GEOMETRÍA DIFERENCIAL DE CURVAS Y SUPERFICIES

TEMA 4 - CURVATURAS

M. C. GONZÁLEZ DÁVILA, I. GUTIÉRREZ SAGREDO, D. IGLESIAS PONTE

Dpto. Matemáticas Estadística e Investigación Operativa

Universidad de La Laguna

1. Orientabilidad. La aplicación de Gauss

Definición 1.1. *Dada una superficie regular S, un* ***campo de vectores normal*** *a S es una aplicación diferenciable $N\colon S \to \mathbb{R}^3$ tal que $N(p)$ es perpendicular a T_pS, para todo $p \in S$.*

Si además $||N(p)|| = 1$, para todo $p \in S$, entonces se dice que N es ***unitario****.*

Localmente, si elegimos una parametrización local $X\colon U \to S$, podemos elegir como normal unitaria

$$N_X(p) = \frac{X_u(u,v) \times X_v(u,v)}{||X_u(u,v) \times X_v(u,v)||}, \qquad X(u,v) = p. \tag{1}$$

Por construcción, $N_X(p)$ es unitario y perpendicular al plano tangente. Además, N_X es diferenciable ya que $N_X \circ X = \frac{X_u \times X_v}{||X_u \times X_v||}$.

Además, dada otra parametrización local $Y : V \to S$, teniendo en cuenta que el subespacio ortogonal a T_pS tiene dimensión 1, se cumple que

$$N_X = \pm N_Y$$

para todo $p \in W = X(U) \cap Y(V)$. Así, podemos definir de manera única (salvo el signo) un campo de vectores normal y unitario.

Veremos ahora en qué condiciones podemos asegurar la existencia global de un campo normal unitario.

Definición 1.2. *Sea S una superficie regular. Se dice que dos parametrizaciones locales $X_1\colon U_1 \to S$ y $X_2\colon U_2 \to S$* ***determinan la misma orientación*** *si $X_1(U_1) \cap X_2(U_2) = \emptyset$ o*

$$|Jac\,(X_2^{-1} \circ X_1)| > 0$$

en los puntos donde esté definido, esto es, en $X_1^{-1}(X_1(U_1) \cap X_2(U_2))$.

Si $|Jac\,(X_2^{-1} \circ X_1)| < 0$ se dice que X_1 y X_2 ***determinan la orientación opuesta****.*

Definición 1.3. *Una superficie S se dice* ***orientable*** *si existe un atlas, es decir, un conjunto de parametrizaciones locales $\{X_\alpha \colon U_\alpha \to S\}_{\alpha\in A}$ con $S = \cup_{\alpha\in A} U_\alpha$ y tales X_α y X_β determinan la misma orientación, para todo $\alpha,\beta \in A$. Fijando $\mathcal{A}$, decimos que S está orientada por $\mathcal{A}$.*

Nota 1.4. *i) Puede ocurrir que X_1 y X_2 no determinen la misma orientación ni la opuesta en el caso de tener el conjunto $X_1(U_1)\cap X_2(U_2)$ más de una componente conexa.*

A continuación demostraremos que la relación existente entre la noción de orientabilidad y la existencia de una aplicación normal unitaria.

Proposición 1.5. *Una superficie S es orientable si y sólo si existe un campo de vectores $N\colon S\to\mathbb{R}^3$ normal y unitario.*

Demostración. Dadas dos parametrizaciones $X : U \to S$ e $Y : V \to S$, la composición $h = Y^{-1}\circ X$ satisface

$$\frac{\partial X}{\partial u}\times\frac{\partial X}{\partial v}_{|X(u,v)} = |Jac\,(h)|\frac{\partial Y}{\partial u}\times\frac{\partial Y}{\partial v}_{|Y(h(u,v))}$$

En consecuencia,

$$N_X = signo(|Jac\,(Y^{-1}\circ X)|)N_Y \tag{2}$$

Si S es orientable con atlas orientado $\{X_\alpha\colon U_\alpha \to S\}_{\alpha\in A}$, dado $p\in X_\alpha(U_\alpha)\cap X_\beta(U_\beta)$, usando (2),

$$N_\alpha(p) = N_\beta(p),$$

con lo que la aplicación $N\colon S\to\mathbb{R}^3$, $p\mapsto N(p) = N_\alpha(p)$ está bien definida (no depende de $\alpha\in A$) y determina un campo normal unitario.

