GEOMETRÍA DIFERENCIAL DE CURVAS Y SUPERFICIES

TEMA 3 - SUPERFICIES EN EL ESPACIO

M. C. GONZÁLEZ DÁVILA, I. GUTIÉRREZ SAGREDO, D. IGLESIAS PONTE

Dpto. Matemáticas Estadística e Investigación Operativa

Universidad de La Laguna

1. Superficies regulares. Ejemplos

Definición 1.1. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ un subespacio topológico no vacío. S es una* ***superficie regular*** *si para cada punto $p \in S$ existe un abierto U de $\mathbb{R}^2$, V un entorno abierto de p en S y una aplicación $X\colon U \to S$, $(u,v) \mapsto X(u,v)$, diferenciable tal que*

i) $X(U) = V$.
ii) $X : U \to V$ *es un homemorfismo.*
iii) X *es regular, esto es,* $(dX)_p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *es inyectiva*

La aplicación X se denomina ***parametrización (local)*** *de la superficie. Al par (u,v) se les llama* ***coordenadas locales*** *del punto $p = X(u,v) \in S$ y a V,* ***entorno coordenado*** *de p. Si $X(U) = S$, la superficie se dice que es* ***simple****.*

Nota 1.2. *1. Si*

$$X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \qquad (u,v) \in U,$$

X es diferenciable si y sólo si las funciones componentes $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ son diferenciables.

2. Como $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es diferenciable, entonces es continua. Así,la condición de ser X homeomorfismo es equivalente a:

a) X *es inyectiva;*
b) $X^{-1} : X(U) \subset S \to U \subset \mathbb{R}^2$ *es continua, esto es, X^{-1} es la restricción a $X(U)$ de una aplicación continua $F : O \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida en un abierto $O \subset \mathbb{R}^3$ que contiene a $X(U)$.*

3. $(dX)_p\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es inyectiva si y sólo si la matriz Jacobiana

$$JX(u,v) = \left(\frac{\partial X}{\partial u}_{|(u,v)} \; \frac{\partial X}{\partial v}_{|(u,v)}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}_{|(u,v)} & \frac{\partial x}{\partial v}_{|(u,v)} \\ \frac{\partial y}{\partial u}_{|(u,v)} & \frac{\partial y}{\partial v}_{|(u,v)} \\ \frac{\partial z}{\partial u}_{|(u,v)} & \frac{\partial z}{\partial v}_{|(u,v)} \end{pmatrix}$$

tiene rango 2, es decir, los vectores $X_1 = \frac{\partial X}{\partial u}_{|(u,v)}$ *y* $X_2 = \frac{\partial X}{\partial v}_{|(u,v)}$ *son vectores linealmente independientes para todo* $(u,v) \in U$ *o, equivalentemente,* $(X_1 \times X_2)(u,v) \neq 0$ *para todo* $(u,v) \in U$.

Ejemplos 1.3. 1. Planos

Si π *es un plano en* $\mathbb{R}^3$ *entonces* π *es una superficie regular. De hecho, si el plano viene dado por la ecuación* $ax+by+cz = d$ *entonces, usando que* $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ *(suponiendo que* $c \neq 0$*) entonces* $z = Ax + By + C$ *y*

$$X\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad X(u,v) = (u, v, Au + Bv + C)$$

es una parametrización local.

2. Superficies de Monge

Dada una función diferenciable $f\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, *podemos definir la superficie*

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = f(x,y), (x,y) \in U\}.$$

S *es una superficie regular simple tomando la parametrización local* $X\colon U \to \mathbb{R}^3$ *dada por*

$$(u,v) \mapsto (u, v, f(u,v)).$$

a) U *es abierto y* $X(U) = S = S \cap \mathbb{R}^3$ *que también es abierto en la topología relativa de* S.
b) X *es diferenciable porque* f *lo es.*
c) X *es inyectiva y* $X^{-1}\colon S \to \mathbb{R}^2$, $(x,y,f(x,y)) \mapsto (x,y)$ *es continua por ser la restricción a* S *de la proyección* $pr_{12}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y,z) \mapsto (x,y)$, *que es continua.*
d) $X_1 = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial u})$ *y* $X_2 = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial v})$ *son linealmente independientes.*

A las superficies definidas como grafos de funciones diferenciables se les denomina superficies de Monge.

3. Abiertos de superficies

Si S *es una superficie regular y* $S_1 \subset S$ *es una abierto en* S *distinto de vacío, entonces* S_1 *es superficie regular. De hecho, si* $X\colon U \to S$ *es una parametrización local de* S *con* $X(U) \cap S_1 \neq \emptyset$, *entonces* $X\colon X^{-1}(X(U) \cap S_1) \to S_1$ *es una parametrización local de* S_1.

4. Esfera

La esfera $S^2 = \{(x,y,z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ *es una superficie regular. De hecho, dado el abierto* $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,|\, u^2 + v^2 < 1\}$, *podemos definir la aplicación diferenciable* $X_1^{\pm}\colon U \to S^2$ *dada por*

$$X_1^{\pm}(u,v) = (u, v, \pm\sqrt{1 - u^2 - v^2}).$$

Veamos que determina una parametrización local:

a) $X_1^{+}(U) = S^2 \cap (\mathbb{R}^2 \times (0,\infty))$, *que es abierto en* S^2.
b) $X_1^{\pm}$ *es inyectiva y* $(X_1^{\pm})^{-1}\colon X_1^{\pm}(U) \to \mathbb{R}^2$ *es continua por ser la restricción a* S^2 *de la proyección* $pr_{12}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y,z) \mapsto (x,y)$, *que es continua.*

d) $X_1 = (1, 0, \pm\frac{-2u}{\sqrt{1-u^2-v^2}})$ *y* $X_2 = (0, 1, \pm\frac{-2v}{\sqrt{1-u^2-v^2}})$ *son linealmente independientes.*

De manera análoga, se tiene que las aplicaciones

$$X_2^{\pm}\colon U \to S^2, \qquad X_2^{\pm}(u,v) = (u, \pm\sqrt{1-u^2-v^2}, v)$$
$$X_3^{\pm}\colon U \to S^2, \qquad X_3^{\pm}(u,v) = (\pm\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v)$$

son parametrizaciones locales que recubren la esfera.

