GEOMETRÍA DIFERENCIAL DE CURVAS Y SUPERFICIES

TEMA 2 - TRIEDRO DE FRENET. CURVATURA Y TORSIÓN

M. C. GONZÁLEZ DÁVILA, I. GUTIÉRREZ SAGREDO, D. IGLESIAS PONTE

Dpto. Matemáticas Estadística e Investigación Operativa

Universidad de La Laguna

1. Introducción

Dada una curva parametrizada en el espacio, en este tema construiremos un sistema de referencia móvil que estará adaptado a la curva. Dicho sistema de referencia nos permitirá construir dos invariantes fundamentales a la curva: la curvatura y la torsión. Terminaremos probando que dichas funciones determinan la curva en el espacio.

2. Curvatura

En un cierto sentido, una línea recta es una curva que no cambia de dirección. De hecho, vimos en el Tema 1 que las rectas son las curvas en las que el vector velocidad es constante. Por tanto, es de esperar que la variación en la dirección del vector velocidad medirá cuánto se aleja una curva de ser una línea recta. Como la longitud no es un factor a tener en cuenta, junto con el hecho de que el vector velocidad no es un invariante geométrico consideraremos primero un vector unitario proporcional al tangente.

Definición 2.1. *Dada una curva parametrizada $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$, el **vector tangente** a α en t se define como*

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{||\alpha'(t)||}$$

El vector tangente T en cada punto t permite definir una función $T\colon I \to \mathbb{R}^3$. Se tiene que si α es de clase C^k entonces T es de clase C^{k-1}.

Proposición 2.2. *El vector tangente es un invariante geométrico orientado*

Demostración. Si $\beta = \alpha \circ g$ entonces

$$T_\beta(u) = \frac{\beta'(u)}{||\beta'(u)||} = \frac{g'(u)\alpha'(t))}{||g'(u)\alpha'(t)||} = signo(g'(u))T_\alpha(g(u)).$$

$\square$

Definición 2.3. *Dada una curva parametrizada regular $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$, se define la curvatura de α en el punto t*

$$\kappa(t) = \frac{||T'(t)||}{||\alpha'(t)||} \tag{1}$$

Nota 2.4. *Notar que si α está parametrizada por el parámetro arco ($||\alpha'|| = 1$), entonces*

$$\kappa(t) = ||T'(t)|| = ||\alpha''(t)||.$$

Proposición 2.5. *La curvatura es un invariante geométrico.*

Demostración. Si $\beta = \alpha \circ g$, usando la Proposición 2.2

$$\kappa_\beta(u) = \frac{||T'_\beta(u)||}{||\beta'(t)||} = \frac{||signo(g'(u))g'(u)T'_\alpha(g(u))||}{||g'(u)\alpha'(g(u))||} = \frac{||T'_\alpha(g(u))||}{||\alpha'(g(u))||} = \kappa_\alpha(g(u))$$

□

Ejemplos 2.6. *1. Dada una recta $\alpha(t) = P + t\vec{v}$, usando que $T_\alpha(t) = \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}$ entonces, $T'_\alpha(t) = 0$. Así*

$$\kappa(t) = 0.$$

2. Dada una circunferencia $\alpha(t) = (a + r\cos t, b + r\,\mathrm{sen}\, t, 0), \qquad t \in \mathbb{R}$,

$$\alpha'(t) = (r\cos(t), -r\sin(t), 0) \qquad T_\alpha(t) = (-\,\mathrm{sen}\, t, \cos t, 0)$$

con lo que

$$\kappa(t) = \frac{||(-\cos t, \mathrm{sen}\, t, 0)||}{r} = \frac{1}{r}$$

3. Si $\alpha(t) = (t, f(t), 0)$, se tiene que

$$\kappa(t) = \frac{|f''(t)|}{(1 + (f'(t))^{3/2}}$$

Si suponemos que $f'(t_0) = 0$, entonces $\kappa(t_0) = |f''(t_0)|$, es decir, la curvatura de α es la concavidad (en valor absoluto) de la función f.

