece conectada la excitación, la máquina no producirá par motor ( $I_a=0$ ) y debido al par resistente se acabará parando. Pero si al separar el inducido de la red se carga inmediatamente con una resistencia de carga, la acción de frenado aumentará enormemente. En esta situación la energía producida por el motor que funciona como generador es transformada en calor por efecto Joule en las resistencias de carga conectada al inducido.

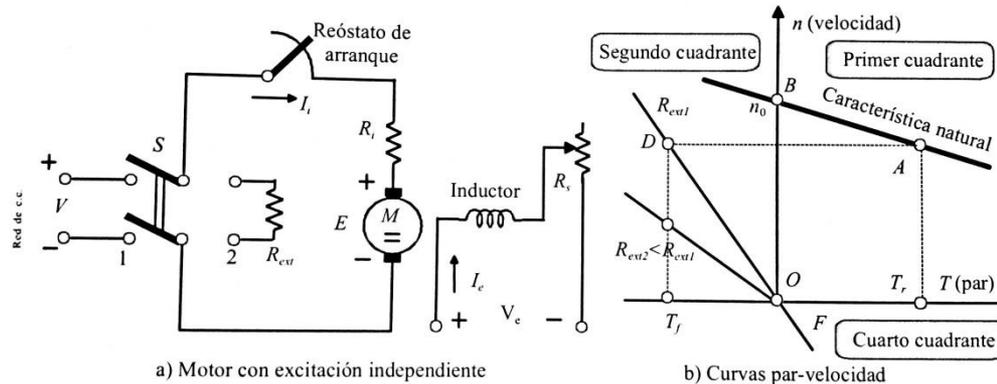
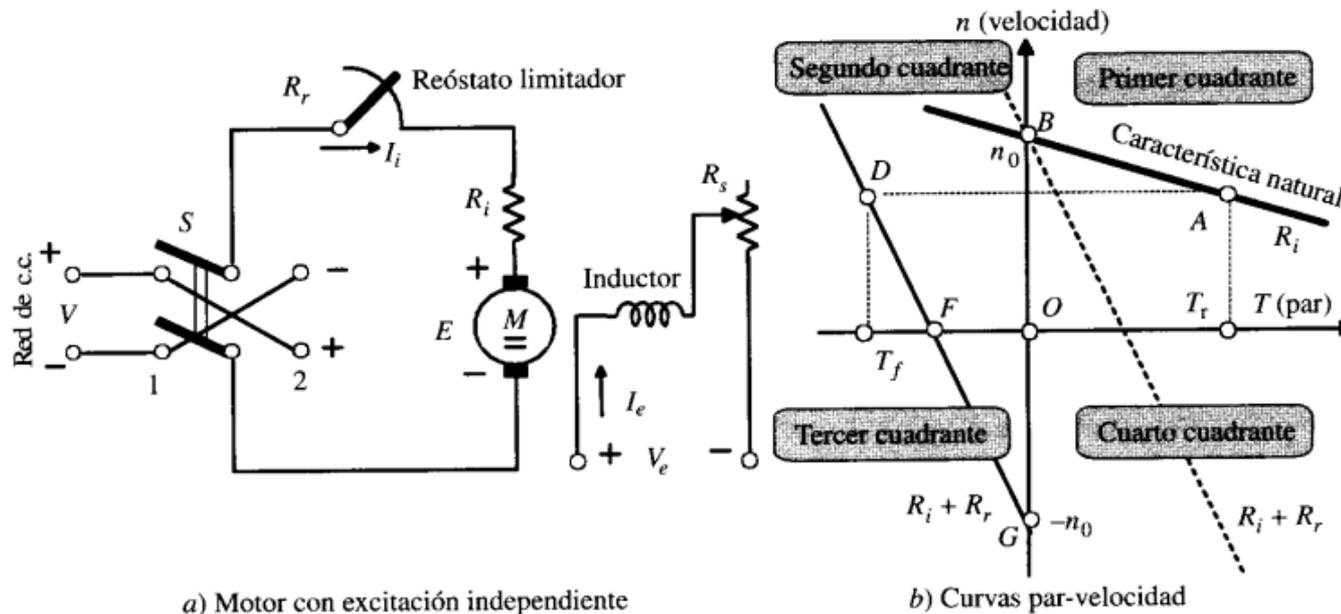


Figura 6.46. Frenado reostático de un motor de c.c. con excitación independiente.

## 2.16 Freno a contracorriente

Este tipo de frenado se emplea cuando es necesario parar repentinamente un motor para luego invertir su marcha.

Sin alterar las conexiones del inductor, se aplica tensión al inducido en sentido inverso, lo que ocasiona un frenado brusco, el motor se para y luego inicia la marcha en sentido inverso

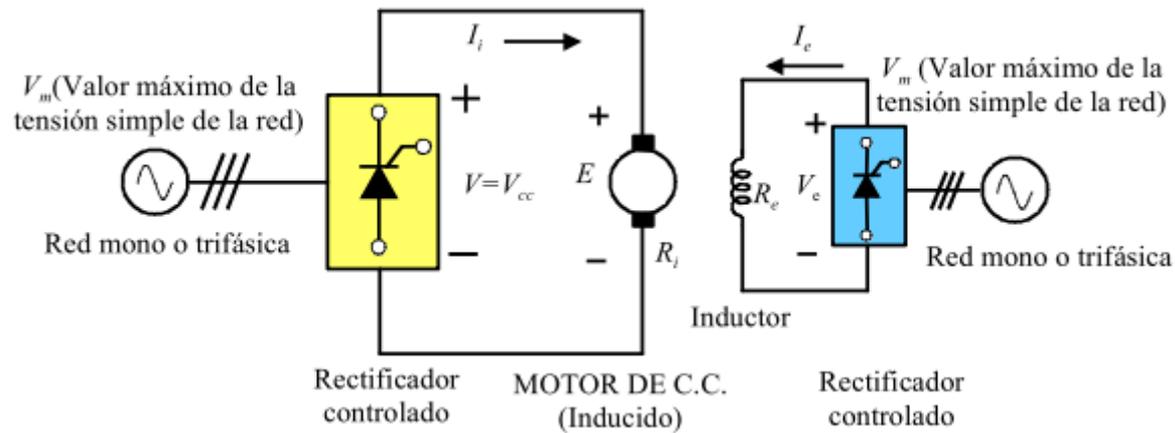


**Figura 6.48.** Frenado a contracorriente de un motor de c.c. con excitación independiente.

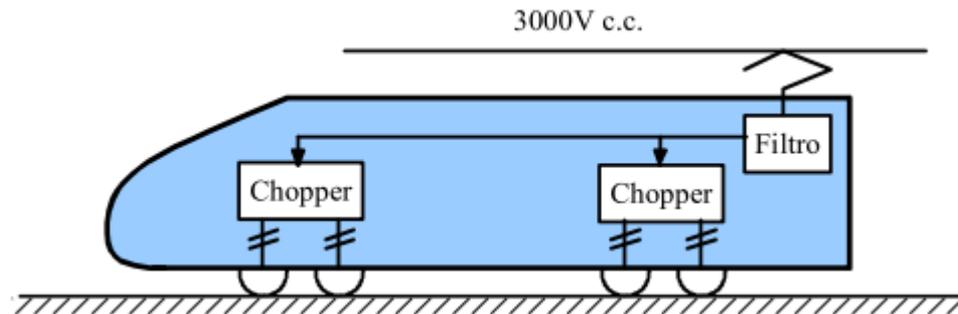
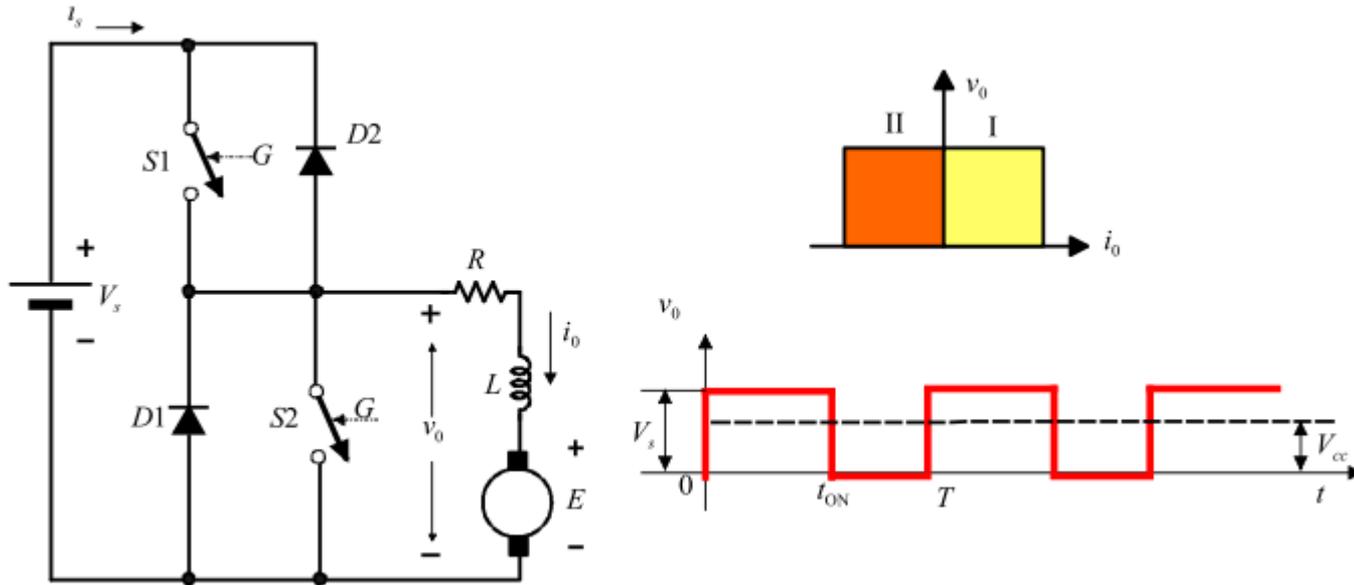
Tema VI: DINÁMICA, REGULACIÓN Y CONTROL DE MÁQUINAS ELÉCTRICAS