Recíprocamente, si $N\colon S\to\mathbb{R}^3$ es un campo normal unitario, dado un atlas $\{X_\alpha\colon\ U_\alpha\to S\}_{\alpha\in A}$ con U_α conexo, como $N_\alpha(p)$ es perpendicular a T_pS para todo $p\in X_\alpha(U_\alpha)$ se tiene que

$$N(p)\cdot N_\alpha(p) \equiv \pm 1, \qquad (p\in U_\alpha).$$

Al ser U_α conexo el signo es constante y, además, podemos cambiar el orden de las coordenadas en U_α para que $N(p)\cdot N_\alpha(p)\equiv 1$ para todo $\alpha\in A$ y, de (2), obtener un atlas de parametrizaciones que determinan la misma orientación. □

Definición 1.6. *Si S es orientable, el campo normal unitario $N\colon S\to\mathbb{R}^3$ correpondiente se denomina* ***aplicación de Gauss***.

Nota 1.7. *Si N es un campo unitario podemos ver la aplicación $N\colon S\to\mathbb{R}^3$ como una aplicación diferenciable $N\colon S\to S^2$.*

Ejemplo 1.8. *Veamos un ejemplo de superficie no orientable.*

Dada una circunferencia C contenida en el plano XY de centro $(0,0)$ y radio 2 y ℓ_0 un segmento en el plano YZ dado por $\{(0,y,z)\,|\,y=2, |z|<1\}$ (la longitud del segmento es 2 y su centro es $c=(0,2,0)$. Para cada ángulo $\theta\in[0,2\pi]$, se *construye el segmento ℓ_θ obtenido al mover c a lo largo de C con un ángulo θ y simultáneamente rotar ℓ_0 alrededor de C por un ángulo $\theta/2$. Uniendo los segmentos obtenemos la superficie conocida como la cinta de Moëbius:*

$$S = \bigcup_{\theta\in[0,2\pi]} \ell_\theta.$$

Esta superficie no es orientable: se define

$$U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < u < 2\pi,\ -1 < v < 1\}$$

y las parametrizaciones locales $X, Y : U \to S$ dadas por

$$X(u,v) = \Big((2 - v\sin\Big(\frac{u}{2}\Big))\sin u, (2 - v\sin\Big(\frac{u}{2}\Big))\cos u, v\cos\Big(\frac{u}{2}\Big)\Big)$$

$$Y(u,v) = \Big((2 - v\sin\Big(\frac{2u+\pi}{4}\Big))\cos u, (-2 + v\sin\Big(\frac{2u+\pi}{4}\Big))\sin u, v\cos\Big(\frac{2u+\pi}{4}\Big)\Big)$$

Es fácil comprobar que $\{X, Y\}$ es un atlas, es decir, X, Y son parametrizaciones locales tal que $X(U) \cup Y(U) = S$. Además,

$$X(U) \cap Y(U) = X(W_1) \cup X(W_2), \qquad X(W_1) \cap X(W_2) = \emptyset,$$

donde $W_1 = \{(u,v) \in U \,|\, \pi/2 < u < 2\pi\}$ y $W_2 = \{(u,v) \in U \,|\, 0 < u < \pi/2\}$.

Además, si

$$(u,v) \in W_1 \Rightarrow X(u,v) = Y(u - \pi/2, v)$$
$$(u,v) \in W_2 \Rightarrow X(u,v) = Y(u + 3\pi/2, -v)$$

Por tanto,

$$Y^{-1} \circ X(u,v) = \begin{cases} (u - \pi/2, v),\ (u,v) \in W_1 \\ (u + 3\pi/2, -v),\ (u,v) \in W_2 \end{cases}$$

Así,

$$det(Jac\,(Y^{-1} \circ X)) = \begin{cases} +1,\ (u,v) \in W_1 \\ -1,\ (u,v) \in W_2 \end{cases}$$

Si S fuera orientable con normal unitaria $N : S \to S^2$, entonces $N = \frac{X_u(u,v)\times X_v(u,v)}{||X_u(u,v)\times X_v(u,v)||}$ en $X_1(U)$, pero entonces $N = \pm\frac{Y_u(u,v)\times Y_v(u,v)}{||Y_u(u,v)\times Y_v(u,v)||}$, donde el signo depende de estar en W_1 o W_2.

Veamos ahora que la familia de superficies de nivel son superficies orientables.

