GEOMETRÍA DIFERENCIAL DE CURVAS Y SUPERFICIES

TEMA 1 - CURVAS EN EL ESPACIO

M. C. GONZÁLEZ DÁVILA, I. GUTIÉRREZ SAGREDO, D. IGLESIAS PONTE

Dpto. Matemáticas Estadística e Investigación Operativa

Universidad de La Laguna

1. Introducción

En este tema estudiaremos distintas maneras en las que se puede definir una curva. Si consideramos las líneas rectas, sabemos que existen tres maneras de definirlas:

- de manera implícita, como el conjunto de puntos que satisfacen la ecuación $ax + by + c = 0$.
- de manera paramétrica, como la imagen de la ecuación $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (p_1 + v_1t, p_2 + v_2t)$.
- de manera explícita, como el grafo de $y = mx + n$ (o $x = py + q$), con $m, n \in \mathbb{R}$.

Si queremos que dentro de nuestros objetos a definir se encuentre la circunferencia de centro (a, b) y radio r,

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2,$$

se tiene que no es un grafo con respecto a ninguna de las dos coordenadas (¿Por qué?)

Por otro lado, si queremos interpretar las curvas de manera implícita, como $f^{-1}(a)$, para una cierta función f, también tenemos que ser cuidadosos, debido al siguiente resultado

Proposición 1.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Un subconjunto $C \subset \Omega$ es cerrado si y sólo si existe una función continua $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $C = f^{-1}(0)$.*

Nota 1.2. *Pedir que f sea diferenciable no es suficiente ya que un teorema (de Whitney) extiende el resultado anterior probando que C es cerrado si y sólo si existe una función de clase C^∞ con $C = f^{-1}(0)$.*

2. Curvas parametrizadas

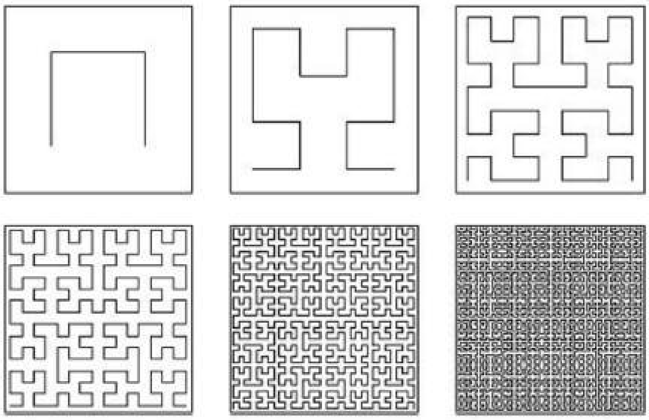
Definición 2.1. *Una* ***curva parametrizada*** *diferenciable es una aplicación diferenciable* $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$,

$$t \mapsto \alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

de un intervalo abierto $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}^3$.

La imagen $\alpha(I) = \{\alpha(t) \,|\, t \in I\}$ *se denomina la* ***traza*** *de* α.

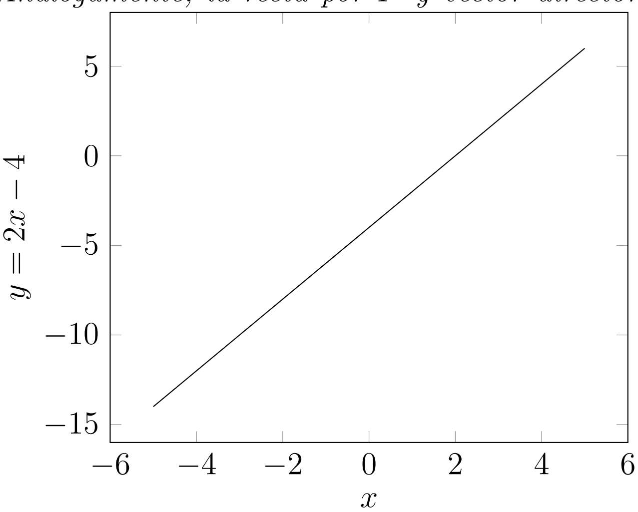
Nota 2.2. *Pedimos que la curva sea diferenciable para evitar casos patológicos que aparecen al considerar solamente curvas continuas, como la curva de Hilbert.*



Ejemplos 2.3. *1. Dados dos puntos* P *y* Q*, en el espacio, podemos representar la* ***recta*** *por* P *y* Q *como la curva diferenciable*

$$\alpha(t) = P + t(Q - P), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Análogamente, la recta por P *y vector director* $\vec{v}$ *viene dada por* $\alpha(t) = P + t\vec{v}$.