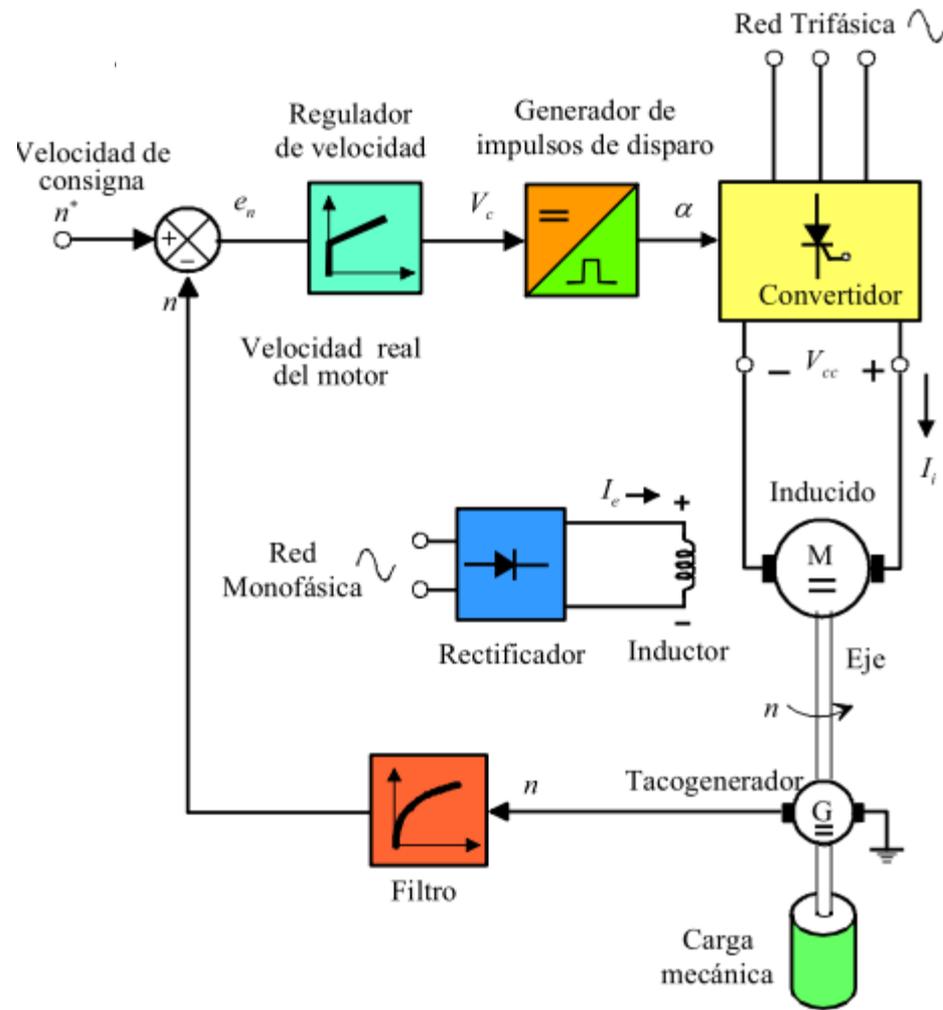
# **ACCIONAMIENTO ELÉCTRICO DE MOTORES DE CORRIENTE CONTINUA**

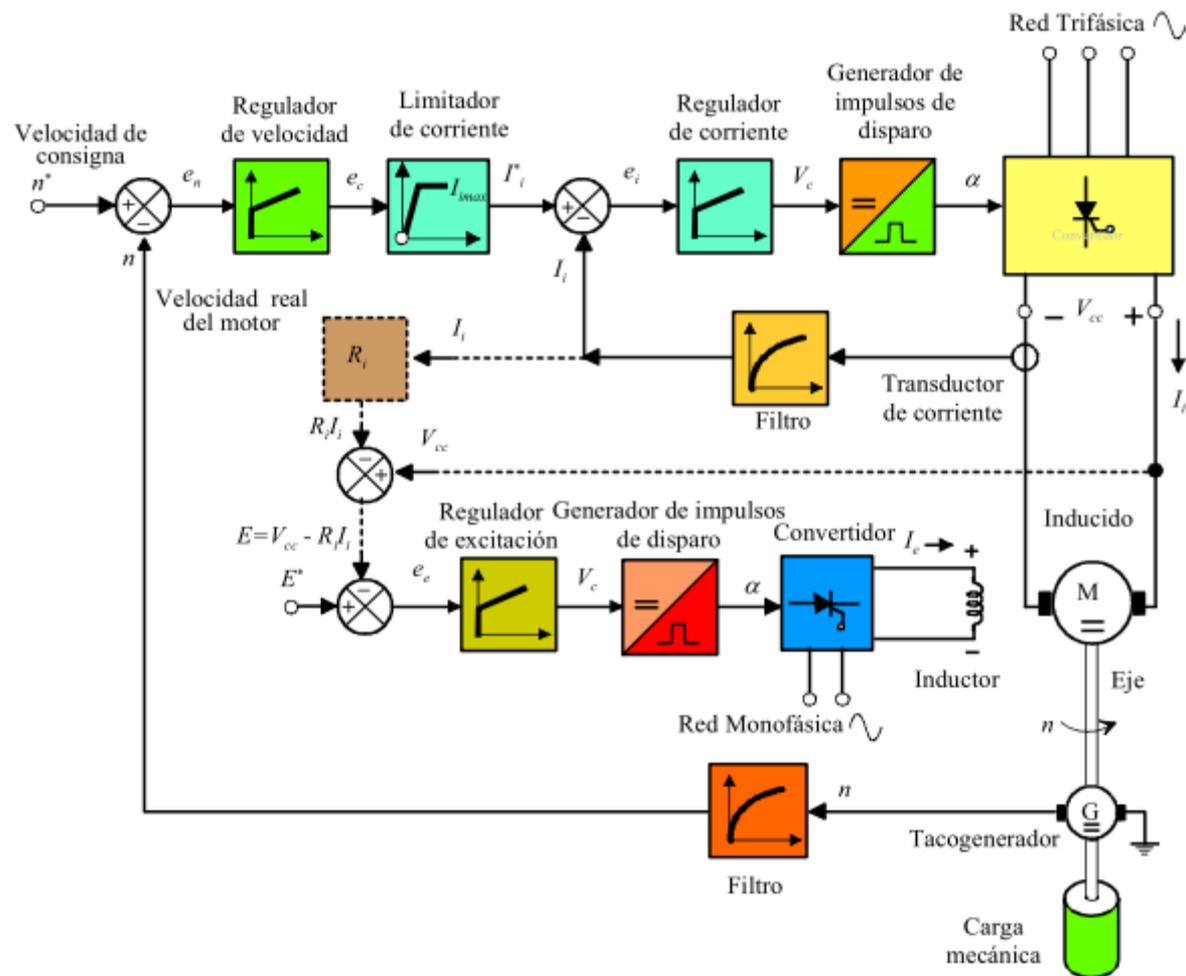
## 2.17 Regulación de la velocidad de motores de c.c. por medio de rectificadores controlados



## 2.18 Regulación de la velocidad de motores de c.c. por medio de choppers







Tema 2: DINÁMICA, REGULACIÓN Y CONTROL DE MÁQUINAS ELÉCTRICAS

# **REGULACIÓN DE VELOCIDAD DE MOTOR DE INDUCCIÓN**

## 2.19 Regulación de velocidad de un motor de inducción

Para operar con buen rendimiento un motor de inducción, debe de trabajar con un deslizamiento bajo. De esto se sigue que cualquier procedimiento eficiente para controlar la velocidad del motor deberá basarse en la velocidad de sincronismo del campo del estator, antes que pensar en modificar el deslizamiento con que trabaja el motor. Ahora bien los dos parámetros que determinan la velocidad de rotación del campo son la frecuencia de la red que alimenta el motor y el número de polos con que están devanados los arrollamientos del estator.

Sabemos que el número de polo ha de ser par y número entero. Luego, la regulación de velocidad de manera continua y en un margen amplio, solo resulta posible si alimentamos el motor a partir de una frecuencia variable y ajustable a voluntad. Este método resulta del mayor interés. En lo que sigue, vamos a repasar las posibilidades de regulación, partiendo de una alimentación a frecuencia fija. Con este supuesto tan solo podemos conseguir, o velocidades discretas diferentes, por cambio de número de polos, o bien una regulación continua variando el deslizamiento con que trabaja la máquina método que como hemos dicho es intrínsecamente de mal rendimiento.

## 2.20 Regulación por cambio de número de polos

En aplicaciones resulta suficiente disponer de la posibilidad de trabajar con dos velocidades diferentes. Con frecuencia se emplean dos escalones de relación 2:1 y este tipo de motores se denominan motor de dos velocidades o con conexión DAHLANDER. En estos motores el devanado de cada fase suele constar de dos partes iguales, en una de las cuales varía el sentido de la corriente, mediante la conmutación de esta parte de la conexión serie a paralelo. Este tipo de conmutación reduce el número de polos a la mitad y por consiguiente aumenta el doble la velocidad síncrona de la máquina. En la siguiente figura se ve este procedimiento.

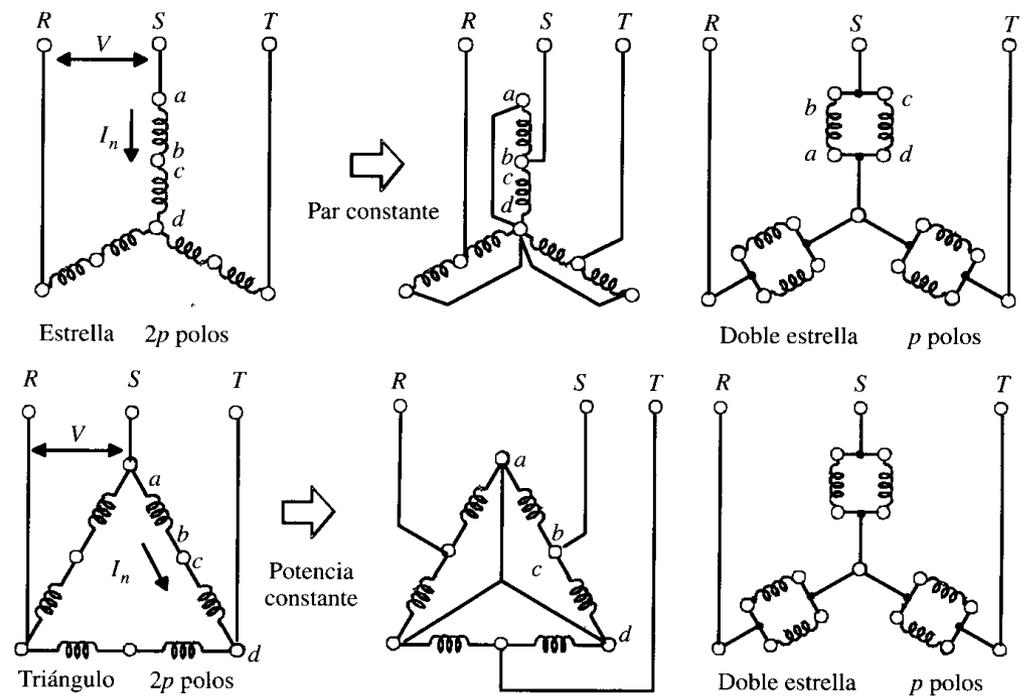
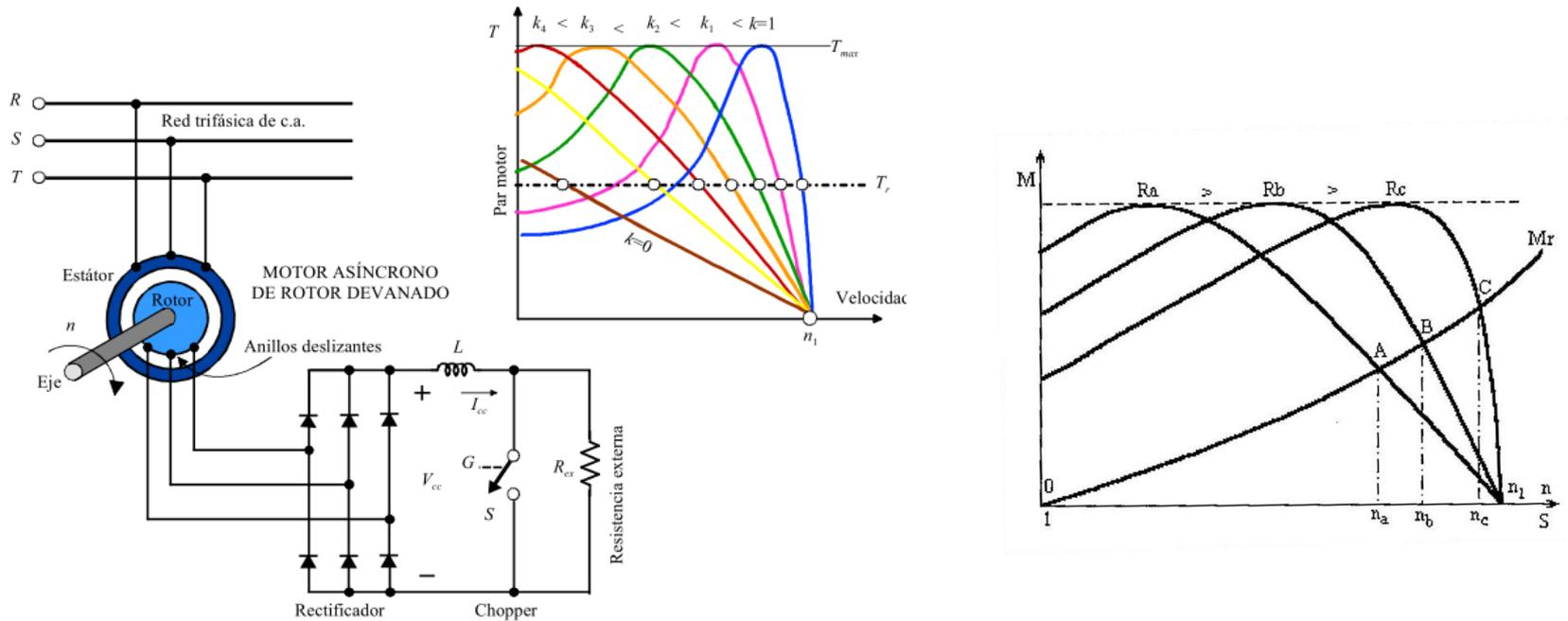