Proposición 1.9. *Sea S una superficie de nivel de una función, es decir, $S = F^{-1}(a)$, donde $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable tal que $dF_{(p)} \neq (0,0,0)$, para todo $p \in F^{-1}(a)$. Entonces, S es orientable y $N : S \to S^2$ definida por*

$$(3) \qquad N(p) = \frac{\Big(\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}, \dfrac{\partial F}{\partial z}\Big)}{\Big|\Big|\Big(\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}, \dfrac{\partial F}{\partial z}\Big)\Big|\Big|}(p), \qquad (p \in S),$$

es un campo normal unitario.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ una curva contenida en S tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = \vec{v}$. Si derivamos en $t = 0$ la igualdad $F(\alpha(t) = F(x(t), y(t), z(t)) = a$ se tiene que

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x}_{|p} x'(0) + \frac{\partial F}{\partial y}_{|p} y'(0) + \frac{\partial F}{\partial z}_{|p} z'(0) = \vec{v} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x}_{|p}, \frac{\partial F}{\partial y}_{|p}, \frac{\partial F}{\partial z}_{|p} \right)$$

de donde se concluye que $\nabla F(p) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}_{|p}, \frac{\partial F}{\partial y}_{|p}, \frac{\partial F}{\partial z}_{|p} \right)$ es un vector normal a T_pS y (3) es una normal unitaria de $F^{-1}(a)$. $\square$

2. SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL

Sea S una superficie orientable y $N : S \to \mathbb{R}^3$ una aplicación de Gauss. Considerando su diferencial

$$\begin{array}{rccl} dN_{(p)} : & T_pS & \to & T_p\mathbb{R}^3 \\ & \vec{v} & \mapsto & dN_{(p)}(\vec{v}) = (N \circ \alpha)'(0), \end{array}$$

y usando que $N \cdot N = 1$, podemos deducir que

$$dN_{(p)}(\vec{v}) \cdot N(p) = 0$$

con lo que $dN_{(p)}(T_pS) \subseteq T_pS$.

Definición 2.1. *Si S es una superficie, $p \in S$ y N es una normal definida (en un entorno de p), el **operador forma** (o **endomorfismo de Weingarten**) $\mathbb{S}_p$ es la aplicación lineal*

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{S}_p : & T_pS & \to & T_pS \\ & \vec{v} & \mapsto & -dN_{(p)}(\vec{v}). \end{array}$$

Nota 2.2. *Otra manera de ver que $dN_{(p)}(T_pS) \subseteq T_pS$ es la siguiente: Como la aplicación de Gauss se puede ver como $N : S \to S^2$, su diferencial es una aplicación lineal $dN_{(p)} : T_pS \to T_{N(p)}S^2$ pero, como los vectores tangentes a la esfera en $N(p)$ son los perpendiculares a $N(p)$, concluimos que $T_{N(p)}S^2 = T_{N(p)}S$.*

Toda aplicación lineal tiene dos invariantes numéricos, el determinante y la traza. En el caso de la diferencial de aplicación de Gauss, jugarán un papel fundamental en el estudio de superficies.

Definición 2.3. *Sea S una superficie orientable y $N : S \to S^2$ una aplicación de Gauss.*

i) *La **curvatura de Gauss** de S es la función $K : S \to \mathbb{R}$*

$$K(p) = det(dN_{(p)}), \qquad (p \in S). \tag{4}$$

ii) *La **curvatura media** de S es la función $H : S \to \mathbb{R}$*

$$H(p) = -\frac{1}{2} traza\ (dN_{(p)}), \qquad (p \in S). \tag{5}$$

Nota 2.4. *Notar que si la superficie no es orientable, sólo podemos definir la curvatura de Gauss y la curvatura media en un entorno.*

Ejemplos 2.5. *1.* **Plano:** $S = \{(x,y,z) \mid ax + by + cz + d = 0\}$
En este caso,

$$N(p) = \frac{(a,b,c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \qquad (p \in S),$$

de lo que se deduce que $dN_{(p)} \equiv 0$ *y la curvatura de Gauss y la curvatura media son nulas.*
2. **Esfera:** $S^2(r) = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = r^2\}$
Para la esfera,

$$N(p) = \frac{1}{r}p, \qquad (p \in S^2(r)),$$

de donde podemos deducir que $dN_{(p)} = \frac{1}{r}Id$, *de donde se deduce que la curvatura de Gauss es* $K(p) = \frac{1}{r^2}$ *y la curvatura media,* $H(p) = -\frac{1}{r}$.
3. Cilindro: $C = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 = 1\}$
Recordando que el plano tangente a un punto $(x,y,z) \in C$ *viene dado por*

$$T_{(x,y,z)}C = \{(v_1,v_2,v_3) \mid xv_1 + yv_2 = 0\},$$

no es difícil comprobar que una aplicación normal unitaria viene dada por

$$N(x,y,z) = (x,y,0), \qquad ((x,y,z) \in C).$$

En este caso, como $N = F_{|C} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) = (x,y,0)$ *y* F *es una aplicación lineal, se tiene que* $dN_{(p)} = dF_{(p)|T_pC}$ *y, así,*

$$dN_{(x,y,z)}(v_1,v_2,v_3) = (v_1,v_2,0). \tag{6}$$

Por tanto, $K \equiv 0$ *y* $H \equiv -\frac{1}{r}$.