2. La curva diferenciable

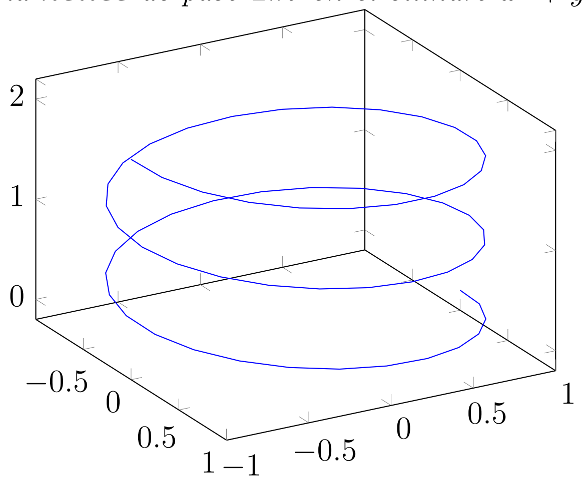
$$\alpha(t) = (a + r\cos t, b + r \operatorname{sen} t, 0), \qquad t \in \mathbb{R},$$

es la ***circunferencia*** *de centro* (a, b) *y radio* r.

3. La curva diferenciable

$$\alpha(t) = (a\cos t, a \operatorname{sen} t, bt), \qquad t \in \mathbb{R},$$

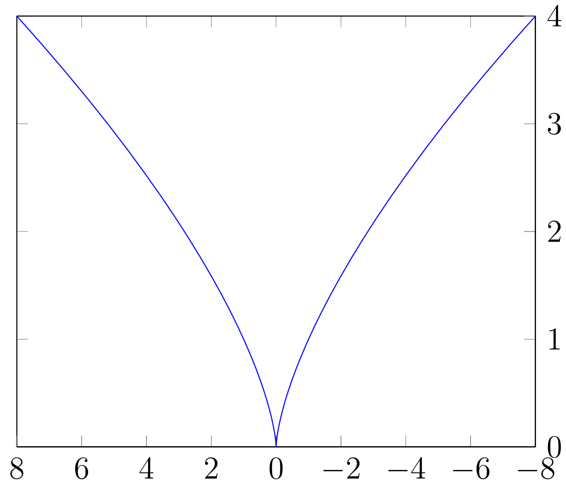
es la ***hélice*** *de paso* $2\pi b$ *en el cilindro* $x^2 + y^2 = a^2$.



4. La curva diferenciable $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2$, *dada por*

$$\alpha(t) = (t^2, t^3), \qquad t \in \mathbb{R}$$

es una curva parametrizada diferenciable.



Sin embargo, hay que fijarse que la curva en $(0, 0)$ *tiene un pico (denominado cúspide).*

5. La curva diferenciable $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2$*, dada por*

$$\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4), \qquad t \in \mathbb{R}$$

es una curva parametrizada diferenciable. Notar que $\alpha(2) = \alpha(-2) = (0,0)$*, con lo que la aplicación no es inyectiva.*

Nota 2.4. *Notar que distintas curvas parametrizadas pueden tener la misma traza. Por ejemplo,* $\alpha_1(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$ *y* $\alpha_2(t) = (\cos(2t), \sin(2t), 0)$ *tienen como traza la circunferencia de centro* $(0,0)$ *y radio* $r = 1$*.*

Definición 2.5. *Dada una curva diferenciable* $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$*, se define el* ***vector velocidad*** *de* α *en* t_0*, como el vector*

$$\alpha'(t_0) = (\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}_{|t=t_0}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}_{|t=t_0}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}_{|t=t_0}),$$

la ***velocidad*** *de* α *en* t_0 *será* $||\alpha'(t_0)||$*. Si la velocidad* $||\alpha'(t)||$ *es constante e igual a 1 decimos que* α *es* ***unitaria****.*

Análogamente, la ***aceleración*** *de* α *en* t_0 *viene dada por*

$$\alpha''(t_0) = (\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}_{|t=t_0}, \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}_{|t=t_0}, \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}_{|t=t_0}),$$