Dada una curva parametrizada de clase C^k ($k \geq 2$) regular $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$, la **función curvatura** de α, $\kappa\colon I \to \mathbb{R}$ $t \mapsto \kappa(t)$, es de clase C^{k-2}. Notar que

$$\kappa(t) = 0 \iff T'(t) = \vec{0}$$

Además, se puede probar que

Lema 2.7. *Sea α una curva parametrizada regular. Entonces, $T'(t) \neq \vec{0}$ si y sólo si los vectores $\alpha'(t)$ y $\alpha''(t)$ son linealmente independientes.*

Demostración. Como $T(t) = \frac{\alpha'(t)}{||\alpha'(t)||}$ se tiene que $||\alpha'(t)||T(t) = \alpha'(t)$. Derivando,

$$\alpha''(t) \;=\; (||\alpha'(t)||)'\frac{\alpha'(t)}{||\alpha'(t)||} + ||\alpha'(t)||T'(t) \tag{2}$$

Por tanto, si $T'(t) = 0$ entonces, de (2), α'' y α' son linealmente dependientes.

Recíprocamente, si α' y α'' son linealmente dependientes, $\alpha'' = \lambda\alpha'$ y, usando (2),

$$T' \text{ y } \alpha' \text{ son linealmente dependientes.}$$

Pero, por otra parte, como T es unitario, derivando la ecuación $T \cdot T = 1$ se deduce que

$$T \cdot T' = 0.$$

de lo que concluimos, al ser $\alpha'(t) \neq \vec{0}$, que $T'(t) = 0$. □

El lema anterior motiva la siguiente definición.

Definición 2.8. *Una una curva parametrizada α se dice que es **birregular** si*

a) *α es regular.*
b) *$\kappa(t) \neq 0$, para todo t.*

*En este caso, el plano afín que pasa por $\alpha(t)$ y tiene como vectores directores $\alpha'(t)$ y $\alpha''(t)$ se le denomina **plano osculador** de α en el punto t.*

3. Triedro de Frenet

Definición 3.1. *Sea $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva birregular de clase C^k (con $k \geq 2$). El **vector normal principal** a α en un punto t viene dado por*

$$N(t) = \frac{T'(t)}{||T'(t)||} = \frac{T'(t)}{\kappa(t)||\alpha'(t)||} \tag{3}$$

Si consideramos el vector normal para cada $t \in I$, obtenemos una aplicación $N\colon I \to \mathbb{R}^n$ de clase C^{k-2} .

*La recta que pasa por $\alpha(t)$ y tiene como vector director $N(t)$ se denomina la **recta normal** a α en t.*

Nota 3.2. *De la propia definición, $N(t)$ es un vector unitario paralelo a T'. Además, usando que T es unitario, T' es ortogonal a T y, en consecuencia, N es ortogonal a T.*

Nota 3.3. *Si α está parametrizada por el parámetro arco s entonces*

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\kappa(s)}.$$

Además, en este caso $T = \alpha'$. Así $T' = \alpha''$ y, por tanto,

$$N = \frac{\alpha''}{\kappa}.$$

Proposición 3.4. *Sea $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva birregular. Entonces N es un invariante geométrico.*

Demostración. Si $\beta = \alpha \circ g$ entonces

$$N_\beta(u) = \frac{T'_\beta(u)}{||T'_\beta(u)||} = \frac{signo(g'(u))g'(u)T'_\alpha(g(u))}{||signo(g'(u))g'(u)T'_\alpha(g(u))||} = N_\alpha(g(u)).$$

□

Definición 3.5. *Sea $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva birregular de clase C^k (con $k \geq 2$). El* ***vector binormal*** *$B(t)$ a α en un punto t está dado por*

(4) $$B(t) = T(t) \times N(t).$$

Si consideramos la aplicación $B\colon I \to \mathbb{R}^3$, se tiene que es de clase C^{k-2}.