Nota 1.4. *La unión de superficies regulares no es una superficie regular. Esto sólo es posible si* $S = \bigcup_{i\in I} S_i$*, con* S_i *abierto de* S *(como se ve que ocurre en el ejemplo de la esfera).*

2. Cambio de parámetros (de coordenadas)

Lema 2.1. *Dada una superficie* S*, sea* $X\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *una parametrización local y* $p_0 \in U$ *con* $X(p_0) = p$*. Entonces, existe un entorno abierto* $V \subset U$ *de* q *y una proyección ortogonal* $\pi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *sobre uno de los planos coordenados de* $\mathbb{R}^3$*, tal que* $W = (\pi \circ X)(V)$ *es abierto y* $(\pi \circ X)_{|V}\colon V \to W$ *es un difeomorfismo.*

Demostración. Por ser X regular, la matriz jacobiana JX tiene rango 2 y podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}_{|(u,v)} & \frac{\partial x}{\partial v}_{|(u,v)} \\ \frac{\partial y}{\partial u}_{|(u,v)} & \frac{\partial y}{\partial v}_{|(u,v)} \end{vmatrix} \neq 0$$

Considerando en este caso la proyección $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sobre las dos primeras componentes, se tiene que

a) $\pi \circ X\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(u,v) \mapsto (\pi \circ X)(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ es diferenciable (lo son las componentes de$X$);
b) El jacobiano de $\pi \circ X$ en p_0 es una matriz regular.

Aplicando el teorema de la función inversa, existe un entorno abierto $V \subset U$ de q tal que $(\pi \circ X) : V \subset U \to (\pi \circ X)(V) \subset \mathbb{R}^2$ $(u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v))$ es un difeomorfismo. □

Un punto de una superficie S puede pertenecer a más de un entorno coordenado, con lo que es natural preguntarse cómo se puede pasar de unas coordenadas a otras.

Definición 2.2. *Sean* $X_i\colon U_i \to S$ *dos parametrizaciones locales,* $i = 1, 2$*, y* $O = X_1(U_1) \cap X_2(U_2) \neq \emptyset$*. La aplicacion* $X_2^{-1} \circ X_1\colon X_1^{-1}(O) \to X_2^{-1}(O)$ *se denomina* ***cambio de parámetros*** *(cambio de coordenadas)*

Teorema 2.3. *El cambio de parámetros es un difeomorfismo.*

Demostración. Si definimos $h = X_2^{-1} \circ X_1$ está claro que es un homemorfismo (por ser composición de homeomorfismos) y $h^{-1} = X_1^{-1} \circ X_2$. Por tanto, es suficiente ver que h es diferenciable (para ver que h^{-1} es diferenciable, es suficiente con intercambiar el papel de X_1 y X_2). Notar que para probar la diferenciabilidad de h, no sabemos nada sobre la diferenciabilidad de X_2^{-1} ya que $X_2^{-1} : V_2 \subset S \to \mathbb{R}^2$ no está definida en un abierto de $\mathbb{R}^3$.

Sea $q_1 \in X_1^{-1}(O)$. Por el Lema anterior para el punto $q_2 = h(q_1) \in X_2^{-1}(O)$ y la parametrización local $X_2 \colon U_2 \to S$, existe $V \subseteq X_2^{-1}(O)$ un entorno abierto de q_2 y una proyección $\pi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, tal que $\pi \circ X_2 \colon V \subset U_2 \to W = (X_2 \circ \pi)(V)$ es un difeomorfismo.

Como h es continua $h^{-1}(V) = (X_2^{-1} \circ X_1)^{-1}(V) = X_1^{-1}(X_2(V))$ es un entorno abierto de q_1 y si restringimos h a dicho abierto,

$$\begin{aligned} h &= (\pi \circ X_2)^{-1} \circ (\pi \circ X_2) \circ h \\ &= (\pi \circ X_2)^{-1} \circ (\pi \circ X_2) \circ (X_2^{-1} \circ X_1) \\ &= (\pi \circ X_2)^{-1} \circ \pi \circ X_1 \end{aligned}$$

Como h es la composición de $X_1 : h^{-1}(V) \to X_1(h^{-1}(V)) = X_2(V)$, $\pi : X_2(V) \subset \mathbb{R}^3 \to (\pi \circ X_2)(V) = W \subset \mathbb{R}^2$ y $(\pi \circ X_2)^{-1} : W = (\pi \circ X_2)(V) \to V$, que son funciones diferenciables definidas en abiertos de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, se tiene que h es diferenciable en q_1. $\square$

El lema anterior nos permite también probar que, localmente, toda superficie regular es el grafo de una función diferenciable.

Proposición 2.4. *Sea S una superficie regular. Dado $p \in S$. existe un entorno abierto W de p tal que W es el grafo de una función diferenciable $f \colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.*

Si S es una superficie, existe una manera de comprobar si una aplicación $X \colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización local de S sin necesidad de comprobar que X es un homeomorfismo.

Proposición 2.5. *Sea S una superficie regular y $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un abierto. Si $X \colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una aplicación diferenciable, regular e inyectiva con $X(U) \subseteq S$ entonces $X \colon U \to S$ es una parametrización local de S.*

Demostración. Tenemos que ver que $X(U)$ es continua y que X^{-1} es continua en p para todo $p \in X(U)$.