Figura 4.39. Conexión Dahlander. Cambios a par constante y a potencia constante.

## 2.21 Control de velocidad de los motores de rotor bobinado por variación de la resistencia rotórica

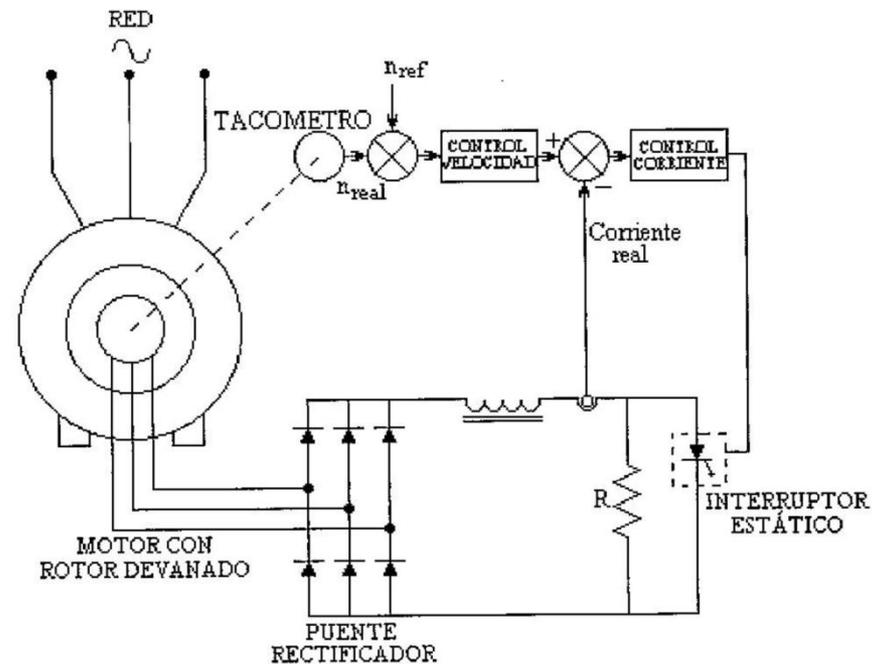
Cuando se puede variar la resistencia del rotor, ésta nos permite controlar el deslizamiento con que trabaja el motor sin modificar ni la tensión, ni la frecuencia de red. Lo mismo que en el caso anterior el método es intrínsecamente de bajo rendimiento peor, también como antes, se utiliza a menudo en motores de potencia media y grande, como los empleados en ascensores, cintas transportadoras o prensas, a causa de su sencillez y bajo coste.



## 2.21 Control de velocidad de los motores de rotor bobinado por variación de la resistencia rotórica

El funcionamiento del equipo es similar al de arranque de los motores de rotor devanado, pero aquí los reóstatos deben estar diseñados para un régimen continuo.

Hoy en día, con un circuito interruptor a base de tiristores de alta frecuencia (troceadores o chopper) se hace variar estáticamente y de manera uniforme la resistencia externa del rotor, obteniéndose así un motor de velocidad variable. De bajo coste y de buena respuesta dinámica. En la siguiente figura se muestra un tipo de circuito adecuado en el que la potencia de deslizamiento del rotor se rectifica en un puente de diodos y se filtra por medio de una reactancia de aplanamiento (de alisamiento), alimentando una resistencia externa  $R$ , que tiene en paralelo un interruptor estático que se cierra e interrumpe con una frecuencia elevada (del orden de 1 kHz). La relación entre los tiempos de encendido y apagado determina el valor efectivo de la resistencia del rotor, controlándose así la velocidad del motor, al variar su característica par-velocidad.



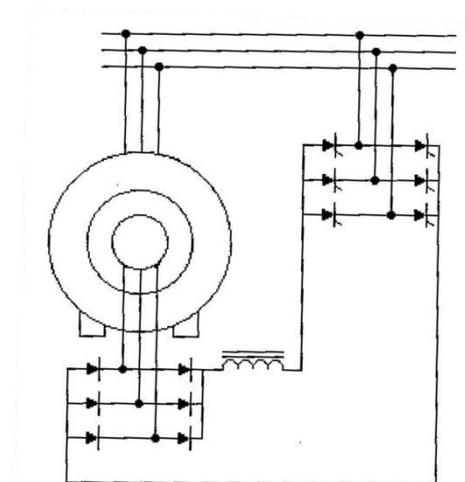
## 2.22 Regulación por recuperación de la energía disipada en el rotor

En el sistema de regulación analizado en el epígrafe anterior, la potencia de deslizamiento  $sPa$  ( $Pa$  potencia del entrehierro, es decir, la potencia que se transfiere del estator al rotor ) se transforma en la potencia disipada en el circuito del rotor ( $P_{Cu2}=sPa$ ) y de ahí su bajo rendimiento por la gran energía disipada en pérdidas por efecto Joule . Este problema se solucionaría si esta potencia se pudiera devolver a la red. Sin embargo, para conseguirlo es preciso llevar a cabo una conversión de frecuencia ya que, la frecuencia de las corrientes que circulan por el rotor dependen precisamente del deslizamiento  $s$   $f_{rotor}=s f_{estator}$ . Por tanto la reinyección directa a la red no es posible.

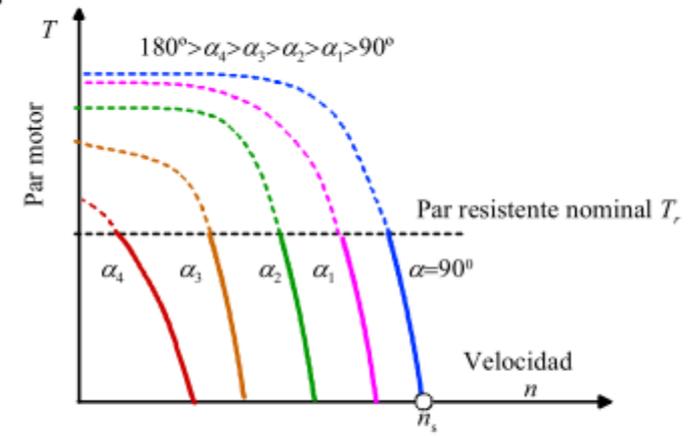
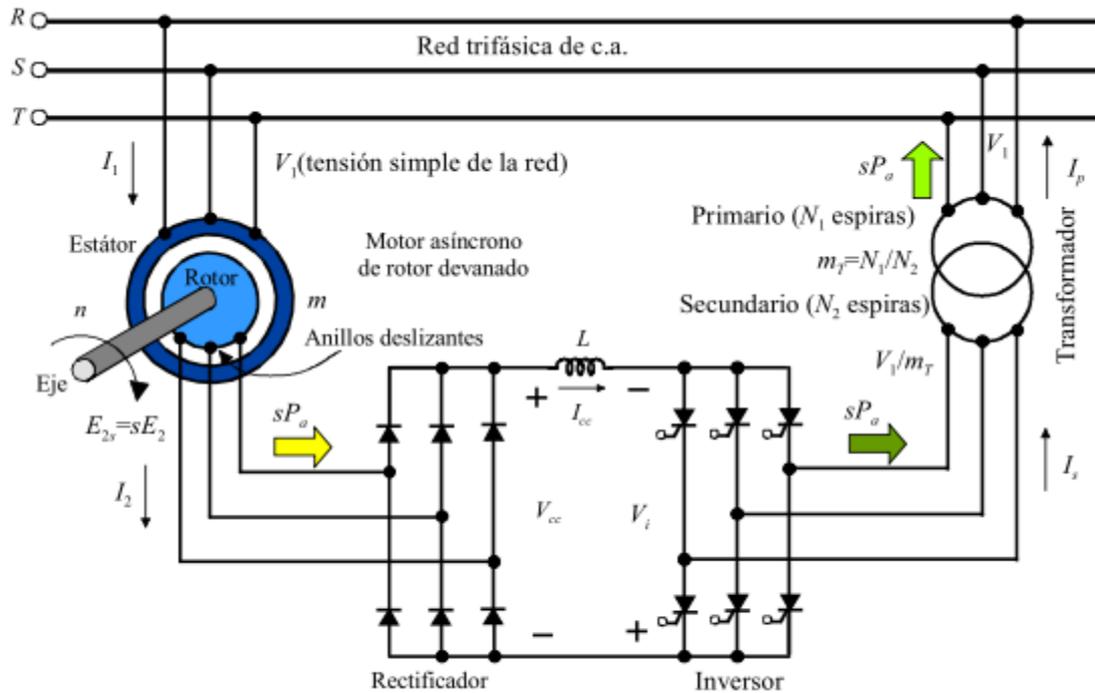
En la historia de la ingeniería eléctrica se han empleado diferentes esquemas para regular el deslizamiento de una forma activa utilizando la conexión en cascada de varias máquinas eléctricas rotativas ( Kramer, Scherbius y Scharage) todos ellos obsoletos en la actualidad. Sin embargo, la electrónica de potencia ha permitido sustituir las máquinas auxiliares por equipos electrónicos que desempeñan la misma función

Figura: sistema de Scherbius

Consiste en un rectificador trifásico en puente que rectifica la potencia de deslizamiento, filtrándola por medio de una inductancia de alisado. La tensión continua obtenida alimenta un inversor de tiristores que devuelve esta potencia a la red. El control de la velocidad se obtiene simplemente variando el ángulo disparo de los tiristores.