La ***recta binormal*** *de α en t es la recta que pasa por $\alpha(t)$ y tiene como vector director $B(t)$.*

Proposición 3.6. *Sea α una curva parametrizada birregular. Entonces, B es un invariante geométrico orientado.*

Demostración. Si $\beta = \alpha \circ g$ entonces

$$B_\beta(u) = T_\beta(u) \times N_\beta(u) = signo(g'(u))T_\alpha(g(u)) \times N_\alpha(g(u)) = signo(g'(u))B_\alpha(g(u)).$$

□

Definición 3.7. *Dada una curva $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ birregular, el triple $T, N, B\colon I \to \mathbb{R}^3$ tal que para cada $t \in I$ define la base ortonormal orientada positivamente*

$$\{T(t), N(t), B(t)\}$$

se denomina el ***Triedro de Frenet*** *de α en $\mathbb{R}^3$.*

Los planos coordenados por $\alpha(t)$ y perpendiculares a $B(t)$ (respectivamente, $T(t)$ y $N(t)$) se denominan plano osculador (respectivamente, normal y rectificante).

Nota 3.8. *Las aplicaciones $T, N, B\colon I \to \mathbb{R}^3$ se denominan también indicatrices esféricas porque su imagen está contenida en la esfera unidad $\mathbb{R}^3$.*

Ejemplo 3.9. *Sea la circunferencia de centro (a, b) y radio r:*

$$\alpha(t) = (a + r\cos t, b + r \operatorname{sen} t, 0), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Sabemos que $\alpha'(t) = (r\cos(t), -r\sin(t), 0)$. Por tanto, $||\alpha'(t)|| = r$ y

$$T(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 0) \Rightarrow T'(t) = (-\cos t, \operatorname{sen} t, 0) \neq (0,0,0) \Rightarrow \alpha \text{ birregular}$$

Calculamos ahora el vector normal

$$N(t) = \frac{T'}{||T'||} = (-\cos t, -\sin t, 0)$$

y el vector binormal

$$B(t) = T(t) \times N(t) = (0, 0, 1).$$

En este caso, el plano osculador $((x, y, x) - \alpha(t)) \cdot B(t) = 0$ es el plano $z = 0$ para todo t.

4. Torsión

Dada una curva birregular α con triedro de Frenet $\{T, N, B\}$, hemos visto que el polinomio de Taylor de segundo orden de α es una curva plana que vive dentro del plano osculador, cuyo vector normal es el binormal $B(t)$. Por tanto, es de esperar que la variación del vector binormal mida el hecho de que α está contenida en un plano. En efecto,

Proposición 4.1. *Dada una curva birregular α, se tiene que α es plana si y sólo si $B = cte.$ es decir, $B'(t) \equiv 0$.*

Demostración. Si α es plana y está contenida en un plano π, $\alpha(t_1) \in \pi$. Además, usando que $\frac{\alpha(t_1)-\alpha(t_2)}{t_1-t_2}$ es un vector director de π, pasando al límite (cuando t_1 tiende a t_2), se deduce que $\alpha'(t_1)$ es un vector director de π. Análogamente, $\alpha''(t_1)$ es un vector director de π. Por tanto, π debe ser el plano osculador a α en t_1.

Por otra parte, como B es un vector unitario perpendicular al plano osculador, entonces $B(t)$ debe ser constante, esto es, $B'(t) = 0$, para todo t.

Recíprocamente, si $B'(t) = 0$ para todo t, entonces $B(t)$ es constante e igual a $B(t_0)$, $t_0 \in I$. Veamos que α está contenida en el plano osculador a α en t_0. Para ello, definimos la función $f\colon I \to \mathbb{R}^3$,

$$f(t) = (\alpha(t) - \alpha(t_0)) \cdot B(t_0).$$

La función f es diferenciable y $f'(t) = \alpha'(t) \cdot B(t_0) = ||\alpha'(t)||T(t) \cdot B(t) = 0$. En consecuencia $f(t) = cte.$ y, como $f(t_0) = 0$, la función f es identicamente nula, es decir, $\alpha(t)$ pertenece al plano osculador. □

El resultado anterior sugiere que la derivada del vector binormal debe medir cuánto lejos está una curva de ser plana. Si queremos escribir B' en términos de la base $\{T, N, B\}$, como B es unitario, entonces $B' \cdot B = 0$. Por otra parte, derivando en la definición de $B = T \times N$

$$B' = (T \times N)' = T' \times N + T \times N'.$$

De la definición de N, se tiene que N es paralelo a T', con lo que $B' = T \times N'$. Por tanto, B' es perpendicular a T y B' es un múltiplo de N.