Una propiedad que será importante en el estudio de la curvatura es el siguiente.

Proposición 2.6. *La aplicación* $dN_{(p)} \colon T_pS \to T_pS$ *es una aplicación autoadjunta, es decir, es simétrica con respecto de la primera forma fundamental,*

$$dN_{(p)}(\vec{v}) \cdot \vec{w} = dN_{(p)}(\vec{w}) \cdot \vec{v}, \qquad (\vec{v}, \vec{w} \in T_pS).$$

Demostración. Es suficiente probar el resultado para una base $\{\frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v}\}$ asociada a una parametrización local $X \colon U \to S$. Derivando la igualdad $(N \circ X) \cdot \frac{\partial X}{\partial v} = 0$ con respecto de u,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial (N\circ X)}{\partial u} \cdot \frac{\partial X}{\partial v} + (N \circ X) \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} \\ &= dN_{(p)}\Big(\frac{\partial X}{\partial u}\Big) \cdot \frac{\partial X}{\partial v} + N(p) \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} \end{aligned}$$

Análogamente, derivando la igualdad $(N \circ X) \cdot \frac{\partial X}{\partial u} = 0$ con respecto de v,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial (N \circ X)}{\partial v} \cdot \frac{\partial X}{\partial u} + (N \circ X) \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial v \partial u} \\ &= dN_{(p)}\Big(\frac{\partial X}{\partial v}\Big) \cdot \frac{\partial X}{\partial u} + N(p) \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial v \partial u} \end{aligned}$$

Igualando las expresiones y usando que $\frac{\partial^2 X}{\partial v \partial u} = \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}$, se concluye que

$$dN_{(p)}\Big(\frac{\partial X}{\partial u}\Big) \cdot \frac{\partial X}{\partial v} = \frac{\partial X}{\partial u} \cdot dN_{(p)}\Big(\frac{\partial X}{\partial v}\Big).$$

□

Definición 2.7. *Si S es una superficie, $p \in S$ y N es una normal definida en un entorno de p, la forma cuadrática asociada al operador forma,*

$$\begin{array}{rrcl} \mathbb{II}_p\colon & T_pS & \to & \mathbb{R} \\ & \vec{v} & \mapsto & I_p(-dN_{(p)}(\vec{v}), \vec{v}) = -dN_{(p)}(\vec{v}) \cdot \vec{v}, \end{array}$$

se denomina la ***segunda forma fundamental****.*

Si $X\colon U \to S$ es una parametrización local, $p = X(u_0, v_0) \in X(U)$ entonces, al ser $\{\frac{\partial X}{\partial u}_{|(u_0,v_0)}, \frac{\partial X}{\partial v}_{|(u_0,v_0)}\}$ una base de T_pS

$$\begin{aligned} \mathbb{II}_p(\vec{v}) &= \mathbb{II}_p\Big(v_1 \frac{\partial X}{\partial u} + v_2 \frac{\partial X}{\partial v}\Big) \\ &= (v_1)^2 \mathbb{II}_p\Big(\frac{\partial X}{\partial u}\Big) - 2(v_1 v_2) dN_{(p)}\Big(\frac{\partial X}{\partial u}\Big) \cdot \frac{\partial X}{\partial v} + (v_2)^2 \mathbb{II}_p\Big(\frac{\partial X}{\partial v}\Big). \end{aligned}$$

Este desarrollo motiva la siguiente definición.

Definición 2.8. *Sea S una superficie orientable con aplicación de Gauss $N\colon S \to S^2$. Si $X\colon U \to S$ es una parametrización local las funciones $h_{ij}\colon U \to \mathbb{R}$ definidas por*

$$\begin{aligned} h_{11} &= 2\mathbb{II}_p\Big(\tfrac{\partial X}{\partial u}\Big) \\ h_{12} &= \mathbb{S}_p\Big(\tfrac{\partial X}{\partial u}\Big) \cdot \tfrac{\partial X}{\partial v} \\ h_{22} &= \mathbb{II}_p\Big(\tfrac{\partial X}{\partial v}\Big) \end{aligned}$$

se denominan ***coeficientes de la segunda forma fundamental****.*

Nota 2.9. *i) De su definición, las funciones h_{ij} son diferenciables.*
ii) En algunos libros de texto, se usa la notación $h_{11} = e$, $h_{12} = f$, $h_{22} = g$.