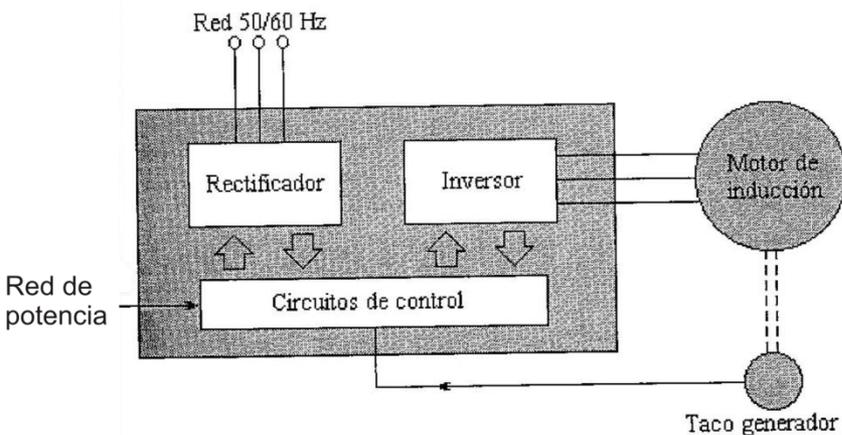
# Control de velocidad de los motores de rotor bobinado por variación de la resistencia rotórica



## 2.23 Accionamientos basados en motor de inducción alimentado a través de convertidor

En los apartados anteriores hemos visto que el motor de inducción solamente trabaja con rendimiento elevado cuando lo hace con deslizamiento pequeño. El mejor procedimiento, por tanto, para controlar de manera suave y continua, la velocidad del motor, será disponer de una fuente de tensión cuya frecuencia podamos regular a voluntad. La electrónica de potencia ha ayudado a resolver esta cuestión, consiguiendo un buen rendimiento en la conversión y con la única contrapartida de introducir armónicos en la red que alimenta el convertidor. También la tensión con se alimenta el motor se aleja bastante de la onda senoidal pero esto no es un problema para el motor.

Un esquema completo de un control de velocidad aparece en la siguiente figura, que incluye una realimentación de velocidad por medio de un tacogenerador.



La misión del convertidor, esto es, del rectificador y del inversor de frecuencia variable, es extraer potencia de la red de frecuencia fija y convertirla en una fuente de tensión y frecuencia, regulables a voluntad del operador o que se regulan automáticamente por un sistema de control adecuado, y que se aplican al motor.

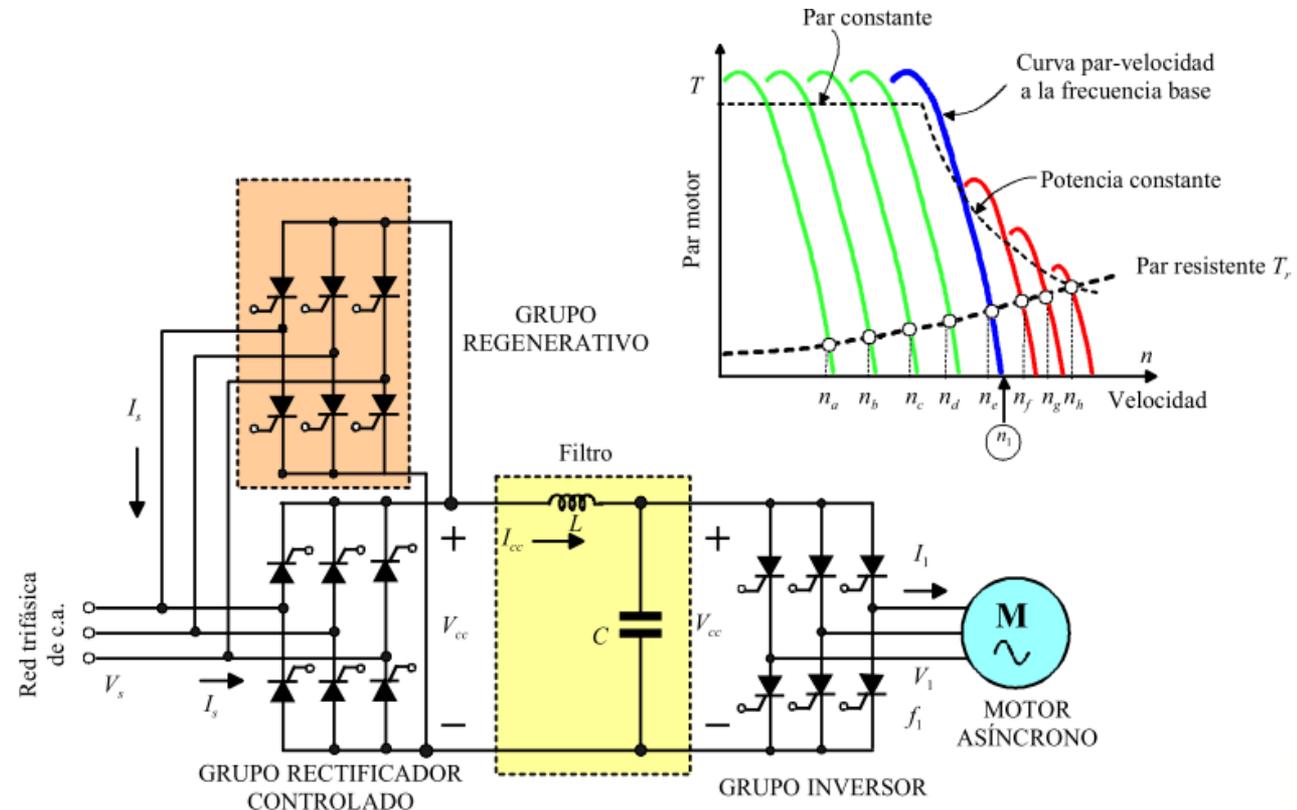
Los accionamientos dotados de inversor se utilizan en un rango de potencias que llegan hasta los cientos de kilovatios. Se utilizan motores de serie y la salida del inversor suele cubrir las frecuencias que van desde los 5-10 Hz hasta los 120 Hz. Estos nos permiten obtener un campo de velocidades en la proporción, como mínimo, de 10:1, con una velocidad límite del doble de la de trabajo a la frecuencia nominal.

## 2.25 Regulación de velocidad por control de la tensión y frecuencia de línea. Control escalar

Es evidente que un método simple de cambiar la velocidad de giro de un motor asíncrono es cambiar la frecuencia de alimentación,  $f_1$ , que llega al estator, puesto que ésta modifica la velocidad de sincronismo del campo magnético giratorio y por ende la velocidad mecánica de giro, que es cercana a aquélla en virtud del pequeño valor del deslizamiento en este tipo de máquinas. Sin embargo, hay que tener en cuenta que el flujo magnético en el entrehierro es directamente proporcional a la f.e.m. inducida en cada devanado del estator e inversamente a la frecuencia:

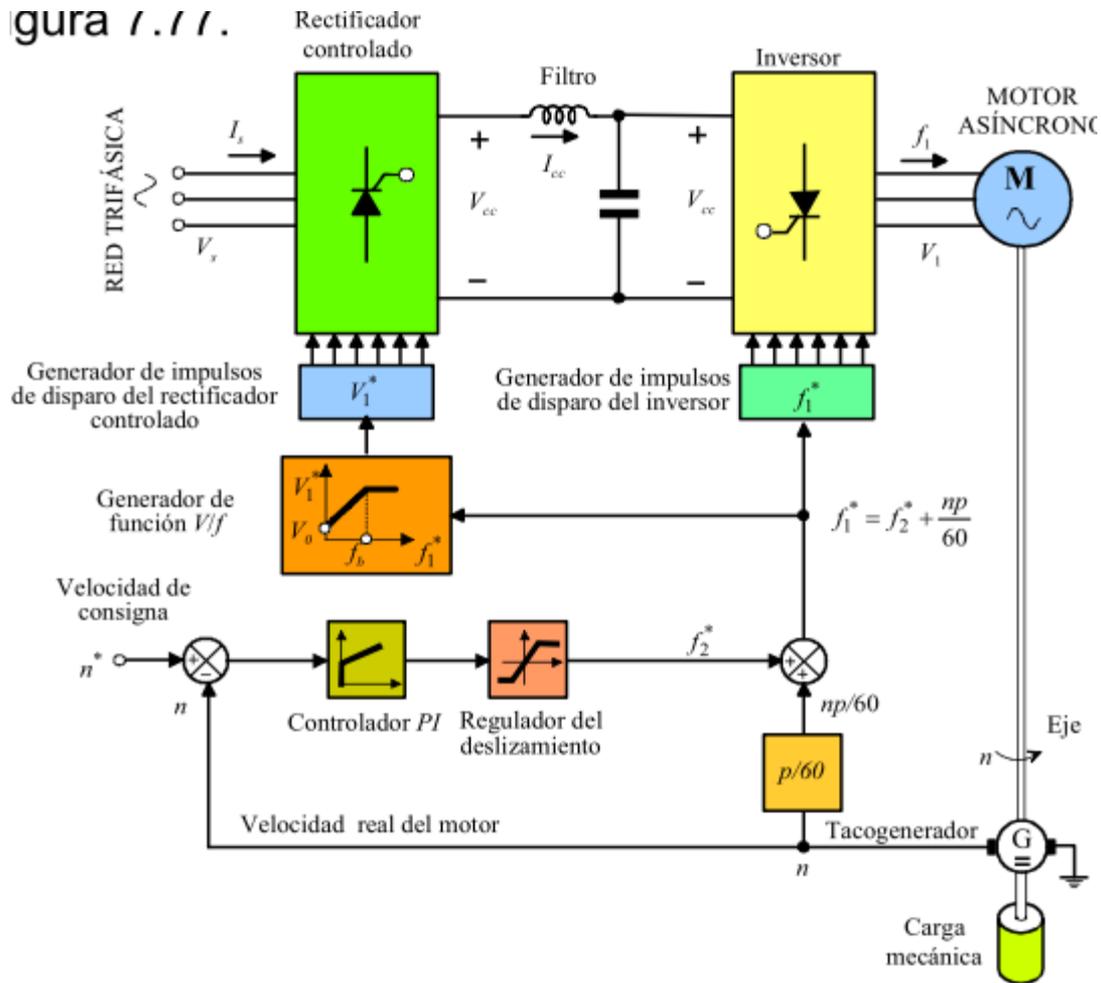
$$\phi_m = \frac{V}{4.44kf_1N_1}$$

Por consiguiente, una reducción en la frecuencia de alimentación  $f_1$  produce un aumento del flujo magnético. Para evitar la saturación del núcleo magnético debido al aumento del flujo, deberá aumentarse proporcionalmente la f.e.m.  $V$ , es decir, mantener constante  $V/f$ .