Definición 4.2. *Sea $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ una curva birregular de clase C^k ($k \geq 3$). La **torsión** de α es la función $\tau\colon I \to \mathbb{R}$ de clase C^{k-3} definida por*

$$\tau(t) = -\frac{B' \cdot N}{||\alpha'||}$$

Proposición 4.3. *τ es un invariante geométrico.*

Demostración.

$$\tau_\beta(u) = -\frac{B'_\beta(u) \cdot N_\beta(u)}{||\beta'(u)||} = -\frac{signo(g'(u))g'(u)B'_\alpha(g(u)) \cdot N_\alpha(g(u))}{||g'(u)\alpha'(g(u))||} = \tau_\alpha(g(u)).$$

□

De la proposición 4.1 y la definición de torsión se tiene que la torsión va a medir cuánto se aleja una curva de ser plana.

Corolario 4.4. *Dada una curva birregular α, se tiene que α es plana si y sólo si la torsión es identicamente nula ($\tau \equiv 0$).*

5. Ecuaciones de Frenet-Serret

Al igual que en la sección anterior, usando que el triedro de Frenet $\{T, N, B\}$ determina una base para todo $t \in I$, vamos a describir las derivadas T', N', B' en términos de dicha base.

Primero, de la definición de B y de N,

$$T' = ||\alpha'||\kappa N$$

y

$$B' = -||\alpha'(t)||\tau(t)N(t)$$

Usando estas relaciones y que $N = B \times T$,

$$\begin{aligned} N' &= (B' \times T) + (B \times T') = (-||\alpha'(t)||\tau(t)N(t)) \times T + B \times (||\alpha'||\kappa N) \\ &= ||\alpha'(t)||\tau B - ||\alpha'||\kappa T \end{aligned}$$

Por tanto, las **ecuaciones de Frenet-Serret** son

$$\left\{ \begin{array}{l} T' = ||\alpha'||\kappa N \\ N' = ||\alpha'||(-\kappa T + \tau B) \\ B' = -||\alpha'||\tau N \end{array} \right. \tag{5}$$

Nota 5.1. *Si la curva está parametrizada con el parámetro arco, las ecuaciones de Frenet-Serret quedan*

$$\left\{ \begin{array}{l} T' = \kappa N \\ N' = -\kappa T + \tau B \\ B' = -\tau N \end{array} \right.$$

Fórmulas generales. Si α es una curva parametrizada birregular, entonces la torsión y la curvatura vienen dadas por las siguientes expresiones

$$\kappa(t) = \frac{||\alpha'(t) \times \alpha''(t)||}{||\alpha'(t)||^3} \qquad \tau(t) = \frac{(\alpha'(t) \times \alpha''(t)) \cdot \alpha'''(t)}{||\alpha'(t) \times \alpha''(t)||^2}$$

y el triedro de Frenet

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{||\alpha'(t)||}$$

$$B(t) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{||\alpha'(t) \times \alpha''(t)||}$$

$$N(t) = B(t) \times T(t) = \frac{1}{||\alpha'(t) \times \alpha''(t)||}\Big(\alpha''(t)||\alpha'(t)|| - \frac{(\alpha'(t) \cdot \alpha''(t))}{||\alpha'(t)||}\alpha'(t)\Big)$$

Ejemplo 5.2. *Dada la hélice general,*

$$\alpha(t) = (r\cos t, r \operatorname{sen} t, bt), \qquad t \in \mathbb{R}, \ \text{con } r > 0,$$

usando las fórmulas anteriores,

$$\kappa(t) = \frac{r}{r^2 + b^2}$$

$$\tau(t) = \frac{b}{r^2 + b^2}$$

Generalizando las hélices circulares del ejemplo anterior tenemos la siguiente familia de curvas.