Nota 2.6. *Notar que el vector velocidad nos permite definir la* ***recta tangente*** *a la curva en* $t = t_0$ *como la recta que pasa por* $P = \alpha(t_0)$ *con vector director* $\vec{v} = \alpha'(t_0)$*.*

Ejemplos 2.7. *1. Para la recta por* P *con vector director* $\vec{v}$*, el vector velocidad* $\alpha'(t) = \vec{v}$*, la velocidad es* $||\alpha'(t)|| = ||\vec{v}||$*, y la aceleración es constante igual a* 0*.*

2. Para la circunferencia de centro (a,b) *y radio* r*,* $\alpha'(t) = (r\cos(t), -r\sin(t), 0)$ *y la velocidad es constante* $||\alpha'(t)|| = r$*.*

3. Dada una hélice, el vector velocidad viene dado por $\alpha'(t) = (a\cos(t), -a\sin(t), b)$*, la velocidad es constante* $||\alpha'(t)|| = \sqrt{a^2 + b^2}$*.*

4. La curva parametrizada

$$\alpha(t) = (t^2, t^3), \qquad t \in \mathbb{R}$$

tiene como vector velocidad $\alpha'(t) = (2t, 3t^2)$*. Notar que la velocidad se anula para* $t = 0$*, que es el pico de la curva.*

Proposición 2.8. *Una curva parametrizada es una recta* $\alpha = P + t\vec{v}$ *si y sólo si su vector aceleración es 0.*

Demostración. Si $\alpha(t) = P + t\vec{v}$ entonces $\alpha''(t) = 0$.

Recíprocamente, si $\alpha''(t) = (0,0,0)$, integrando $\alpha(t) = (tv_1 + p_1, tv_2 + p_2, tv_2 + p_2)$. □

Para terminar esta sección, introducimos la noción de regularidad

Definición 2.9. *Sea $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada. Se dice que α tiene un **punto singular** en $t_0 \in I$ si*

$$\alpha'(t_0) = 0.$$

*En caso contrario, se dice que α tiene un **punto regular** en t_0.*

*Se dice que α es **regular** cuando todos sus puntos son regulares, es decir, cuando $\alpha'(t) \neq 0$, para todo $t \in I$.*

Ejemplos 2.10. *1. Como $\alpha'(t) = \vec{v}$, la recta $\alpha(t) = P + t\vec{v}$ es una curva regular.*

2. La circunferencia $\alpha(t) = (-r \operatorname{sen} t, r\cos t, 0)$ es regular, ya que $||\alpha'(t)|| = r \neq 0$.

3. La hélice $\alpha(t) = (a\cos t, a \operatorname{sen} t, bt)$ cumple que $||\alpha'(t)|| = \sqrt{a^2+b^2} \neq 0$, con lo que es una curva regular.

4. La curva $\alpha(t) = (t^2, t^3)$ tiene un punto singular en $t = 0$.

5. La curva $\alpha(t) = P + t^3\vec{v}$ tiene un punto singular en $t = 0$. Notar que la traza de esta curva es también un segmento de recta.

3. Longitud de una curva

Sea una aplicación continua $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$. Dada una partición $\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ del intervalo $[a,b]$, consideramos la poligonal inscrita con vértices en $\alpha(t_i)$ ($t_i \in \mathcal{P}$), es decir, la unión de los segmentos $\overline{\alpha(t_i)\alpha(t_{i+1})}$, $i \in \{0,\ldots,n-1\}$. Su longitud vendrá dada por la expresión

$$L_a^b(\alpha,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} ||\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})||.$$

Una curva continua se dirá **rectificable** si

$$sup\{L_a^b(\alpha,\mathcal{P})\colon \mathcal{P} \text{ partición de } [a,b]\} < \infty.$$

En este caso, se define la **longitud de arco** α entre a y b, denotada por $L_a^b(\alpha)$, como

$$L_a^b(\alpha) = sup\{L_a^b(\alpha,\mathcal{P})\colon \mathcal{P} \text{ partición de } [a,b]\}.$$

Se puede probar el siguiente resultado

Proposición 3.1. *Dada $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada (de clase C^k, con $k \geq 1$) y $[a,b] \subset I$. Entonces, α es rectificable y la longitud de α entre a y b viene dada por*