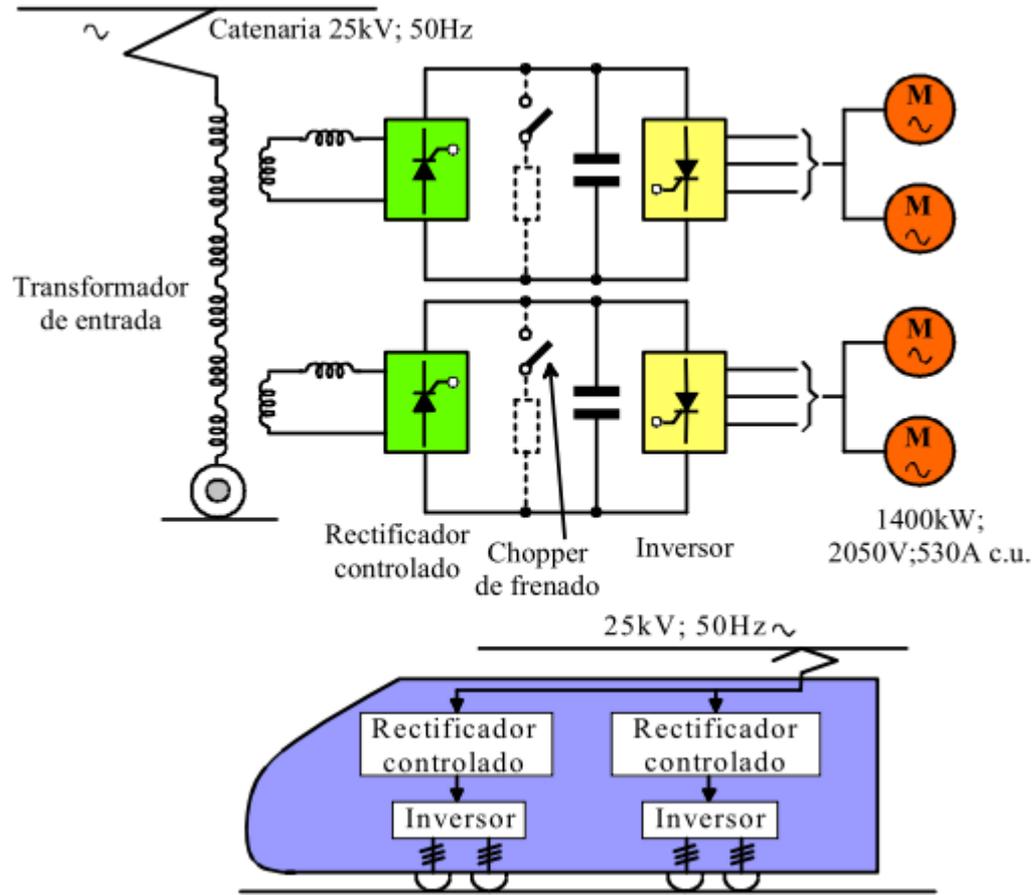
## 2.25 Regulación de velocidad por control de la tensión y frecuencia de línea. Control escalar

Figura 1.111.



## 2.25 Regulación de velocidad por control de la tensión y frecuencia de línea. Control escalar

### Esquema eléctrico de la locomotora Siemens S252



[Locomotora S252 \(click web\)](#)

## 2.26 Control vectorial

El control vectorial nace, básicamente, para resolver las necesidades que plantea la tracción eléctrica trifásica. El primer tren europeo de alta velocidad, el TGV francés utilizó motores de corriente continua con troceadores para controlar su velocidad. Más tarde, los mismos franceses usaron, en una línea hacia Bretaña, motores síncronos con inversores autopilotados. Por su parte los alemanes, al poner a punto el control vectorial de los motores de inducción, han desarrollado una tecnología que se apoya en este tipo de motores de alterna. En España, como sabemos el AVE es de tecnología francesa pero también disponemos de locomotoras alemanas, la S-252 de SIEMENS, que trabajan con motores de inducción y que impulsan el TALGO y también grandes trenes, de transporte rápido de mercancías.

Las ventajas de utilizar motores asíncronos con rotor de jaula en tracción eléctrica, bien sea para el transporte de cercanías como para ferrocarriles de larga distancia, derivan de su escaso mantenimiento ya que se elimina el cambio de escobillas, así como el torneado de las delgas. Además como sabemos, son especialmente robustos e insensibles a grandes sobrecargas. De menores dimensiones que los motores de corriente continua, permiten instalar en los vehículos potencias más elevadas, con menor peso y menor masas inerciales.

A estas exigencias, específicamente ferroviarias, pertenecen:

- Arranque y frenado libre de tirones.
- Control de los procesos de embalamiento y patinaje.
- Frenado con recuperación de energía.

## 2.26 Control vectorial

Para cumplir las curvas características de esfuerzo-velocidad que se exigen en la práctica, es necesario conseguir un margen de regulación de velocidades muy amplio. Esto supone generalmente, un elevado grado de debilitamiento del campo del motor. Además, tiene que resultar también factible un servicio en paralelo de varios motores.

**“El motor eléctrico ideal, para un accionamiento regulable de alta calidad, es el motor de corriente continua”.** En efecto, posee extraordinarias propiedades de regulación que se deben a su forma constructiva y a su principio de funcionamiento.

Por ello, resulta razonable poner como modelo a un motor regulable de corriente continua, para diseñar una regulación para el motor trifásico. Es decir, se deberán examinar las causas que motivan el comportamiento ideal de regulación del motor de corriente continua: con esto podrán deducirse las diferencias fundamentales con respecto al motor trifásico.

Con este procedimiento no solamente se facilita la comprensión de los procesos que tienen lugar en un motor asíncrono sino que, también, se pueden establecer analogías directas en las estructuras de regulación. Estas analogías nos van a permitir reducir, al menos parcialmente, la complicada regulación del motor de inducción trifásico a las sencillas proporciones que posee un motor de corriente continua.

A continuación trataremos de exponer los fundamentos del control vectorial cuyo objetivo es mejorar la respuesta dinámica de la máquina.

## 2.27 Control vectorial de motores asíncronos

El **control vectorial**, denominado también **control por orientación de campo**, constituye el método de regulación de velocidad más sofisticado y moderno de los motores asíncronos. La base de este método de regulación es controlar tanto la **magnitud** como la **fase del flujo magnético** del motor asíncrono para conseguir un funcionamiento análogo al que tienen los motores de c.c.

En un motor de c.c. el valor del par electromagnético producido por esta máquina es de la forma:

$$T = K_T \phi I_i$$

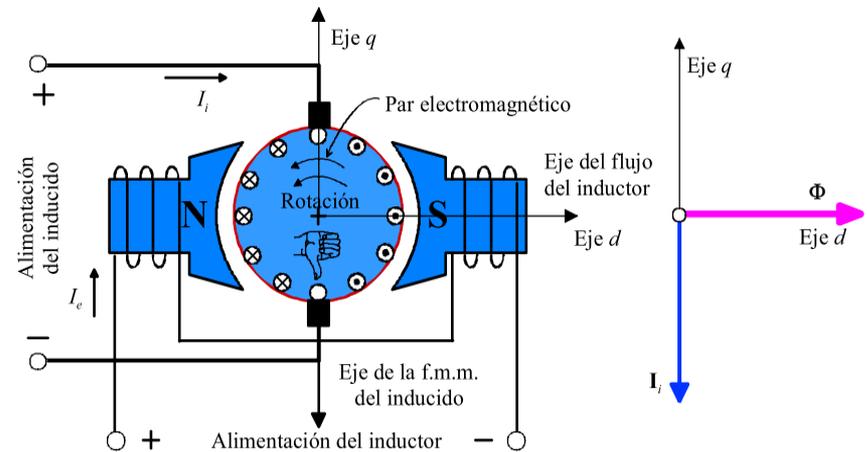
De la ecuación anterior se deduce que la regulación del par de un motor de c.c. se puede realizar modificando bien sea el flujo magnético  $\Phi$ , la corriente que atraviesa el inducido  $I_i$  o de ambas magnitudes a la vez. Para mejorar, la dinámica del sistema generalmente la **mejor regulación se realiza manteniendo constante el flujo magnético y variando la corriente que atraviesa el inducido**, en virtud de que la inductancia del devanado inducido es mucho menor que la del inductor, lo que significa que la constante de tiempo del inducido es menor que la del inductor, lo que se traduce en una respuesta más rápida.

## 2.27 Control vectorial de motores asíncronos

Si se considera el esquema de la siguiente figura, en que se representa un motor de c.c. con excitación separada, se observa que en este motor se tiene:

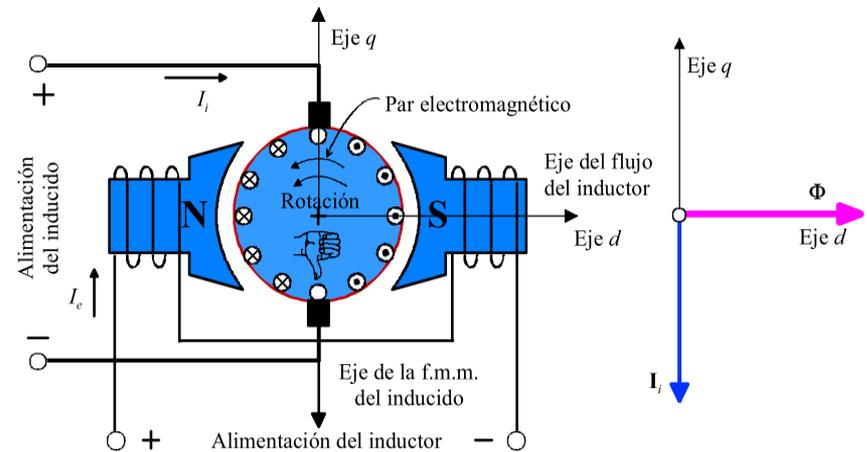
Un campo magnético estacionario producido por el devanado de excitación o campo inductor que lleva una corriente  $I_e$ . Este devanado produce un flujo magnético  $\Phi$  a lo largo del eje de los polos, que se denomina **eje directo** o **eje d** del motor.

Para generar un par electromagnético en los conductores del rotor, se debe hacer circular una corriente por el devanado inducido  $I_i$ . Debido a que el rotor lleva un colector de delgas y a la situación del eje escobillas que lleva el conmutador anterior y que se sitúa en la línea neutra de la máquina, las corrientes del inducido producen una f.m.m. que tiene lugar en el eje de escobillas, es decir,  $90^\circ$  del eje magnético del inductor, y que se conoce como **eje en cuadratura** o **eje q**.