Definición 5.3. *Una curva parametrizada regular α se dice que es **hélice general** si existe un vector unitario fijo $\vec{u}$ tal que el ángulo que forman los vectores tangentes con esta dirección fija es constante. Esto es,*

$$ang(T, \vec{u}) = cte \Leftrightarrow \cos(T, \vec{u}) = T \cdot \vec{u} = \cos\theta$$

*para algún θ constante. A $\vec{u}$ se le denomina el **eje** de la hélice.*

Notar que cualquier curva plana es una hélice porque cualquier vector unitario perpendicular al plano que contiene a la traza forma un ángulo de $\pi/2$ con los vectores tangentes. Si la curvatura no se anula, el eje coincide, salvo el signo, con el vector binormal. Veamos ahora una caracterización de las hélices generales en términos de la curvatura y la torsión.

Teorema 5.4 (Teorema de Lancret)**.** *Sea α una curva parametrizada birregular. Se tiene que α es una hélice general si y sólo si existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{\tau}{\kappa} = c$. En ese caso, el eje $\vec{u}$ viene dado por*

$$\vec{u} = \frac{\tau T + \kappa B}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}$$

o, equivalentemente,

$$\vec{u} = \frac{\frac{\tau}{\kappa} T + B}{\sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2}}$$

Demostración. Supongamos que α es unitaria. Si α es una hélice con eje $\vec{u}$ entonces $T \cdot \vec{u} = \cos\theta$ para algún ángulo fijo θ. Derivando esta expresión

$$0 = (T \cdot \vec{u})' = T' \cdot \vec{u} = \kappa N \cdot \vec{u}.$$

En consecuencia, $N \cdot \vec{u} = 0$. Usando que $\{T, N, B\}$ es una base ortonormal, podemos escribir $\vec{u}$ como

$$\vec{u} = (\vec{u} \cdot T)T + (\vec{u} \cdot B)B = \cos\theta T + \lambda(s)B$$

donde $\lambda(s) = \vec{u} \cdot B$. Usando que $\vec{u}$ es un vector unitario $||\vec{u}|| = \sqrt{\cos^2\theta + \lambda^2(s)} = 1$ y $\lambda(s) = \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta} = \pm \sin\theta$. Por tanto, $\lambda(s) = \vec{u} \cdot B$ es un valor constante (notar que podemos elegir θ para que λ sea igual a $\sin\theta$ ya que si $\lambda = -\sin\theta$ podemos elegir $\theta^* = -\theta$ y, así, $\cos\theta^* = \cos(-\theta) = \cos\theta$ y $\sin\theta^* = -\sin\theta = \lambda$. Así,

$$\vec{u} = \cos\theta T + \sin\theta B$$

Utilizando que $\vec{u}$ es constante

$$0 = \cos\theta T' + \sin\theta B' = \kappa\cos\theta N - \tau\sin\theta N = (\kappa\cos\theta - \tau\sin\theta)N$$

De aquí se deduce que $\kappa\cos\theta = \tau\sin\theta$. Si $\sin\theta = 0$ entonces $\kappa = 0$ lo que contradice la hipótesis. Por tanto, $\sin\theta \neq 0$ y dividiendo entre esta cantidad

$$\tau = c\kappa, \text{ donde } c = \cot\theta.$$

Para probar el recíproco, supongamos que $\tau/\kappa = c$ y tomemos θ tal que $\cot\theta = c$. Elegimos el vector $\vec{u} = \cos\theta T + \sin\theta B$ y comprobemos que $\vec{u}$ es el eje buscado.

i) $\vec{u}$ es un vector constante. Efectivamente, si derivamos

$$\vec{u}' = \cos\theta\kappa N - \sin\theta\tau N = (\cos\theta\kappa - \sin\theta\tau N) = (\cos\theta\kappa - c\kappa\sin\theta)N = 0.$$

ii) $\vec{u}$ es un vector unitario: Trivial.

iii) $T\cdot\vec{u} = \cos\theta = cte$.

Finalmente, como $\theta \in (0,\pi)$ con $\cot\theta = c$. Usando que $\sin\theta \neq 0$

$$\frac{1}{\sin\theta}\vec{u} = \cot\theta T + B = cT + B = \frac{\tau}{\kappa}T + B$$

lo que implica que

$$\frac{\kappa}{\sin\theta}\vec{u} = \tau T + \kappa B.$$

Así

$$\vec{u} = \frac{\tau T + \kappa B}{\sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2}} = \frac{\frac{\tau}{\kappa}T + B}{\sqrt{1 + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2}}$$

□

6. Teorema fundamental de la teoría de curvas

En esta sección veremos que la curvatura y la torsión determinan, salvo movimientos rígidos, cualquier curva en el espacio. Recordemos primero qué es un movimiento rígido y como éste no afecta a la curvatura ni a la torsión.