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b ||\alpha'(t)||\mathrm{d}t$$

Ejemplos 3.2. *1. Para la recta* $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = P + t(Q-P)$, *la longitud entre* 0 *y* 1 *es la distancia entre* P *y* Q, *es decir,* $||Q-P||$. *En efecto,*

$$L_0^1(\alpha) = \int_0^1 ||\alpha'(t)||\mathrm{d}t = \int_0^1 ||Q-P||\mathrm{d}t = ||Q-P||.$$

2. Dada la hélice $\alpha(t) = (r\cos t, r\operatorname{sen} t, bt)$ *la longitud entre* $a = 0$ *y* $b = 2\pi$ *es*

$$L_0^1(\alpha) = \int_0^{2\pi} ||\alpha'(t)||\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2+b^2}\mathrm{d}t = 2\pi\sqrt{r^2+b^2}.$$

En particular, para la circunferencia (donde $b = 0$*), se deduce que la longitud es el perímetro de la circunferencia:*

$$L_0^1(\alpha) = \int_0^{2\pi} ||\alpha'(t)||\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2}\,\mathrm{d}t = 2\pi r.$$

4. Reparametrizaciones. Parámetro arco

Introducimos ahora una noción que nos permite ver cuándo dos curvas parametrizadas tienen la misma traza.

Definición 4.1. *Dadas dos curvas parametrizadas* $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ *y* $\beta\colon J \to \mathbb{R}^3$, *se dice que* β *es una* ***reparametrización*** *de* α *si existe un difeomorfismo* $h\colon J \to I$, $u \mapsto t = h(u)$ *tal que*

$$\alpha(h(u)) = \beta(u), \qquad u \in J.$$

Dada una reparametrización $h\colon J \to I$

i) *Decimos que la reparametrización es* ***directa*** *(o que* ***preserva la orientación****) si* $h' > 0$ *(equivalentemente,* h *es monótona creciente).*
ii) *Decimos que la reparametrización es* ***inversa*** *(o que* ***invierte la orientación****) si* $h' < 0$ *(equivalentemente,* h *es monótona decreciente).*

Nota 4.2. *Si* β *es una reparametrización de* α, *entonces las trazas coinciden.*

Ejemplo 4.3. *Sean* β_1, β_2 *y* β_3 *las curvas parametrizadas dadas por*

$$\beta_1(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), 0), \quad \beta_2(t) = (\cos(-t), \operatorname{sen}(-t), 0), \quad \beta_3(t) = (\operatorname{sen}(t), \cos(t), 0).$$

En este caso, es fácil ver que

- β_2 *es una reparametrización inversa de* β_1 *por* $g(t) = -t$.
- β_3 *es una reparametrización directa de* β_1 *por* $g(t) = t + \pi/2$.

Teorema 4.4. *Toda curva parametrizada regular* α *admite una reparametrización unitaria.*

Demostración. Dada una curva, la longitud de arco permite definir una aplicación $h\colon I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto s = h(t)$ de la siguiente manera

$$s = \int_{t_0}^{t} ||\alpha'(t)||\mathrm{d}t.$$

Por el teorema fundamental del cálculo $h'(t) = |\alpha'(t)|$. Si la curva es regular, $h'(t) \neq 0$ y al ser h monótona, determina un difeomorfismo $h\colon I \to h(I)$ (notar que en general, la derivada k-ésima de h es de la forma $h^{(k)}(t) = \frac{F(t)}{||\alpha'(t)||^{k-1}}$)

Si definimos $\beta = \alpha \circ h^{-1}$, en $s = h(t)$,

$$||\beta'(s)|| = ||\alpha'(h^{-1}(s))(h^{-1})'(s))|| = ||\alpha'(t)\frac{1}{h'(t))}|| = ||\alpha'(t)||\frac{1}{||\alpha'(t)||} = 1$$

□

Nota 4.5. *Notar que si α es unitaria entonces el parámetro t de α y el parámetro de la longitud de arco $s = h(t)$ de la reparametrización $\beta = \alpha \circ h^{-1}$ difieren de una constante,*

$$s = h(t) = \int_{t_0}^{t} ||\alpha'(u)||\mathrm{d}u = t - t_0.$$

Definición 4.6. *La reparametrización del Teorema 4.4 se denomina **reparametrización por la longitud de arco** y la curva unitaria obtenida se dirá que está **parametrizada por el parámetro (longitud de) arco**.*

5. Curvas geométricas

La noción de reparametrización nos permite definir una relación de equivalencia que nos permite identificar aquellas curvas que tienen la misma traza.