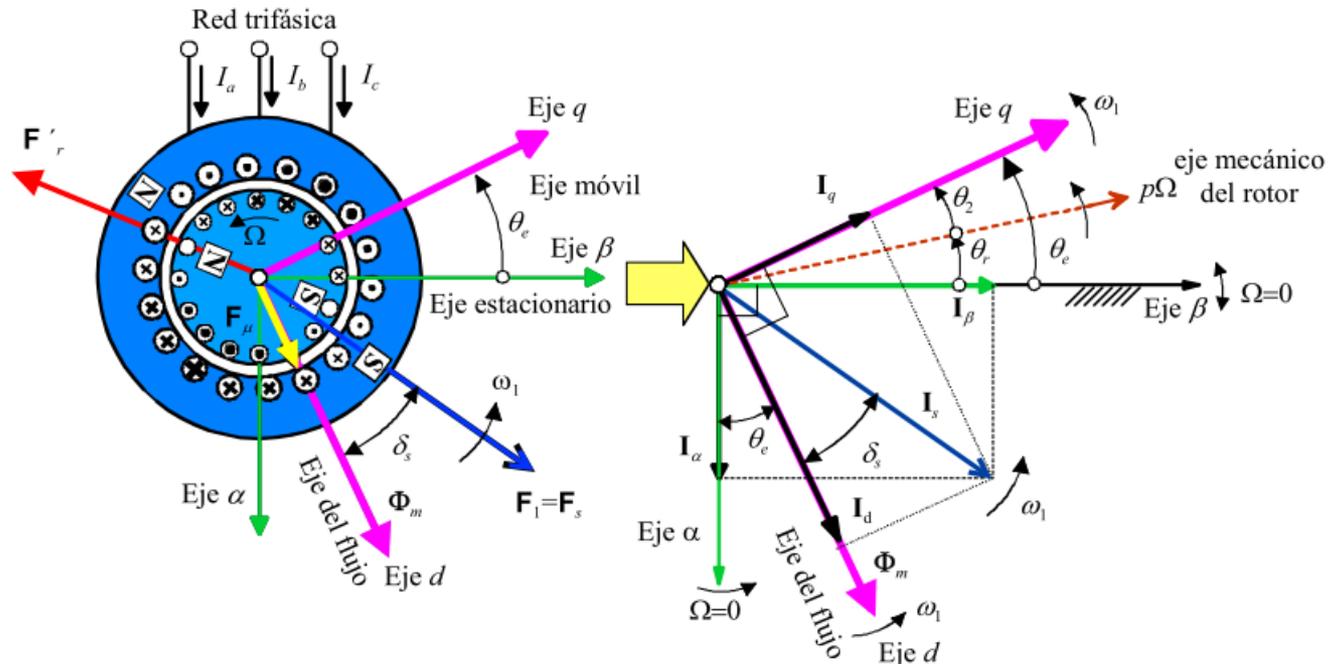
## 2.27 Control vectorial de motores asíncronos

En la figura se muestra para mayor claridad los fasores espaciales de flujo y f.m.m. de un motor de c.c. y que conservan sus posiciones constantes en el espacio (es decir, realmente son vectores espaciales). De acuerdo con la expresión del par anterior, la producción del par en un motor de c.c. es proporcional al producto del flujo magnético del inductor, que a su vez es proporcional a la corriente de excitación  $I_e$  y de la corriente que atraviesa el inducido  $I_i$ , que a su vez es proporcional a la f.m.m. de este devanado. Debido a que la f.m.m. del inducido es perpendicular al flujo magnético del inductor, la variación de la corriente que circula por este devanado no modificará o afectará al campo magnético inductor (se consideran despreciables los efectos de la reacción del inducido); se dice por ello que las corrientes del inductor y del inducido están desacopladas, de este modo manteniendo la corriente de excitación constante, los cambios del par seguirán los cambios en la corriente aplicada al inducido instantáneamente y exactamente.

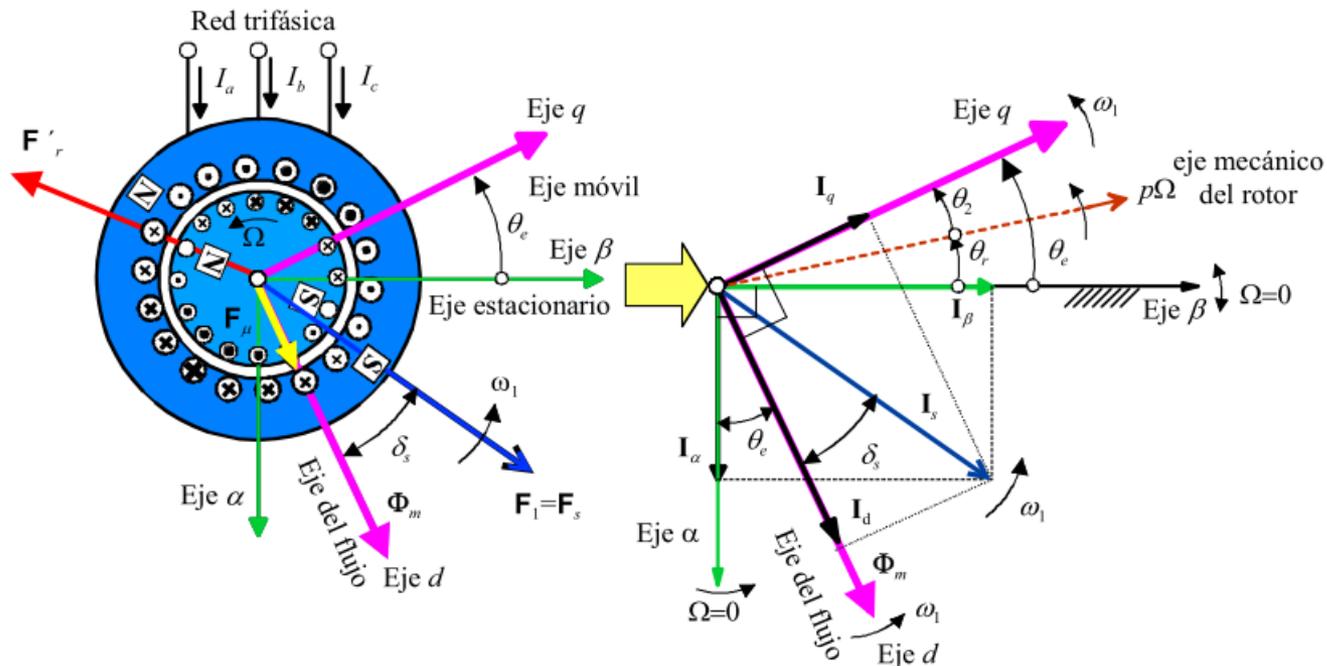


## 2.27 Control vectorial de motores asíncronos

En un **motor asíncrono** la situación es mucho más complicada que en un motor de c.c. En este caso hay un devanado trifásico en el estator, y la f.m.m. producida por este arrollamiento es giratoria, es decir, se mueve a la velocidad angular de sincronismo  $\omega_1 = 2\pi f_1$ , siendo  $f_1$  la frecuencia de las corrientes estáticas. El rotor gira a la velocidad angular mecánica  $\Omega = 2\pi n/60$  (donde  $n$  en r.p.m) que corresponde a una velocidad angular eléctrica  $p\Omega$ , siendo  $p$  el número de pares de polos del motor; pero teniendo en cuenta que la pulsación de las corrientes del rotor es igual a  $\omega_2$  la f.m.m. del rotor gira a una velocidad total eléctrica  $\omega_2 + p\Omega = \omega_1$ ; de este modo las f.m.m.s del estator y del rotor están enclavadas eléctricamente ( a esta igualdad la designan algunos autores como condición de autopilotaje del motor asíncrono ). La interacción de estas dos f.m.m.s. produce la f.m.m. resultante de imantación, que crea a su vez el flujo máximo en el entrehierro de la máquina.



## 2.27 Control vectorial de motores asíncronos



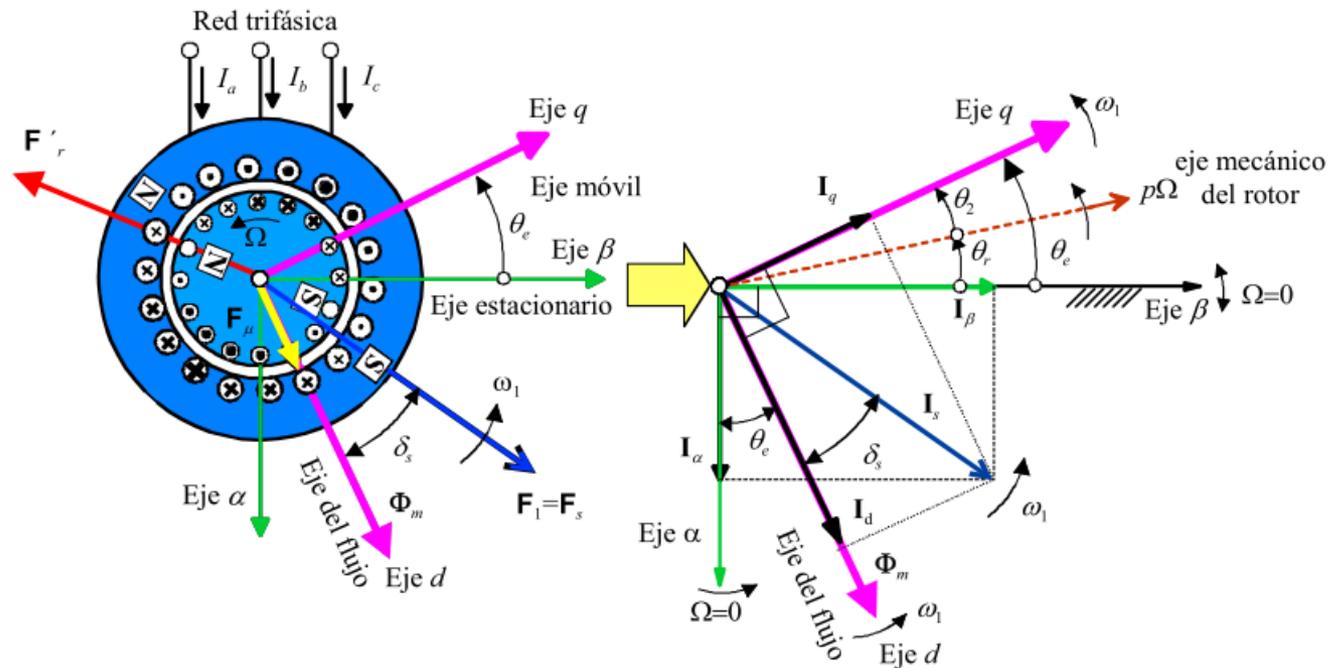
El ángulo que forma el fasor espacial de f.m.m. del estator y el flujo en el entrehierro, y que se ha designado por  $\delta_s$ , no es necesariamente de  $90^\circ$  como sucede en el motor de c.c. Con objeto de identificar las posiciones que van siguiendo los fasores espaciales de f.m.m. del motor asíncrono, se asigna un sistema de coordenadas estacionario  $\alpha\beta$ .

La producción de un par electromagnético en el motor asíncrono procede del esfuerzo de alineación de las f.m.m.s de la máquina. El par electromagnético producido por un motor asíncrono es

$$T = k_T \phi_m F_s \text{sen} \delta_s = K_T \phi_m I_s \text{sen} \delta_s$$

Teniendo en cuenta que  $F_s$  es proporcional a la corriente del estator  $I_s$

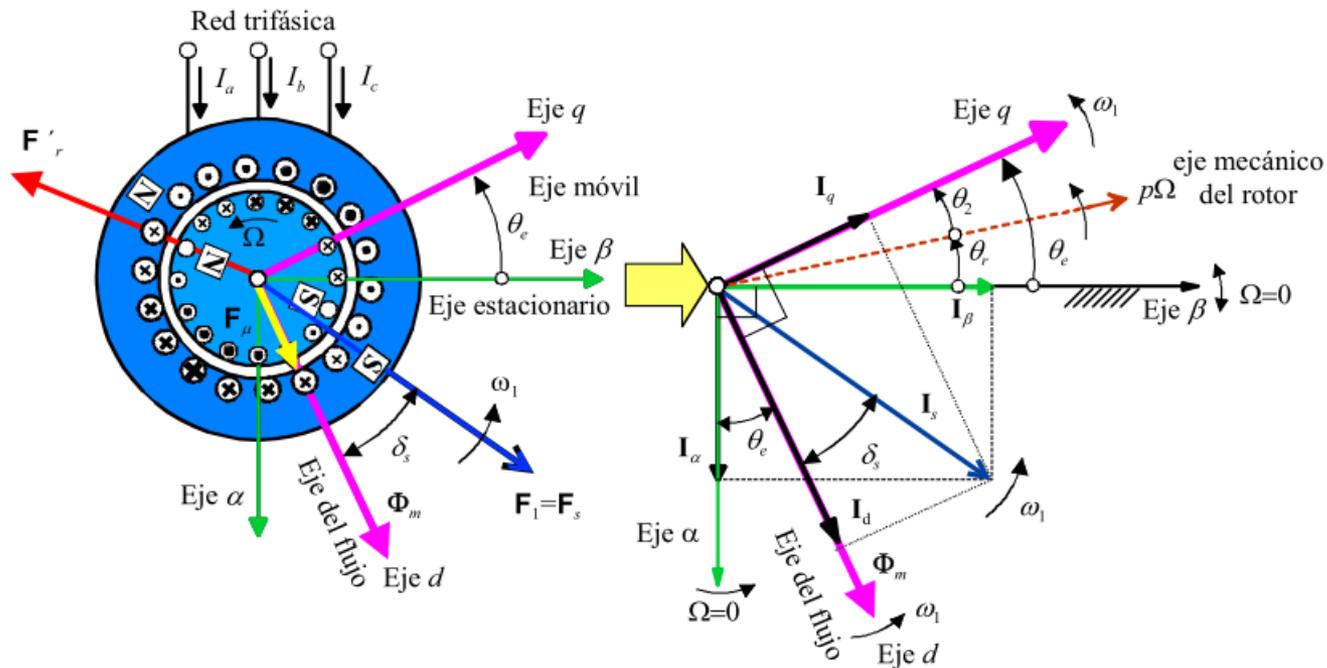
## 2.27 Control vectorial de motores asíncronos