Definición 6.1. *Un movimiento rígido en $\mathbb{R}^3$ es una aplicación afín $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ biyectiva que preserva las distancias. Matricialmente, $\phi(X) = AX + D$, donde $D = (d_1, d_2, d_3)$ y $A \in O(n)$ ($AA^t = Id$).*

Nota 6.2. *Si $|A| = 1$, se dice que ϕ es directo (o propio). Si $|A| = -1$ se dirá que ϕ es inverso (o impropio).*

Proposición 6.3. *Sea $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ curva parametrizada regular unitaria y $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\phi(X) = AX + D$, un movimiento rígido. Entonces, $\beta\colon I \to \mathbb{R}^3$ definida por $\beta(t) = \phi(\alpha(t))$ cumple*

- *β es una curva parametrizada regular unitaria.*
- $\kappa_\beta = \kappa_\alpha$.
- *Si α es birregular entonces*
  - *Si $|A| = 1$ entonces $\tau_\beta = \tau_\alpha$.*
  - *Si $|A| = -1$ entonces $\tau_\beta = -\tau_\alpha$.*

Demostración. Como toda aplicación afín es diferenciable, β es una curva parametrizada.

Además, se tiene la siguiente relación entre las derivadas consecutivas de β y las de α:

$$\beta^{(k)}(t) = A\alpha^{(k)}(t).$$

De esta igualdad, usando que $|A| \neq 0$, la regularidad de α es equivalente a la de β, así como su carácter unitario. Además, $T_\alpha = T_\beta$, $N_\alpha = N_\beta$ y, en consecuencia, $\kappa_\beta = \kappa_\alpha$.

Para el cálculo de la torsión, notar que $\{T_\beta, N_\beta, B_\beta\}$ es una base orientada positivamente, pero la orientación $\{AT_\alpha, AN_\alpha, AB_\alpha\}$ dependerá del signo de $|A|$. Si $|A| = 1$, entonces $B_\beta = AB_\alpha$ y las torsiones coinciden, pero si $|A| = -1$, entonces $B_\beta = -AB_\alpha$ y $\tau_\beta = -\tau_\alpha$. $\square$

Teorema 6.4. *Sean $\kappa, \tau \colon I \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables (κ de clase C^{k+1} y τ de clase C^k) con $\kappa(t) > 0$ para todo $t \in I$. Entonces, existe $\alpha \colon I \to \mathbb{R}^3$ curva parametrizada regular unitaria (de clase C^{k+3}) tal que κ y τ son las funciones curvatura y torsión, respectivamente.*

Además, si $\beta \colon I \to \mathbb{R}^3$ es otra curva regular y unitaria con $\kappa_\beta = \kappa$ y $\tau_\beta = \tau$ para todo $t \in I$, entonces existe una isometría afín $\phi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\beta = \phi \circ \alpha$.

Demostración. Las ecuaciones de Frenet-Serret (5) son un sistema de ecuaciones diferenciales, con lo que si $s_0 \in I$, y $\{T_0, N_0, B_0 = T_0 \times N_0\}$ es una base ortonormal orientada positivamente, el teorema de existencia de ecuaciones diferenciales nos dice que existe $\{T, N, B \colon I \to \mathbb{R}^3\}$ (con T de clase C^{k+2} y N, B de clase C^{k+1}) cumpliendo (5) y $T(s_0) = T_0, N(s_0) = N_0, B(s_0) = B_0$.

1) Veamos que $\{T(s), N(s), B(s)\}$ es una base ortonormal para todo $s \in I$. Si consideramos

$$M(s) = \begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{pmatrix}^t$$

tenemos que

$$\begin{aligned} M'(s) &= \begin{pmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{pmatrix}^t + \begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{pmatrix}^t \\ &= A(s) \begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{pmatrix}^t - \begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{pmatrix}^t A(s) \\ &= A(s)M(s) - M(s)A(s), \end{aligned}$$

donde $A(s) = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & \end{pmatrix}$.