Veamos ahora cómo calcular los coeficientes de la segunda forma fundamental en términos de los coeficientes de la primera forma fundamental. Si A es la matriz asociada a $dN_{(p)}$ respecto de la base asociada a una parametrización U, dado $\vec{v} = v_1 \frac{\partial X}{\partial u} + v_2 \frac{\partial X}{\partial v}$,

$$\mathbb{II}_p(\vec{v}) = (v_1\ v_2)(h_{ij}) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Pero sabiendo que, por definición, $\mathrm{II}_p(\vec{v}) = -I_p(dN_{(p)}(\vec{v}), \vec{v})$,

$$\mathrm{II}_p(\vec{v}) = -(v_1\ v_2)(g_{ij})A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Combinando ambas igualdades,

$$(h_{ij}) = -\left(g_{ij}\right) A,$$

o, equivalentemente,

$$A = -\left(g_{ij}\right)^{-1} \left(h_{ij}\right).$$

En consecuencia,

$$K \circ X = |A| = \tfrac{|h_{ij}|}{|g_{ij}|} = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$$
$$H \circ X = -\tfrac{1}{2}\text{traza } A = \frac{1}{2}\Big(\frac{h_{11}g_{22} - 2h_{12}g_{12} + h_{22}g_{11}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\Big)$$

Como las funciones h_{ij}, g_{ij} son diferenciables y $|g_{ij}|$ es distinto de cero, se deduce el siguiente resultado.

Proposición 2.10. *Las funciones curvatura de Gauss y curvatura media son funciones diferenciables.*

Por la Proposición 2.6 sabemos que el operador forma $\mathbb{S}_p$ es diagonalizable y admite una base ortonormal de autovectores. Este hecho motiva la siguiente definición.

Definición 2.11. *Sea S una superficie orientable y $N\colon S \to S^2$ una aplicación de Gauss. Los autovalores $\kappa_1(p)$ y $\kappa_2(p)$ del operador forma se denominan* ***curvaturas principales*** *de S en p y los autovectores (de longitud 1) son las* ***direcciones principales*** *de S en p.*

Nota 2.12. *De la definición de curvatura de Gauss K y curvatura media H se deduce que, si κ_1 y κ_2 son las curvaturas principales, entonces*

$$K(p) = \kappa_1(p)\kappa_2(p), \qquad H(p) = \frac{\kappa_1(p) + \kappa_2(p)}{2}.$$

Además, como $-\kappa_1$ y $-\kappa_2$ son raíces del polinomio característico de $dN_{(p)}$, éste es igual a

$$\lambda^2 + (\kappa_1 + \kappa_2)\lambda + \kappa_1\kappa_2 = \lambda^2 + 2H\lambda + K$$

y así,

$$\kappa_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K}.$$

Ejemplos 2.13. **1. Plano:** $S = \{(x, y, z) \,|\, ax + by + cz + d = 0\}$
Recordando que $dN_{(p)} \equiv 0$, las curvaturas principales son nulas.
2. **Esfera:** $S^2(r) = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$

Usando que $dN_{(p)} = \frac{1}{r}Id$, *las curvaturas principales coinciden y son iguales a* $-\frac{1}{r}$.

3. Cilindro: $C = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$

En este caso, dado $p = (x, y, z) \in C$, *usando* (6), *los autovalores son* 1 *y* 0 *con autovectores unitarios asociados* $\vec{v}_1 = (0, 0, 1)$ *y* $\vec{v}_2 = (-y, x, 0)$.

Veamos un primer resultado en el que restricciones en las curvaturas principales implica condiciones sobre la superficie.

Definición 2.14. *Dada una superficie orientable* S, *un punto* $p \in S$ *se dice que es un* ***punto umbilical*** *si sus curvaturas principales coinciden,* $\kappa_1(p) = \kappa_2(p)$.