Como S es superficie, usando la Proposición 2.4, existe W_0 un abierto en $\mathbb{R}^3$, Ω un abierto de $\mathbb{R}^2$ y una función diferenciable $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $W = S \cap W_0$, donde

$$W = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \Omega\}.$$

Sea $U_0 = X^{-1}(W_0) \subseteq U$ y definimos la función $\pi \circ X \colon U_0 \to \mathbb{R}^2$. Si $(u, v) \in U_0$ se tiene que para $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ se cumple $z(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$. Por tanto,

$$\begin{cases} X_u = (\dfrac{\partial x}{\partial u}, \dfrac{\partial y}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial u}) = (\dfrac{\partial x}{\partial u}, \dfrac{\partial y}{\partial u}, \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}) \\ X_v = (\dfrac{\partial x}{\partial v}, \dfrac{\partial y}{\partial v}, \dfrac{\partial z}{\partial v}) = (\dfrac{\partial x}{\partial v}, \dfrac{\partial y}{\partial v}, \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v}) \end{cases}$$

Al ser X regular,

$$0 \neq X_u \times X_v = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}, -\frac{\partial f}{\partial y}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\right),$$

de lo que se deduce que

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix} \neq 0.$$

Usando el Teorema de la función inversa en p para $(\pi \circ X)(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$, existe un abierto $U_1 \subseteq U_0$, $p \in U_1$, y un abierto V_1 tal que

$$(\pi \circ X)_{|U_1} \colon U_1 \to V_1$$

es un difeomorfismo.

Primero de todo, $X(U_1) = X \circ ((\pi \circ X)_{|U_1})^{-1}(V_1) = (\pi_{|S \cap W_0})^{-1}(V_1)$ es un abierto en S, con lo que $X(U)$ es un entorno de p en S. En consecuencia, $X(U)$ es un abierto de S.

Por otra parte, teniendo en cuenta que X es inyectiva, $X^{-1} \colon X(U) \to U$ está bien definida. Como $X(U)$ es abierto en S, podemos tomar W_0 tal que $W_0 \cap S \subseteq X(U)$. Definimos el conjunto $W = W_0 \cap \pi^{-1}(V_1)$. Veamos que $X^{-1}_{|W \cap S} = ((\pi \circ X)^{-1}_{|U_1} \circ \pi)_{|W \cap S}$. Dado $(x, y, z) \in W \cap S$, usando que $(x, y, z) \in W_0 \cap \pi^{-1}(V_1)$, existe $(u, v) \in V_1$ con $(x, y, z) = (u, v, f(u, v))$. Por otra parte, $(x, y, z) \in X(U)$ implica que existe $(u', v') \in U$ tal que $(x, y, z) = X(u', v')$. De estas dos igualdades

$$(u, v) = \pi(x, y, z) = (\pi \circ X)(u', v')$$

de donde $(u', v') = (\pi \circ X)^{-1}_{|U_1}(u, v) \in U_1$. Por tanto,

$$X^{-1}(x, y, z) = (u', v') = (\pi \circ X)^{-1}_{|U_1} \circ \pi(x, y, z).$$

De esta igualdad, X^{-1} es continua en p ya que $(\pi \circ X)^{-1}_{|U_1} \circ \pi$ lo es. □

3. Ejemplos de superficies regulares

3.1. Superficies de nivel. En esta sección, vamos a estudiar una manera de generar superficies regulares a partir de imágenes inversas de funciones satisfaciendo una serie de condiciones.

Proposición 3.1. *Sea $F : O \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable definida en un abierto O y $a \in \mathbb{R}$ tal que $F^{-1}(a) \neq \emptyset$. Consideramos la superficie de nivel*

$$S = F^{-1}(a) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / F(x, y, z) = a\}.$$

Entonces si para todo $p \in S$,

$$(dF)(p) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}_{|p}, \frac{\partial F}{\partial y}_{|p}, \frac{\partial F}{\partial z}_{|p}\right) \neq (0, 0, 0)$$

entonces $S = F^{-1}(a)$ es superficie regular.

Demostración. Sea $p = (x_0, y_0, z_0) \in S$. Usando que $\left(\frac{\partial F}{\partial x}_{|p}, \frac{\partial F}{\partial y}_{|p}, \frac{\partial F}{\partial z}_{|p}\right) \neq (0,0,0)$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\frac{\partial F}{\partial z}_{|p} \neq 0$. Utilizando el teorema de la función implícita, Más precisamente, existe U entorno abierto de (x_0, y_0), V entorno abierto de z_0 y una función diferenciable $g\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to V \subseteq \mathbb{R}$, tal que $U \times V \subseteq O$, $g(x_0, y_0) = z_0$ y

$$S \cap (U \times V) = \{(x, y, g(x, y)) \,|\, (x, y) \in U\}.$$

Por tanto, para cada punto de $F^{-1}(a)$ podemos construir una parametrización local cuya imagen es el grafo de una aplicación diferenciable. □

Ejemplo 3.2. *La esfera*

$$S^2 = S^2 = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \ = F^{-1}(1),$$

donde $F\colon \mathbb{R}^3 - (0,0,0) \to \mathbb{R}$ *es la función definida por* $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

a) F *es diferenciable;*

b) $dF = (2x, 2y, 2z)$ *que es igual a* $(0,0,0)$ *si y sólo si* $(x, y, z) = (0,0,0)$, *pero ese punto no pertenece a* S^2.

Por tanto, S^2 *es una superficie regular vista como superficie de nivel.*

Notar que las parametrizaciones locales que obtenemos del teorema de la función implícita son las que obtuvimos en el Ejemplo 1.3, 4.