De acuerdo con la figura anterior el fasor  $I_s$  puede descomponerse en dos partes:  $I_d = I_s \cos \delta_s$  paralelo al eje directo  $d$ , que gira a la velocidad de sincronismo  $\omega_1$  del campo giratorio, e  $I_q = I_s \sin \delta_s$  perpendicular al eje anterior y denominado eje de cuadratura  $q$ . **A estas corrientes se las conoce como componentes de campo orientado**, por lo que

$$T = K_T \phi_m I_q$$

## 2.27 Control vectorial de motores asíncronos



- La componente  $I_d$  está en fase con el flujo magnético, por lo que representa la componente de la corriente del estator responsable de producir el flujo magnético y es análoga a la corriente de excitación  $I_e$  del motor de c.c.
- Por otro lado, la componente  $I_q$  de la corriente del estator está en cuadratura con el flujo, y si se comparan las ecuaciones del par para un motor c.c.

$$T = K_T \phi I_i$$

y para un motor asíncrono

$$T = K_T \phi_m I_q$$

La corriente  $I_q$  es análoga a la corriente  $I_i$  del motor c.c. que se utiliza para controlar el par del motor.

## 2.27 Control vectorial de motores asíncronos

Hay diferencias sustanciales entre el motor de c.c. y el motor asíncrono que conviene destacar:

- En el motor de c.c. el eje de flujo es fijo (eje directo) y la f.m.m. del inducido tiene lugar a  $90^\circ$  respecto del flujo magnético (eje en cuadratura), en tanto que en el motor asíncrono el flujo magnético es giratorio, por lo que los ejes directo y cuadratura se están moviendo a la velocidad de sincronismo y el ángulo  $\delta_s$  que forman la f.m.m. resultante del estátor  $F_s$  y el flujo máximo del entrehierro  $\Phi_m$  no es constante ni igual a  $90^\circ$ , sino que depende del par que produce la máquina.
- En el motor de c.c. las corrientes del inductor y del inducido circulan por devanados distintos y accesibles desde el exterior, aspecto que no es posible conseguir en el motor de inducción, ya que no se puede actuar separadamente sobre las corrientes generadoras del par  $I_q$  y de flujo  $I_d$ .

Como ya se ha indicado antes, la base del control vectorial es copiar el funcionamiento del motor de c.c. y para resolver el problema de control se deben mantener en cuadratura las componentes de imanación  $I_d$  y de par  $I_q$  de la corriente estatórica, desacoplando ambas componentes de forma que se puedan ajustar independientemente una de otra. En definitiva, en un **SISTEMA DE CONTROL VECTORIAL de motores asíncronos HAY QUE CONTROLAR EN TIEMPO REAL LA MAGNITUD Y FASE DE LAS CORRIENTES DE ALIMENTACIÓN DEL ESTÁTOR**, en respuesta a cambios en las demandas de velocidad y de par requeridas por el accionamiento. Es por ello que en el estudio del motor asíncrono y de sus accionamientos se ha hecho necesario acudir a diversas transformaciones matemáticas (Transformación de Clarke o dq0) que relacionen las corrientes eléctricas que se indican en la figura.

## 2.27 Control vectorial de motores asíncronos

Para determinar las componentes  $I_d$  e  $I_q$  debe conocerse con exactitud la posición del fasor de flujo magnético en el entrehierro, para lo que se necesita disponer de una señal de realimentación de amplitud y la posición instantánea del mismo flujo magnético, que puede realizarse de dos modos:

**Control vectorial directo**, que incorpora transductores magnéticos en el entrehierro basados en el efecto Hall y situados a  $90^\circ$  eléctricos para averiguar la magnitud y posición del flujo magnético.

**Control vectorial indirecto**, en el cual se calcula la amplitud y orientación del flujo a partir de los parámetros del motor, y la posición relativa instantánea del rotor se mide mediante un encóder (transductor de posición) situado en el rotor.

## 2.27 Control vectorial de motores asíncronos

El **control vectorial directo**, aunque teóricamente tiene sus ventajas técnicas, ya que incluye una medida directa del flujo y la situación de su fasor espacial en el motor tiene problemas de implementación en un ambiente industrial, y es por ello que no suele utilizarse porque carece de la robustez necesaria ( en definitiva, lo que sucede es que las ventajas del motor asíncrono frente al motor de c.c. pierden su eficacia). Es por ello que **en la práctica se utiliza un método de control indirecto**, midiendo la posición y velocidad del motor con un encóder y **determinando a partir de los parámetros de la máquina la posición del fasor espacial del flujo**; sin embargo, este método de estimación del flujo es bastante sensible a los parámetros del motor, en concreto a los valores de la resistencia e inductancia de los devanados del rotor, que deben medirse con gran precisión. Desgraciadamente, los parámetros del motor usados en los cálculos se miden en ensayos sin carga y no responden a los valores reales en el punto de funcionamiento de la máquina, ya que estos parámetros varían ampliamente con la saturación del circuito magnético, temperatura y frecuencia de las corrientes rotóricas. Es por ello que con este método se deben calcular los parámetros de la máquina y se deben estimar sus variaciones conforme el motor cambia o modifica su punto de trabajo, pero hay que tener en cuenta que para que el comportamiento dinámico del accionamiento sea el adecuado, estas medidas y cálculos deben realizarse en tiempo real y con extraordinaria rapidez para identificar sin errores la posición del fasor espacial del flujo, lo que se consigue incorporando en el sistema de control microprocesadores rápidos y potentes que incluyen DSP (Digital signal processing), es decir, procesadores digitales de señales.

## 2.27 Control vectorial de motores asíncronos

El control vectorial de la máquina de inducción se explica suponiendo que se conoce la posición del fasor  $\Psi_r$  de los enlaces de flujo del rotor.

Se supone que el enlace de flujo del rotor resultante,  $\Psi_r$ , está en el eje directo para lograr la orientación del campo. Por tanto

$$\Psi_r = \Psi_{dr}, \quad \Psi_{qr} = 0, \quad d/dt(\Psi_{qr}) = 0$$

Esta alineación reduce el número de variables a tratar. La alineación del eje d con el fasor de flujo del rotor produce

$$v_{qr} = \frac{1}{\omega_{base}} \frac{d\Psi_{qr}}{dt} + (\omega - \omega_r)\Psi_{dr} + R_{rd}i_{qr} = 0, \quad \rightarrow \quad \boxed{\omega - \omega_r = -\frac{R_{rd}}{\Psi_{dr}} i_{qr} = R_{rd} \frac{L_m}{L_{rrd}} \frac{i_{qs}}{\Psi_{dr}}}$$

$$\Psi_{qr} = L_{rrd}i_{qr} + L_m i_{qs} = 0 \quad \rightarrow \quad i_{qr} = -\frac{L_m}{L_{rrd}} i_{qs}$$

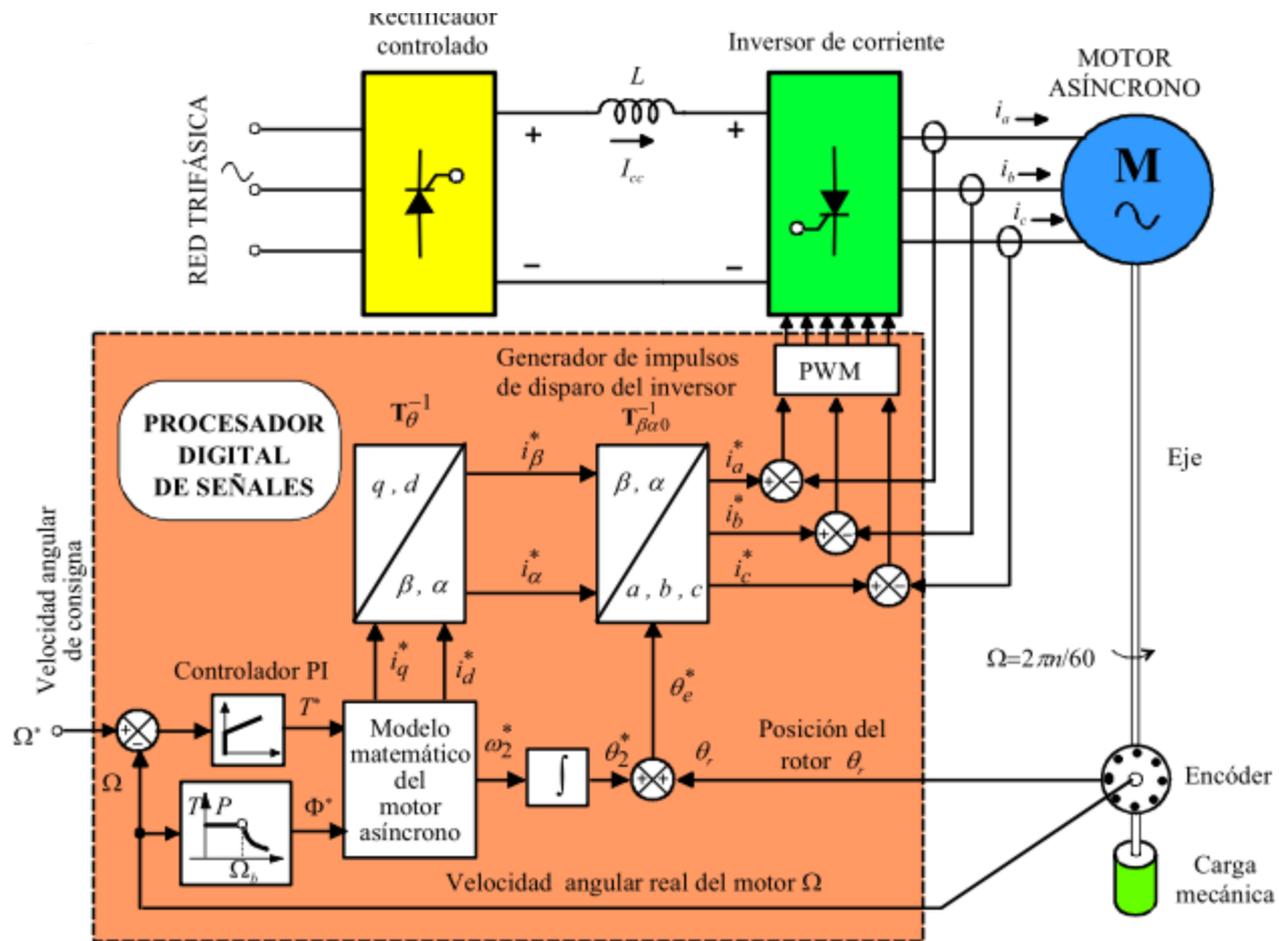
$$T_{el} = \frac{3}{2} p (\Psi_{qr}i_{dr} - \Psi_{dr}i_{qr}) \quad \rightarrow \quad \boxed{T_{el} = \frac{3}{2} p \frac{L_m}{L_{rrd}} \Psi_{dr} i_{qs}}$$