Teorema 2.15. *Una superficie orientable* S *tal que todos sus puntos son umbilicales está contenida en una esfera o en un plano.*

Demostración. Como todos los puntos son umbilicales, dada una aplicación de Gauss, existe una función $\lambda\colon S \to \mathbb{R}$ tal que

$$dN_{(p)}(\vec{v}) = \lambda(p)\vec{v}, \qquad (\vec{v} \in T_pS, p \in S) \tag{7}$$

Si elegimos una parametrización $X\colon U \to S$, tomando $\vec{v} = \frac{\partial X}{\partial u}$ se prueba que λ es diferenciable:

$$\lambda(X(u, v)) = \frac{dN_{(X(u,v))}(\frac{\partial X}{\partial u}) \cdot \frac{\partial X}{\partial u}}{||\frac{\partial X}{\partial u}||^2}$$

Además,

$$(\lambda \circ X)\tfrac{\partial X}{\partial u} = dN_{(X(u,v))}(\tfrac{\partial X}{\partial u}) = \tfrac{\partial (N\circ X)}{\partial u}$$

$$(\lambda \circ X)\tfrac{\partial X}{\partial v} = dN_{(X(u,v))}(\tfrac{\partial X}{\partial v}) = \tfrac{\partial (N\circ X)}{\partial v}$$

Derivando la primera igualdad respecto de v y la segunda respecto de u

$$\frac{\partial(\lambda \circ X)}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u} + (\lambda \circ X)\frac{\partial^2 X}{\partial v \partial u} = \frac{\partial^2 (N \circ X)}{\partial v \partial u}$$

$$\frac{\partial(\lambda \circ X)}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} + (\lambda \circ X)\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 (N \circ X)}{\partial u \partial v}$$

Restando ambas expresiones,

$$\frac{\partial(\lambda \circ X)}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u} - \frac{\partial(\lambda \circ X)}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} = \vec{0}.$$

Como $\{\frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v}\}$ son linealmente independientes,

$$\frac{\partial(\lambda \circ X)}{\partial v} = \frac{\partial(\lambda \circ X)}{\partial u} = 0.$$

Por tanto, $\lambda \circ X$ es constante. Veamos que, al ser S conexa, λ es constante en todo S. En efecto, fijando $p_0 \in S$ definimos

$$A = \{p \in S \,|\, \lambda(p) = \lambda(p_0)\} = \lambda^{-1}(p_0)$$

A es cerrado ya que λ es continua. Por otra parte, A es abierto porque si $p \in A$, tomando cualquier parametrización $X\colon U \to S$ con $p = X(u_0, v_0) \in X(U)$, como $\lambda \circ X$ es constante, $U \subseteq A$. Al ser S conexo y $A \neq \emptyset$ ($p_0 \in A$) se concluye que $A = S$, esto es, λ es constante.

Tenemos ahora dos posibilidades:

i) $\lambda \equiv 0$. En este caso, dN es nula para todo punto $p \in S$. Usando la Proposición 5.10 del Tema 3, $N(p) = N_0$ para todo p. Elegimos $p_0 \in S$ y definimos la función altura

$$\begin{array}{rccl} h\colon & S & \to & \mathbb{R} \\ & p & \mapsto & (p - p_0) \cdot N_0. \end{array}$$

h es una función diferenciable (ver ejemplo 3 en Ejemplos 4.3 del Tema 3 y su diferencial $dh_{(p)}\colon T_pS \to \mathbb{R}$ es

$$dh_{(p)}(\vec{v}) = \vec{v} \cdot N_0.$$

(ver ejemplo 1 en Ejemplos 5.9 del Tema 3). Como N_0 es perpendicular a T_pS, se tiene que $dh \equiv 0$. Usando de nuevo la Proposición 5.10 del Tema 3 y que $h(p_0) = 0$, h es identicamente nula. Esto implica que S está contenida en el plano ortogonal a N_0 que pasa por p_0.

i) $\lambda \equiv \lambda_0 \neq 0$. Definimos en este caso la aplicación

$$\begin{array}{rccl} q\colon & S & \to & \mathbb{R}^3 \\ & p & \mapsto & p - \frac{1}{\lambda_0} N(p). \end{array}$$

Esta aplicación es diferenciable y su diferencial es (ver (7))

$$dq_{(p)} = Id - \frac{1}{\lambda_0} dN_{(p)} = Id - \frac{1}{\lambda_0} \lambda_0 \, Id = 0.$$

De aquí, q es constante e igual a c. Por tanto, al ser $N(p)$ unitario,

$$||p - c||^2 = ||\frac{1}{\lambda_0} N(p)||^2 = \frac{1}{\lambda_0^2},$$

es decir S está contenida en la esfera de centro c y radio $\frac{1}{|\lambda_0|}$. $\square$

3. Curvatura normal

En esta sección estudiaremos de diferentes maneras cómo se curva una superficie. Empezaremos considerando curvas contenidas en la superficie y estudiando su curvatura.