Como la matriz identidad Id es solución de la ecuación diferencial

$$M'(s) = A(s)M(s) - M(s)A(s)$$

con condición inicial $M(s_0) = Id$, de la unicidad de la solución de la ecuación diferencial, se tiene que

$$\begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{pmatrix}^t = Id.$$

Por otra parte, $\{T(s), N(s), B(s)\}$ está orientada positivamente por continuidad, ya que

$$\begin{vmatrix} T(s_0) \\ N(s_0) \\ B(s_0) \end{vmatrix} = 1$$

y

$$\begin{vmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{vmatrix} = \pm 1$$

Definimos ahora $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ por

$$\alpha(s) = \int_{s_0}^{s} T(t)\mathrm{d}t.$$

α es una curva parametrizada de clase C^{k+3} satisfaciendo $\alpha'(s) = T(s)$. Así, α es regular y unitaria ($||T(s)||_\alpha = ||T(s)|| = 1$) con vector tangente $T(s)$. Además, de (5),

$$\kappa_\alpha = ||T'_\alpha(s)|| = ||T'(s)|| = \kappa(s)$$

y

$$\tau_\alpha = -B'_\alpha(s) \cdot N_\alpha(s) = -B'(s) \cdot N(s) = \tau$$

Veamos ahora que si existe una curva $\beta\colon I \to \mathbb{R}^3$ tal que $\kappa_\beta = \kappa$ y $\tau_\beta = \beta$ entonces existe un movimiento rígido ϕ tal que $\beta = \phi \circ \alpha$.

Sea $A \in SO(n)$ la matriz cambio de base de $\{T_0, N_0, B_0\}$ a $\{T_\beta(s_0), N_\beta(s_0), B_\beta(s_0)\}$ y el movimiento afín

$$\phi(X) = AX + (\beta(s_0) - A\alpha(s_0))$$

Definimos la función

$$f(s) = ||T_\beta - T_{\phi\circ\alpha}||^2 + ||N_\beta - N_{\phi\circ\alpha}||^2 + ||B_\beta - B_{\phi\circ\alpha}||^2$$

Si derivamos,

$$\begin{aligned}
f'(s) &= 2(T'_\beta - AT'_\alpha)\cdot(T_\beta - AT_\alpha) \\
&\quad +2(N'_\beta - AN'_\alpha)\cdot(N_\beta - AN_\alpha) \\
&\quad +2(B'_\beta - AB'_\alpha)\cdot(B_\beta - AB_\alpha) \\
&= 2(\kappa N_\beta - \kappa AN_\alpha)\cdot(T_\beta - AT_\alpha) \\
&\quad +2((-\kappa T_\beta + \tau B_\beta)) - A(-\kappa T_\alpha + \tau B_\alpha))\cdot(N_\beta - AN_\alpha) \\
&\quad +2(-\tau N_\beta + \tau AN_\alpha)\cdot(B_\beta - AB_\alpha) \\
&= -2\kappa N_\beta\cdot(AT_\alpha) - 2\kappa(AN_\alpha)\cdot T_\beta \\
&\quad +2\kappa T_\beta\cdot(AN_\alpha) - 2\tau B_\beta\cdot(AN_\alpha) + 2\kappa(AT_\alpha)\cdot N_\beta - 2\tau(AB_\alpha)\cdot N_\beta \\
&\quad +2\tau N_\beta\cdot(AB_\alpha) + 2\tau(AN_\alpha)\cdot B_\beta \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Como $f'(s) = 0$ y $f(s_0) = 0$, entonces $f \equiv 0$. En particular, $T_\beta = T_{\phi\circ\alpha}$, es decir, $\beta'(s) - (\phi\circ\alpha)'(s) = 0$. Así, $\beta - \phi\circ\alpha = cte$ y, usando que $\beta(s_0) = \phi\circ\alpha(s_0)$, se tiene la igualdad buscada. □

Corolario 6.5. *Las curvas geométricas con curvatura y torsión constantes no nulas son los arcos de hélices circulares. Si la torsión es nula, se obtendrían arcos de circunferencia.*