Variando el punto inicial p obtendremos que M está recubierta por entornos coordenados que son grafos de funciones diferenciables. El siguiente resultado simplifica la comprobación de que una aplicación X es parametrización de un conjunto S de

Nota 3.3. *Hay que notar que la proposición anterior nos da condiciones suficientes para que* $F^{-1}(a)$ *sea una superficie regular, pero no es una caracterización, ya que si existe un punto* p *de* S *donde* $\left(\frac{\partial F}{\partial x}_{|p}, \frac{\partial F}{\partial x}_{|p}, \frac{\partial F}{\partial x}_{|p}\right) = (0,0,0)$ *no sabemos si* S *es superficie o no.*

3.2. Superficies de revolución. Es la superficie obtenida rotando una curva regular plana en torno a una recta que no corta a la curva y está contenida en el plano que contiene a la curva. La curva $\alpha\colon I \to \mathbb{R}$, cuya traza estará contenida en la superficie, satisface la siguiente condición: para todo punto $p = \alpha(t_0)$ existe un abierto $I_{t_0} \subseteq I$ y un abierto V_p de $\mathbb{R}^3$ tal que $\alpha\colon I_{t_0} \to V_p \cap \alpha(I)$ es un homeomorfismo. Así, tendremos una familia de subintervalos $\{I_\lambda\}_{\lambda \in A}$ de I tal que $\bigcup_{\lambda \in A} I_\lambda = I$ y

$$\alpha_{|I_\lambda}\colon I_\lambda \to \alpha(I_\lambda)$$

es un homeomorfismo.

Más precisamente, si $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ es una curva regular contenida en un plano (que supondremos es el plano XZ) y con la coordenada x positiva, se tiene que

$$\alpha(t) = (r(t), 0, z(t)), \qquad r(t) > 0.$$

Ahora, para cada $t_0 \in I$, construimos la circunferencia de centro $(0, 0, z(t_0))$ y radio $r(t_0)$ contenida en el plano $z = z(t_0)$. El conjunto de puntos resultantes es **la superficie de revolución** S. La curva α se llama la **curva generatriz** de la superficie y la eje sobre el que rota es el **eje de revolución**.

Vamos a construir parametrizaciones locales para S. Sabemos que si $X\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ es la aplicación dada por

$$X(t, \theta) = (r(t)\cos\theta, r(t)\sin\theta, z(t))$$

se cumple $X(I \times \mathbb{R}) = S$. Como X tiene que ser parametrización local, se deben cumplir las condiciones de la Definición 1.1. Así, tenemos que reducir el intervalo de definición.

Por hipótesis, existen subintervalos $I_\lambda \subseteq I$ tal que $\bigcup_{\lambda \in A} I_\lambda = I$ y

$$\alpha_{|I_\lambda}\colon I_\lambda \to \mathbb{R}^3$$

es un homeomorfismo. Así definiremos $X\colon I_\lambda \times (\theta_0, \theta_0 + 2\pi) \to \mathbb{R}^3$.

i) X es diferenciable.

i) X es regular: calculando las derivadas parciales de X:

$$\begin{aligned} X_t &= (r'(t)\cos\theta, r'(t)\sin\theta, z'(t)) \\ X_\theta &= (-r(t)\sin\theta, r(t)\cos\theta, 0)) \end{aligned}$$

De aquí,

$$||X_t \times X_\theta|| = r(t)||\alpha'(t)|| \neq 0$$

ya que $r(t) > 0$ y α es regular.

iii) X es inyectiva: Si $X(t, \theta) = X(t', \theta')$ entonces,

$$\begin{aligned} r(t)\cos\theta &= r(t')\cos\theta' \\ r(t)\sin\theta &= r(t')\sin\theta' \\ z(t) &= z(t') \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado y sumando las dos primeras ecuaciones, como $r(t) > 0$, se deduce que $r(t) = r(t')$. Usando la tercera ecuación, como α es inyectiva (es un homeomorfismo), $t = t'$. De ahí deducimos que

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \cos\theta' \\ \sin\theta &= \sin\theta' \end{aligned}$$

con lo que $\theta' = \theta + 2k\pi$, pero como $\theta \in (\theta_0, \theta_0 + 2\pi)$, $\theta = \theta'$.

iv) $X(I_\lambda \times (\theta_0, \theta_0 + 2\pi)$ es un abierto: Esto es así porque α_{I_λ} es un homeomorfismo.

v) X^{-1} es continua: Si despejamos la ecuación

$$\begin{aligned} x &= r(t)\cos\theta \\ y &= r(t)\sin\theta \\ z &= z(t) \end{aligned}$$

podemos deducir que $r(t) = \sqrt{x^2+y^2}$ y $z(t) = z$. Utilizando que α es un homemorfismo podemos escribir t en función de $\sqrt{x^2+y^2}$ y de z y, por tanto, en función de x, y, z.

Ahora, sabemos que $\theta = \arctan(x/y)$, pero hay problemas con $y = 0$. Distinguiremos dos casos:

1. $J_2 = (-\pi, \pi)$. Usando

$$\begin{aligned}\tan(\theta/2) &= \frac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)} = \frac{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}{2\cos^2(\theta/2)} = \frac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta/2)+1-\sin^2(\theta/2)} \\ &= \frac{\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)} = \frac{y/r(t)}{1+x/r(t)} = \frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\theta = 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

y esta función es continua porque el denominador es igual a $r(t)(1+\cos\theta)$, que es no nulo en J_2.