Lema 3.1. *Sea S una superficie regular, $p \in S$, y $N(p) \in \mathbb{R}^3$ un vector normal unitario. Dado $\vec{v} \in T_pS$, $||\vec{v}|| = 1$, si $\pi_{\vec{v}}$ es el plano que pasa por p y es paralelo a $\langle \{\vec{v}, N(p)\} \rangle$, la intersección $\pi_{\vec{v}} \cap S$ es, en un entorno de p, la traza de una curva parametrizada regular.*

Demostración. La ecuación de $\pi_{\vec{v}}$ es $(x-p)\cdot(\vec{v}\times N(p))=0$. Si consideramos una parametrización local $X\colon U\to S$, $p=X(u_0,v_0)$, $X(u,v)$ pertenece a $\pi_v\cap S$ si y sólo si $(X(u,v)-p)\cdot(\vec{v}\times N(p))=0$. Definiendo la función $f\colon U\to\mathbb{R}$, $(u,v)\mapsto(X(u,v)-p)\cdot(\vec{v}\times N(p))$, se cumple que

$$X(u,v)\in\pi_v\cap S\Leftrightarrow f(u,v)=0.$$

Veamos que $C=\{y\in U\mid f(y)=0\}$ es la traza de una curva. En efecto,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u}_{|(u_0,v_0)}&=\frac{\partial X}{\partial u}_{|(u_0,v_0)}\cdot(\vec{v}\times N(p))\\ \frac{\partial f}{\partial v}_{|(u_0,v_0)}&=\frac{\partial X}{\partial v}_{|(u_0,v_0)}\cdot(\vec{v}\times N(p))\end{aligned}$$

Si (u_0,v_0) fuera un punto crítico de f ($df_{(u_0,v_0)}=0$), de las relaciones anteriores se deduciría que $\vec{v}\times N(p)$ es perpendicular a T_pS. Al ser $N(p)$ perpendicular a T_pS, se obtendría que $\vec{v}\times N(p)$ es paralelo a $N(p)$, lo cual es un absurdo. Por tanto, $df_{(u_0,v_0)}\neq 0$. Usando el Teorema de la función implícita, existe un entorno V de $\mathbb{R}^2$ tal que $V\cap C=$ es la traza de una curva regular. $\square$

Definición 3.2. *Sea S una superficie, $p\in S$, y elegimos $N(p)\in\mathbb{R}^3$ un vector normal unitario. Dado $\vec{v}\in T_pS$, $||\vec{v}||=1$, sea $\pi_{\vec{v}}$ es el plano que pasa por p y es paralelo a $\langle\{\vec{v},N(p)\}\rangle$. La curva regular unitaria $\alpha\colon I\to S$ con $\alpha(0)=p$ y cuya traza es la intersección $H_v\cap S$ en un entorno de p se denomina* ***la sección normal de S en p a lo largo de $\vec{v}$****.*

Como $\langle\{\vec{v},N(p)\}\rangle=\langle\vec{v}\rangle$, el vector tangente unitario de la sección normal tiene que ser $\pm\vec{v}$. Orientamos la curva sección normal para que $\alpha'(0)=\vec{v}$. Así, la sección normal es una curva que depende sólo de la geometría de S en la dirección de $\vec{v}$.

Definición 3.3. *Sea S una superficie, $p\in S$, y $N(p)\in\mathbb{R}^3$ un vector normal unitario. Dado $\vec{v}\in T_pS$, $||\vec{v}||=1$, orientamos $\pi_{\vec{v}}$ eligiendo $\{\vec{v},N(p)\}$ como base positiva. Se define la* ***curvatura normal de S en p a lo largo de $\vec{v}$*** *como la curvatura orientada de la sección normal de S en p a lo largo de $\vec{v}$ (vista como curva plana).*

Nota 3.4. i) *Si $\alpha\colon I\to\mathbb{R}^2$ es una curva plana unitaria ($T_\alpha(t)=\alpha'(t)$), siempre existe $\tilde{N}_\alpha\colon I\to\mathbb{R}^2$ unitaria tal que $\tilde{N}_\alpha(t)$ es perpendicular a $T_\alpha(t)$ y $\{T_\alpha(t),\tilde{N}_\alpha(t)\}$ tiene la misma orientación que la base canónica ($det(T_\alpha,\tilde{N}_\alpha)=1$). De hecho, si $T_\alpha(t)=(a_1,a_2)$ entonces $\tilde{N}_\alpha(t)=(-a_2,a_1)$. $\tilde{N}_\alpha$ se denomina la* ***normal unitaria orientada****.*