Proposición 5.1. *En el conjunto de todas las curvas diferenciables $\{\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3\}$, la relación*

$$\alpha \cong \beta \iff \beta \text{ es una reparametrización de } \alpha$$

es una relación de equivalencia.

Nota 5.2. *Debido a la proposición anterior, si β es una reparametrización de α decimos que α y β son equivalentes.*

Definición 5.3. *Se define **curva geométrica** (o simplemente curva) a la clase de equivalencia formada por todas las reparametrizaciones de una curva parametrizada.*

*Si $\mathcal{C}$ es una curva geométrica y $\mathcal{C} = [\alpha]$, decimos que α es una **parametrización** de $\mathcal{C}$.*

Aunque hemos insistido en las parametrizaciones de las curvas, queremos estudiar aquellas propiedades que dependen solamente de la traza, pero no de la parametrización escogida. A este tipo de propiedades se les denomina **invariantes geométricos** de la curva.

Proposición 5.4. *La regularidad y la recta tangente son invariantes geométricos.*

Demostración. Si $\beta = \alpha \circ g$ entonces

(1) $$\beta'(u) = g'(u)\alpha'(g(u)), u \in J.$$

Como $g'(u) \neq 0$, $||\alpha'(g(u))|| \neq 0$ si y sólo si $||\beta'(u)|| \neq 0$.

Por otro lado, como $\alpha(g(u_0)) = \beta(u_0)$ y, usando (1) se tiene que los vectores directores de las rectas tangentes son proporcionales, la recta tangente a α en $t = t_0 = g(u_0)$ coincide con la recta tangente a β en $u = u_0$. $\square$

Nota 5.5. *De la ecuación* (1) *se concluye inmediatamente que el vector velocidad no es un invariante geométrico.*

Proposición 5.6. *La longitud es un invariante geométrico.*

Demostración. Sea $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada y $\beta = \alpha \circ g\colon J \to \mathbb{R}^3$ una reparametrización, con $g\colon J \to I$. Dado $[a,b] \subset J$ y $[c,d] = g([a,b]) \subset I$.

$$L_a^b(\beta) = \int_a^b ||\beta'(u)||\mathrm{d}u = \int_a^b |g'(u)|\,||\alpha'(u)||\mathrm{d}u$$

Tenemos dos posibilidades:

a) g es directa ($g'(u) > 0$). Esto implica que g es creciente, de donde se deduce que $g(a) = c$ y $g(b) = d$.

$$L_a^b(\beta) = \int_c^d ||\alpha'(t)||\mathrm{d}t = L_c^d(\alpha)$$

b) g es inversa ($g'(u) < 0$). Esto implica que g es decreciente, de donde se deduce que $g(a) = d$ y $g(b) = c$.

$$L_a^b(\beta) = -\int_a^b g'(u)\,||\alpha'(u)||\mathrm{d}u = -\int_d^c ||\alpha'(t)||\mathrm{d}t = \int_c^d ||\alpha'(t)||\mathrm{d}t = L_c^d(\alpha)$$

$\square$

Recordatorio de álgebra lineal euclídea

Recordamos que en $\mathbb{R}^3$ se puede definir un productor escalar como

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3,$$

para $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Este producto escalar tiene las siguientes propiedades

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$, para todo $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$.
b) $(\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2) \cdot \vec{v} = \lambda_1 \vec{u}_1 \cdot \vec{v} + \lambda_2 \vec{u}_2 \cdot \vec{v}$.
c) $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ para todo $\vec{u}$. Además, $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ si y sólo si $\vec{u} = \vec{0}$.

Se dice que dos vectores $\vec{u}, \vec{v}$ son ortogonales si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Utilizando el producto escalar, se define la **norma** de un vector $\vec{u}$ como

$$||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}.$$

Dicha norma cumple *Desigualdad de Schwarz*

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq ||\vec{u}|| \, ||\vec{v}||$$

Lema 5.7. *Sean $\alpha, \beta \colon I \to \mathbb{R}^3$ curvas parametrizadas, $c \colon I \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Entonces:*

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\alpha(t) \cdot \beta(t)\Big) = \alpha'(t) \cdot \beta(t) + \alpha(t) \cdot \beta'(t)$.
2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(c(t)\alpha(t)\Big) = c'(t)\alpha(t) + c(t)\alpha'(t)$.