2. $J_2 = (0, 2\pi)$. Usando

$$\begin{aligned}\cot(\theta/2) &= \frac{\sin(\theta)}{1-\cos(\theta)} = \frac{y/r(t)}{1-x/r(t)} \\ &= \frac{y}{-x+\sqrt{x^2+y^2}}\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\theta = 2\,\mathrm{arccot}\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

y esta función es continua porque el denominador es no nulo en J_1.

Finalmente, tener en cuenta que $\{X(I_\lambda \times J_1), X(I_\lambda \times J_2)\}_{\lambda\in A}$ recubren la superficie de revolución.

Nota 3.4. *Notar que* $X(I_\lambda \times J_1) = S - \{\alpha(I)\}$

Ejemplo 3.5. Toro de revolución.

Sea $\alpha(t) = (R+r\cos t, 0, r\sin t)$*, la circunferencia de radio* r *con centro* $(R,0,0)$*, donde* $R > r$*. Notar que la traza de* α *está contenida en el plano* $y = 0$ *y que dicha traza no corta el eje OZ. Además, como el eje OZ está contenido en el plano* $y = 0$ *podemos considerar la superficie de revolución rotando la circunferencia alrededeor del eje OZ*

$$X\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, X(t,\theta) = ((R+\cos t)\cos\theta, (R+\cos t)\sin\theta, r\sin t).$$

Aunque la circunferencia no es homeomorfa a un intervalo abierto, todo punto de la misma posee un entorno que es homeomorfo a un intervalo abierto. Estudiando *la curva, llegamos a que los entornos coordenados*

$$\begin{array}{l} X((0,2\pi)\times(0,2\pi)) \\ X((-\pi,\pi)\times(-\pi,\pi)) \\ X((-\pi/2,5\pi/2)\times(\pi,5\pi/2)) \end{array}$$

cubren todo el toro de revolución.

Nota 3.6. *Hacemos notar que el toro de revolución se puede obtener como la superficie de nivel* $F^{-1}(r^2)$*, donde* F *es la aplicación diferenciable.*

$$F(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2-R} + z^2.$$

4. Funciones diferenciables

En esta sección veremos como extender la noción de funciones diferenciables, definidas en abiertos de espacios euclídeos, a superficies regulares.

Definición 4.1. *Sea* $f\colon V \subseteq S \to \mathbb{R}^n$ *una función definida en un abierto* V *de una superficie regular* S*. La función* f *se dice* ***diferenciable en*** $p \in S$ *si, para alguna parametrización local* $X\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ *con* $p \in X(U) \subseteq V$*, la composición* $f \circ X\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ *es diferenciable en* $X^{-1}(p)$*.*

f *es* ***diferenciable*** *en* U *si es diferenciable en* p*, para todo* $p \in V$*.*

Nota 4.2. *1.* f *no depende de la parametrización local* $X\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$*. Si tomamos* $Y: W \to S$*,*

$$f \circ Y = (f \circ X) \circ (X^{-1} \circ Y)$$

es diferenciable por el Teorema 2.3.

2. Si f *es diferenciable entonces* f *es continua. De hecho, como* $f \circ X$ *es diferenciable, para una* $X: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$*, entonces* $f \circ X$ *es continua, y además* X^{-1} *también lo es (*X *es un homeomorfismo) con lo que* $f = (f \circ X) \circ X^{-1}$ *es continua.*

Ejemplos 4.3. *1. Sea* S *una superficie regular y* $O \subseteq R^3$ *un abierto de* $\mathbb{R}^3$ *con* $S \subset O$*. Si* $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^m$ *es diferenciable, entonces* $f_{|S}\colon S \to \mathbb{R}^m$ *es diferenciable.*

2. La inclusión, $i\colon S \to \mathbb{R}^3$*, que es la restricción de la identidad* $Id\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*.*

3. Si $v \in \mathbb{R}^3$*, la* ***función altura***

$$\begin{array}{rccl} h: & S \to & \mathbb{R} & \\ & p & \mapsto & h(p) := p \cdot \vec{n}, \end{array}$$

que da la altura de $p \in S$ *relativa al plano normal a* $\vec{n}$ *pasando por el origen, es una función diferenciable.*

Más generalmente, $h(p) := (p-p_0)\cdot\vec{n}$ *es la función diferenciable que da la altura de* $p \in S$ *respecto al plano* $(x-p_0)\cdot\vec{n} = 0$*.*

3. Si $p_0 \in \mathbb{R}^3$*, la* ***función distancia al cuadrado*** $f(p) = ||p-p_0||^2$ *es una función diferenciable (tomamos la norma al cuadrado porque* $||p-p_0||$ *no es diferenciable en* $p = p_0$*.*

La definición anterior de diferenciabilidad se puede extender a aplicaciones entre superficies.

Definición 4.4. *Dadas S_1 y S_2 superficies regulares y $W \subseteq S_1$ un abierto de S_1. Una aplicación continua $\varphi\colon W \subseteq S_1 \to S_2$ se dice que es **diferenciable en** $p \in S_1$, si existen parametrizaciones locales $X_1\colon U_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to S_1$ y $X_2\colon U_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \to S_2$, con $p \in X(U_1)$ y $\varphi(X_1(U_1)) \subseteq X_2(U_2)$, satisfaciendo*

$$X_2^{-1} \circ \varphi \circ X_1\colon U_1 \to U_2$$

es diferenciable en $q = X_1^{-1}(p)$.

Nota 4.5. *Notar que, usando el Teorema 2.3, la definición no depende de las parametrizaciones locales elegidas.*

Ejemplo 4.6. *Sean S_1 y S_2 superficies regulares tal que S_1 está contenida en un abierto $O \subseteq \mathbb{R}^3$. Si existe $\varphi\colon O \to \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi(S_1) \subset S_2$, entonces $\varphi_{|S_1}\colon S_1 \to S_2$ es diferenciable. De hecho si $p \in S_1$, tomando parametrizaciones locales $X_1\colon U_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to S_1$ y $X_2\colon U_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \to S_2$ con $p \in X_1(U_1)$ y $\varphi(X_1(U_1)) \subseteq X_2(U_2)$, la composición*

$$X_2^{-1} \circ \varphi \circ X_1$$

es diferenciable.