## 2.27 Control vectorial de motores asíncronos

Algunas de las funciones del DSP del sistema de control vectorial son:

- Procesar las señales obtenidas del encóder para determinar tanto la velocidad del rotor,  $\Omega$ , como el ángulo del rotor  $\theta_r$
- Estimar el valor de flujo a partir de los datos de las tensiones, corrientes y velocidad del motor, incluyendo el modelo matemático de la máquina.
- Identificar las dos componentes en eje directo y cuadratura de la corriente a partir de la información de las corrientes trifásicas.
- Implementar los lazos de control de velocidad y de corriente.
- Producir las señales de disparo del inversor que definen la tensión y frecuencia de alimentación del motor.
- Realizar las operaciones matemáticas que requieren el modelo de la máquina y limitar las variables de control.

## 2.27 Control vectorial de motores asíncronos

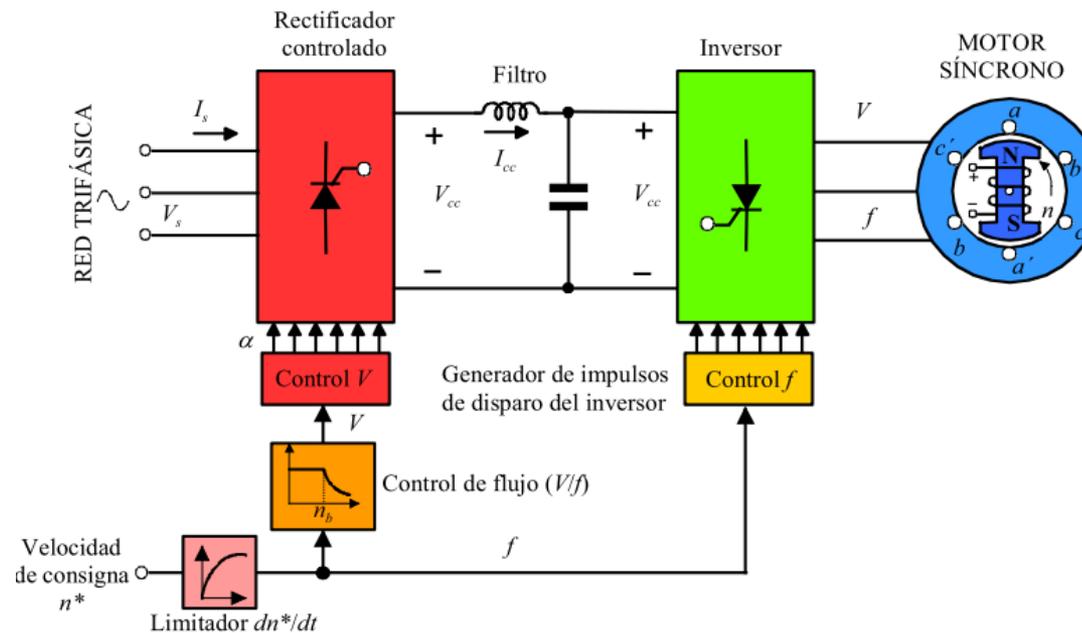


Tema 2: DINÁMICA, REGULACIÓN Y CONTROL DE MÁQUINAS ELÉCTRICAS

# **REGULACIÓN DE VELOCIDAD DE MOTOR SÍNCRONO**

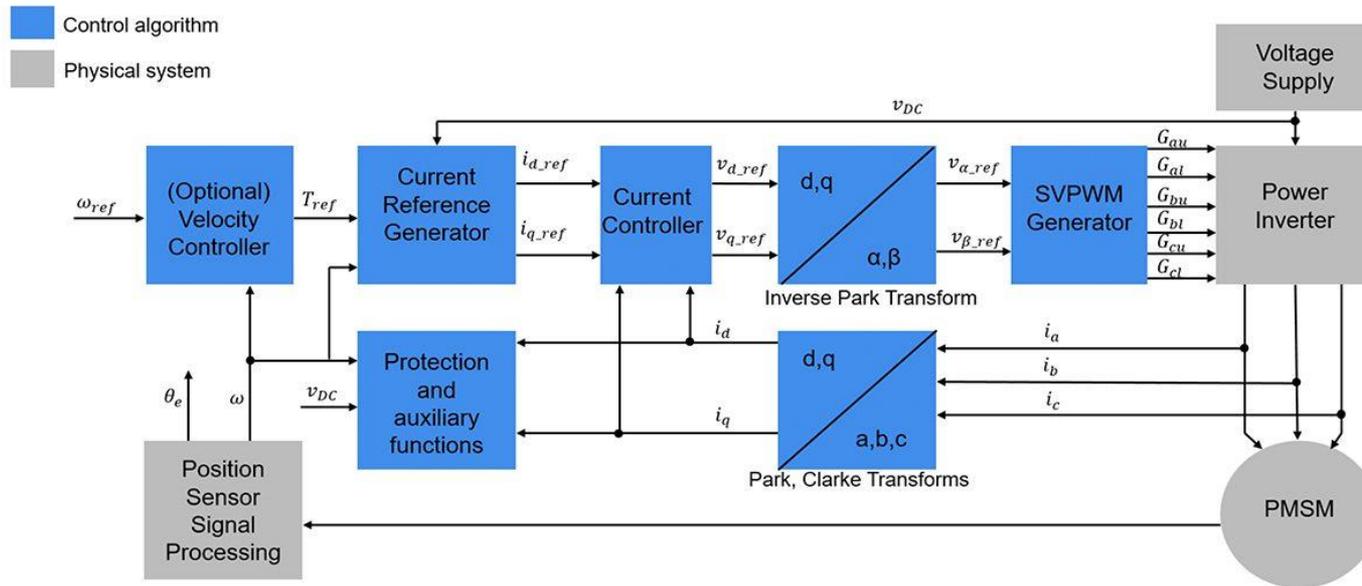
# Accionamientos eléctricos de motores de corriente alterna síncronos

La velocidad de un motor síncrono se puede cambiar de una forma sencilla modificando la frecuencia de alimentación, ya que la velocidad de rotación coincide con la de sincronismo del campo magnético giratorio. Para cada frecuencia, la velocidad del motor permanecerá constante a menos que la máquina pierda el sincronismo por haberse aplicado al eje un par resistente superior al máximo.



Regulación de velocidad de un motor síncrono en lazo abierto

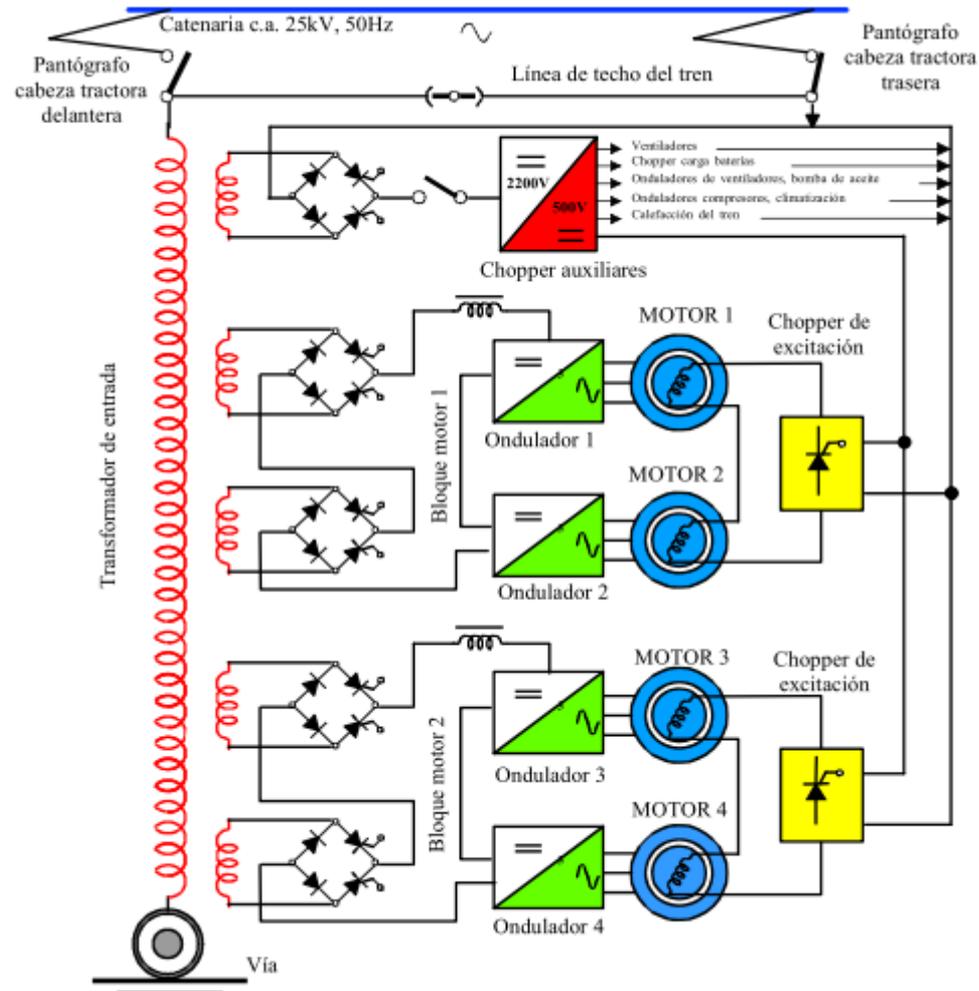
# Control vectorial de motores síncronos de imanes permanentes



El diagrama de bloques muestra una arquitectura de control de campo orientado que incluye los siguientes componentes:

- Controlador de corriente consistente en dos controladores proporcionales e integrales
- Controlador opcional de velocidad del lazo externo y generador de referencias de corriente
- Transformadas de Clarke y Park y transformada de Park inversa para la realizar la conversión entre los marcos estacionarios y síncronos rotatorios
- Un algoritmo modulador por vector espacial para transformar los comandos  $v_{\alpha}$  y  $v_{\beta}$  en señales de modulación por ancho de pulsos aplicadas a los arrollamientos de estátor
- Funciones de protección y auxiliares, tales como lógica de arranque y parada
- Observador opcional para estimar la posición angular del rotor si se desea control sin sensores

# Alimentación de los motores de tracción del tren AVE serie 100 con c.a. 25 kV, 50 Hz



# Alimentación de los motores de tracción del tren AVE serie 100 con 3000 Vcc