Proposición 5.8. *Sean $\alpha, \beta \colon I \to \mathbb{R}^3$ curvas parametrizadas. Entonces:*

1. *Si α tiene norma constante ($||\alpha(t)|| = k$, para todo t) entonces $\alpha'(t)$ es ortogonal a $\alpha'(t)$ para todo $t \in I$.*
2. *Si α es ortogonal a β entonces*

$$\alpha'(t) \cdot \beta(t) = -\alpha(t) \cdot \beta'(t).$$

Recordatorio de Análisis de varias variables

Sea $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Decimos que F es diferenciable en $x_0 \in U$ si existen las derivadas parciales de F en x_0 y

$$\lim_{x \to x_0} \frac{||F(x) - F(x_0) - T(x - x_0)||}{||x - x_0||} = 0,$$

donde $T = JF(x_0)$ es la Jacobiana de F en x_0, es decir, la matriz $\left(\frac{\partial F^i}{\partial x_j}\right)$ de las derivadas parciales evaluadas en x_0.

Sea $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Se dice que F es de clase C^k si las derivadas parciales k-ésimas existen y son continuas.

Sea $F = (F^1, \ldots, F^m)\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Se dice que F es de clase C^k si cada una de las F^i son de clase C^k.

Definición 5.9. *Sea $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación diferenciable. Para cada $p \in U$ podemos asociar una aplicación lineal $dF(p)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ que se denomina la diferencial de F en p y se define como sigue. Si $w \in \mathbb{R}^n$ entonces*

$$dF(p)(w) = \frac{d}{dt}_{|t=0}\Big(F(p + tw)\Big)$$

Nota 5.10. *Dada una función $F(x_1, \ldots, x_n) = (F^1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F^m(x_1, \ldots, x_n))$, notar que si $w = (w_1, \ldots, w_n)$ entonces*

$$dF(p)(w) = \left(\frac{\partial F^i}{\partial x_j}\right) \begin{pmatrix} w_1 \\ \ldots \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Por tanto, la matriz asociada a la diferencial es la jacobiana de F, es decir, la matriz de las derivadas parciales de F.

Teorema 5.11 (de la función inversa)**.** *Sea $F\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación diferenciable y supongamos que en $p \in U$, la diferencial $dF(p)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo. Entonces existe un entorno abierto V de p contenido en U y un entorno abierto W de $F(p)$ en $\mathbb{R}^n$ tal que $F\colon V \to W$ tiene una inversa diferenciable $F^{-1}\colon W \to V$.*

Teorema 5.12 (de la función implícita)**.** *Sea $F = (F^1, \ldots, F^m)\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ función de clase C^k definida en un abierto Ω, con $1 \leq m < n$ y $k \geq 1$. Dado un punto $p_0 \in D$, supongamos que $F(p_0) = 0$ y que $dF(p_0)$ tiene rango m (supondremos, sin pérdida de generalidad, que el determinante*

$$\left(\frac{\partial F^i}{\partial x_j}(p_0)\right)_{j=n-m+1,\ldots n}^{i=1,\ldots,m}$$

tiene determinante no nulo). Entonces, existe un entorno abierto U de p_0, un abierto W de $\mathbb{R}^{n-m}$ que contiene $(p_0^1, \ldots, p_0^r)$ y funciones $\phi^1, \ldots, \phi^m$ de clase C^k

en W tal que

$$\left|\frac{\partial F^i}{\partial x_j}(p_0)\right|_{j=n-m+1,\ldots n}^{i=1,\ldots,m} \neq 0, \qquad \textit{para todo } x \in U$$

y

$$\begin{aligned}\{x \in U \mid F(x_1,\ldots,x_n)=0\} &= \\ &\{x \in U \mid (x_1,\ldots,x_{n-m}) \in W, x^{n-m+l} = \phi^l(x_1,\ldots x_{n-m}),\ \textit{para } l = 1,\ldots,m\}\end{aligned}$$