Definición 4.7. *$\varphi\colon S_1 \to S_2$ es un **difeomorfismo** si φ es diferenciable, biyectiva y $\varphi^{-1}\colon S_2 \to S_1$ es diferenciable. En ese caso se dice que S_1 y S_2 son **difeomorfas**.*

Ejemplo 4.8. *Dada una parametrización local $X\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$, las aplicaciones X y $X^{-1}\colon X(U) \to U$ son diferenciables y, por tanto, X es un difeomorfismo.*

5. Plano tangente. Diferencial de una función

En esta sección definiremos el análogo a la recta tangente de una curva y que será la aproximación lineal a una superficie.

Definición 5.1. *Sea S una superficie regular y $p \in S$. Un vector $v \in \mathbb{R}^3$ se dice que es un **vector tangente** a S en p si existe una curva diferenciable $\alpha\colon (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(-\epsilon, \epsilon) \subset S$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. El conjunto,*

$$T_pS := \{v \in \mathbb{R}^3 \,|\, v \text{ vector tangente a } S \text{ en } p\}$$

*se denomina **plano tangente** a S en p.*

Proposición 5.2. *Sea S una superficie regular, $p \in S$, $X\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ una parametrización de S con $p \in X(U)$. Entonces,*

$$T_pS = (dX)_{X^{-1}(p)}(\mathbb{R}^2).$$

Demostración. Si $w \in \mathbb{R}^2$, construimos la curva

$$\begin{array}{rccl} \beta\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & X^{-1}(p) + tw. \end{array}$$

β es una curva diferenciable con $\beta(0) = X^{-1}(p)$ y $\beta'(0) = w$.

Por tanto, la curva $\alpha = X \circ \beta$ es diferenciable, $\alpha(0) = p$ y

$$\alpha'(0) = dX_{X^{-1}(p)}(\beta'(0)) = dX_{X^{-1}(p)}(w).$$

Así, todo vector de la imagen de $dX_{X^{-1}(p)}$ se puede ver como un vector tangente $\alpha'(0)$.

Recíprocamente, si $v \in T_pS$ existe una curva α con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. Por continuidad podemos suponer que $\alpha(-\epsilon, \epsilon)$ está contenido en $X(U)$. Definiendo $\beta = X^{-1} \circ \alpha$ (o, equivalentemente, $\alpha = X \circ \beta$) se tiene que β es diferenciable ya que es composición de diferenciables, $\beta(0) = X^{-1}(p)$ y

$$\alpha'(0) = dX_{X^{-1}(p)}(\beta'(0))$$

con lo que todo vector tangente está en la imagen de $dX_{X^{-1}(p)}$ $\square$

Nota 5.3. *1. De la proposición anterior, T_pS es un espacio vectorial y $\{\frac{\partial X}{\partial u}_{|X^{-1}(q)} = dX_{X^{-1}(q)}(1,0), \frac{\partial X}{\partial v}_{|X^{-1}(q)} = dX_{X^{-1}(q)}(0,1)\}$ es una base (recordar que estos vectores son independientes porque dX es de rango 2).*

Geométricamente, T_pS se identifica con el plano afín que pasa por p y tiene espacio vectorial asociado $dX_{X^{-1}(q)}$.

2. Si $\alpha\colon I \to S$ es una curva diferenciable con $\alpha(I) \subseteq X(U)$, siendo $X\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ una parametrización local, entonces existen $u, v\colon I \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables tales que $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ para todo $t \in I$. En efecto, si $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ es diferenciable, entonces

$$X^{-1} \circ \alpha = (\pi \circ X)^{-1} \circ (\pi \circ X) \circ X^{-1} \circ \alpha = (\pi \circ X)^{-1} \circ (\pi \circ \alpha)$$

es diferenciable, con lo que $X^{-1} \circ \alpha(t) = (u(t), v(t))$ con $u(t)$ y $v(t)$ diferenciables. Por tanto, $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$.

Usando que $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, por la regla de la cadena,

$$\alpha'(0) = \frac{du}{dt}_{|t=0} \frac{\partial X}{\partial u}_{|X^{-1}(q)} + \frac{dv}{dt}_{|t=0} \frac{\partial X}{\partial v}_{|X^{-1}(q)}.$$

De la nota anterior, surge la pregunta siguiente ¿Quiénes son las curvas que determinan $\frac{\partial X}{\partial u}_{|X^{-1}(q)}$ y $\frac{\partial X}{\partial v}_{|\ X^{-1}(q)}$?

Definición 5.4. *Dada una superficie regular S, $p \in S$ y $X\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ una parametrización local de S tal que $X(u_0, v_0) = p$*

- *La* ***curva coordenada*** *$v = v_0$ (también llamada u-curva a través de p), viene dada por*

  $$\alpha(u) = X(u, v_0)$$

  y tiene vector velocidad en $p = \alpha(u_0)$ al vector

  $$X_u(u_0, v_0) = \frac{\partial X}{\partial u}_{|(u_0,v_0)}$$

- *La* ***curva coordenada*** $u = u_0$ *(también llamada v-curva a través de p), viene dada por*

$$\beta(v) = X(u_0, v)$$

y tiene vector velocidad en $p = \beta(v_0)$ *al vector*

$$X_v(u_0, v_0) = \frac{\partial X}{\partial v}_{|(u_0,v_0)}$$

Ejemplos 5.5. 1. Plano

Dado el plano $S = \{(x - p_0) \cdot \vec{n} = 0\}$*, cualquier curva* α *contenida en el plano cumple la ecuación*

$$(\alpha(t) - p_0) \cdot \vec{n} = 0$$

Derivando, si $\alpha'(0) = \vec{v}$*, entonces* $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$*. Así,*

$$T_pS = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{v} \cdot \vec{n} = 0\}.$$

Por otra parte, si el plano pasa por el punto p_0 *y tiene como vectores directores* $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$*, existe una parametrización* $X\colon \mathbb{R}^2 \to S$ *dada por*

$$X(u, v) = p + u\vec{w}_1 + v\vec{w}_2,$$

con lo que los elementos de una base de T_pS *serán* $\frac{\partial X}{\partial u}_{|(u_0,v_0)} = \vec{w}_1$ *y* $\frac{\partial X}{\partial v}_{|(u_0,v_0)} = \vec{w}_2$*.*

2. Esfera

Dada la esfera $S = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$*, dada una curva* $\alpha\colon I \to S^2$ *con* $\alpha(0) = p$ *y* $\alpha'(0) = v$*, si* $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ *entonces*

$$x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) = 1.$$

Derivando esta ecuación,

$$0 = 2x(0)x'(0) + 2y(0)y'(0) + 2z(0)z'(0) = 2p \cdot v.$$

En conclusión,

$$T_pS^2 = \{\ \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \,|\, \vec{v} \cdot p = 0\} \tag{1}$$

3. Superficies de nivel

Sea $S = F^{-1}(a)$ *con* $f\colon O \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *satisfaciendo* $dF_{|p} \neq (0, 0, 0)$*. Veremos que* $T_pS = Ker\ dF_{|p}$*.*

Si α *es una curva con* $\alpha(0) = p$ *y* $\alpha'(0) = \vec{v}$ *entonces, como* $(F \circ \alpha)(t) = a$ *para todo* $t \in I$*,*

$$dF_{|p}(\vec{v}) = \frac{d}{dt}_{|t=0}(F \circ \alpha) = 0,$$

con lo que $\vec{v} \in Ker\ dF_{|p}$*. Además, usando que* $dim\, T_pS = dim\ Ker\ dF_{|p}$*, se concluye la igualdad.*

Definición 5.6. *Sea S una superficie regular y $f\colon S \to \mathbb{R}^n$ una función diferenciable. Si $p \in S$, la* ***diferencial de** f **en*** p *es la aplicación lineal*

$$\begin{array}{rccl} df_{(p)}: & T_pS & \to & \mathbb{R}^n \\ & \vec{v} & \mapsto & df_{(p)}(\vec{v}) = (f\circ\alpha)'(0) \end{array}$$

para $\vec{v} = \alpha'(0)$.

Nota 5.7. *$df_{(p)}(\vec{v})$ se llama también la derivada direccional de f en la dirección de $\vec{v}$.*

Proposición 5.8. *Sea $f\colon S \to \mathbb{R}^n$ una función diferenciable.*

1. *$df_{(p)}(\vec{v})$ no depende la α elegida.*
2. *$df_{(p)}(\vec{v})$ es una aplicación lineal.*

Demostración. Si $X\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ es una parametrización local, hemos visto que

$$T_pS = (dX)_q(\mathbb{R}^2).$$

con $X^{-1}(p) = q$, es decir $(dX)_q\colon \mathbb{R}^2 \to T_pS$ es un isomorfismo lineal. Además, si $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ entonces

$$\vec{v} = \alpha'(0) = u'(0)\frac{\partial X}{\partial u}_{|q} + v'(0)\frac{\partial X}{\partial v}_{|q} = v_1\frac{\partial X}{\partial u}_{|q} + v_2\frac{\partial X}{\partial v}_{|q},$$

y (v_1, v_2) no depende de α. Por tanto,

$$\begin{aligned} df_{(p)}(v) &= (f\circ\alpha)'(0) = \frac{d}{dt}_{|t=0}((f\circ X)(u(t), v(t))) \\ &= u'(0)\frac{\partial(f\circ X)}{\partial u}_{|q} + v'(0)\frac{\partial(f\circ X)}{\partial v}_{|q} \\ &= v_1\frac{\partial(f\circ X)}{\partial u}_{|q} + v_2\frac{\partial(f\circ X)}{\partial v}_{|q}, \end{aligned}$$

de donde se concluye que $df_{(p)}$ no depende de la elección de α y es lineal. □

Ejemplos 5.9. 1. Función altura: $h(p) = (p - p_0)\cdot\vec{a}$

$$df_{(p)}(\vec{v}) = \vec{v}\cdot\vec{a}.$$

2. Función cuadrado de la distancia: $f(p) = ||p - p_0||^2$

$$df_{(p)}(\vec{v}) = 2\vec{v}\cdot(p - p_0).$$

Proposición 5.10. *Sea S una superficie regular conexa y $f\colon S \to \mathbb{R}^n$ una función diferenciable. Si se cumple que $df_{(p)} \equiv 0$, para todo $p \in S$, entonces $f = cte$.*

Demostración. Dado $a \in f(S)$, definimos el conjunto

$$A = \{p \in S \mid f(p) = a\}.$$

$A = f^{-1}(a)$ es cerrado en S. Por otra parte, dado $p \in A$, tomando una parametrización local $X\colon U \to S$, con U_p conexo y $p = X(u_0, v_0) \in X(U_p)$, y usando que $T_pS = (dX)_q(\mathbb{R}^2)$, se deduce que la función $f \circ X\colon U \to \mathbb{R}^n$ satisface

$$d(f \circ X)_{(u,v)} = 0, \qquad ((u,v) \in U_p).$$

Por tanto, $f \circ X = cte$, es decir, $f(X(u,v)) = f(X(u_0,v_0)) = f(p) = a$. Así, $X(U_p) \subset A$ y A es abierto.

Como S es conexo, concluimos que $A = S$ ($A \neq \emptyset$ ya que $a \in f(S)$). $\square$

Nota 5.11. *También se puede definir, dada una aplicación diferenciable $\varphi\colon S_1 \to S_2$, la diferencial $d\varphi_{(p)}\colon T_pS_1 \to T_{\varphi(p)}S_2$ como*

$$d\varphi_{(p)}(\alpha'(0)) = \frac{d}{dt}_{|t=0}(\varphi \circ \alpha)$$

Si $X_1\colon U_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \to S_1$ y $X_2\colon U_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \to S_2$ son parametrizaciones locales y $\tilde{\varphi}(u,v) = (X_2^{-1} \circ \varphi X_1) = (f_1(u,v), f_2(u,v))$, se tiene que

$$d\varphi_{(p)}(\alpha'(0)) = \Big(\frac{\partial f_1}{\partial u}u'(0) + \frac{\partial f_1}{\partial v}v'(0), \frac{\partial f_2}{\partial u}u'(0) + \frac{\partial f_2}{\partial v}v'(0)\Big).$$

De forma matricial,

$$d\varphi_{(p)}(\alpha'(0)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix}$$

6. Primera forma fundamental

Definición 6.1. *Dada S una superficie regular y $p \in S$, la **primera forma fundamental** de S en p, denotada por I_p, es la restricción del producto escalar de $\mathbb{R}^3$ a T_pS, es decir,*

$$\begin{array}{rccl} I_p: & T_pS \times T_pS & \to & \mathbb{R} \\ & (\vec{w}, \vec{z}) & \mapsto & I_p(\vec{w}, \vec{z}) = \vec{w} \cdot \vec{z} \end{array}$$

Nota 6.2. *Si $X\colon U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ es una parametrización local,*

$$\begin{array}{l} \vec{w} = w^1 X_u(u_0,v_0) + w^2 X_v(u_0,v_0) \\ \vec{z} = z^1 X_u(u_0,v_0) + z^2 X_v(u_0,v_0) \end{array}$$

y la primera forma fundamental viene dada por

$$\begin{array}{rcl} I_p(\vec{w}, \vec{z}) & = & \Big(w^1 X_u(u_0,v_0) + w^2 X_v(u_0,v_0)\Big) \cdot \Big(z^1 X_u(u_0,v_0) + z^2 X_v(u_0,v_0)\Big) \\ & = & w^1 z^1 X_u(u_0,v_0) \cdot X_u(u_0,v_0) + w^1 z^2 X_u(u_0,v_0) \cdot X_v(u_0,v_0) \\ & & + w^2 z^1 X_v(u_0,v_0) \cdot X_u(u_0,v_0) + w^2 z^2 X_v(u_0,v_0) \cdot X_v(u_0,v_0) \\ & = & w^1 z^1 g_{11}(u_0,v_0) + w^1 z^2 g_{12}(u_0,v_0) + w^2 z^1 g_{21}(u_0,v_0) + w^2 z^2 g_{22}(u_0,v_0) \end{array}$$

Los valores $g_{ij}(u_0, v_0)$ se denominan los ***coeficientes métricos*** *de S relativos a X. La matriz*

$$\begin{pmatrix} g_{11}(u_0,v_0) & g_{12}(u_0,v_0) \\ g_{21}(u_0,v_0) & g_{22}(u_0,v_0) \end{pmatrix}$$

es la restricción de la matriz métrica del producto escalar de $\mathbb{R}^3$ restringido a T_pS relativo a la base $\{X_u(u_0,v_0), X_v(u_0,v_0)\}$,

$$I_p\Big((w^1,w^2),(z^1,z^2)\Big) = (w^1 w^2) \begin{pmatrix} g_{11}(u_0,v_0) & g_{12}(u_0,v_0) \\ g_{21}(u_0,v_0) & g_{22}(u_0,v_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix}$$

Notar que la matriz es simétrica ($g_{12} = g_{21}$) y definida positiva: $g_{11} > 0$ y

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} &= ||X_u||^2||X_v||^2 - |X_u \cdot X_v|^2 \\ &= ||X_u||^2||X_v||^2 \left(1 - \left(\frac{X_u \cdot X_v}{||X_u||\,||X_v||}\right)^2\right) > 0 \end{aligned}$$

Ejemplos 6.3. 1. Plano

Si un plano pasa por el punto p_0 y tiene como vectores directores $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$, existe una parametrización $X\colon \mathbb{R}^2 \to S$ dada por

$$X(u,v) = p + u\vec{w}_1 + v\vec{w}_2,$$

con lo que los elementos de una base de T_pS serán $X_u(u_0,v_0) = \vec{w}_1$ y $X_v(u_0,v_0) = \vec{w}_2$, entonces

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1 & \vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 \\ \vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 & \vec{w}_2 \cdot \vec{w}_2 \end{pmatrix}.$$

Si la base $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ es ortonormal

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Esfera

Tomando la parametrización local

$$X(\theta,\varphi) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$$

se tiene que

$$\begin{aligned} X_\theta &= (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta) \\ X_\varphi &= (-\sin\theta\sin\varphi, \sin\theta\cos\varphi, 0) \end{aligned}$$

y la matriz métrica viene dada por

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

con lo que la norma de un vector $\vec{w}$ es

$$||\vec{w}||^2 = ||aX_\theta + bX_\varphi||^2 = a^2 + b^2\sin^2\theta.$$