Si tenemos una normal unitaria orientada $\tilde{N}_\alpha$, la ***curvatura orientada*** *es la función $\tilde{\kappa}\colon I\to\mathbb{R}$ caracterizada por*

$$T'_\alpha(t)=\tilde{\kappa}(t)\tilde{N}_\alpha(t).$$

Notar que $|\tilde{\kappa}(t)| = \kappa(t)$. *Además,*

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}(t) > 0 &\Rightarrow \tilde{N}_\alpha(t) = N_\alpha(t), \\ \tilde{\kappa}(t) < 0 &\Rightarrow \tilde{N}_\alpha(t) = -N_\alpha(t). \end{aligned}$$

ii) *Como* N *como* $\tilde{N}_\alpha$ *son unitarios y perpendiculares a* T_α*, teniendo en cuenta que* $\{T_\alpha(t), N(\alpha(t))\}$ *y* $\{T_\alpha(t), \tilde{N}_\alpha(t)\}$ *tienen la misma orientación,* $\tilde{N}_\alpha(t) = N(\alpha(t))$.

iii) *La curva sección normal no depende de la elección de* $N(p)$. *Sin embargo, si sustituimos* $N(p)$ *por* $-N(p)$*, el signo de la curvatura normal de* S *en* p *a lo largo de* $\vec{v}$ *cambia:*

$$T'_\alpha \cdot (-N) = -T'_\alpha \cdot (N).$$

Veamos ahora que la curvatura normal coincide con la segunda forma fundamental. Sea $\alpha\colon (-\epsilon, \epsilon) \to S$ una curva parametrizada unitaria con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = \vec{v} \in T_pS$. Derivando la igualdad $N(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = 0$,

$$-\alpha'(t) \cdot N'(\alpha(t)) = \alpha''(t) \cdot N(\alpha(t)).$$

Tomando $t = 0$,

$$\mathbb{II}_p(\vec{v}) = -dN_{(p)}(\vec{v}) \cdot \vec{v} = \alpha''(0) \cdot N(p).$$

Si la curva α es birregular, $\alpha'' = \kappa_\alpha N_\alpha$, donde κ_α es la curvatura de α y N_α es el vector normal, y así

$$\mathbb{II}_p(\vec{v}) = \kappa_\alpha(0)\big(N_\alpha(0) \cdot N(p)\big).$$

Definición 3.5. *Sea* S *una superficie regular orientada y* $\alpha\colon I \to S$ *una curva parametrizada por el parámetro arco. La* ***curvatura normal*** *de* α *es la función* $\kappa_n\colon I \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\kappa_n = \alpha'' \cdot (N \circ \alpha) = \kappa_\alpha\big(N_\alpha \cdot (N \circ \alpha)\big)$$

donde la segunda igualdad sólo tiene sentido si α *es birregular.*

Nota 3.6. i) κ_n *es la longitud (con signo) de la proyección de la aceleración* α'' *en la dirección de* N*, que es ortogonal a la superficie. Además,*

$$\kappa_n(t) = \mathbb{II}_{\alpha(t)}(\alpha'(t)), \qquad (t \in I). \tag{8}$$

ii) *Si cambiamos la orientación de* S*, el signo cambia, ya que* $d(-N) = -dN$ *y por tanto*

$$\mathbb{II}_p^{-N}(\vec{v}) = dN_{(p)}(\vec{v}) \cdot \vec{v} = -\mathbb{II}_p^N(\vec{v}).$$

Proposición 3.7 (Meusnier)**.** *Sea* S *una superficie regular orientada con* $N\colon S \to \mathbb{R}^3$ *normal unitaria. Dado* $p \in S$,

i) *Dos curvas regulares unitarias en* S *que pasan por* p *y son tangentes en la misma dirección y sentido tienen la misma curvatura normal.*
ii) *La curvatura normal de* S *en* p *a lo largo de un vector* $v \in T_pS$, $||\vec{v}|| = 1$, *está dada por* $\mathbb{II}_p(\vec{v})$.

Demostración. *i)* Sean dos curvas $\alpha_1, \alpha_2 \colon I \to \mathbb{R}^3$ tales que $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = p$ y $\alpha_1'(0) = \alpha_2'(0) = \vec{v}$. De (8),

$$\kappa_n^{\alpha_1}(0) = \mathrm{I\!I}_{\alpha_1(0)}(\alpha_1'(0)) = \mathrm{I\!I}_{\alpha_1(0)}(\alpha_2'(0)) = \kappa_n^{\alpha_2}(0).$$

ii) Si α es la sección normal de S en p a lo largo de $\vec{v}$, como habíamos tomado $\{\vec{v} = T_\alpha(0), N(p)\}$ como base positiva y $\{T_\alpha(0), \tilde{N}_\alpha(0)\}$, entonces $\tilde{N}_\alpha(0) = N(\alpha(0))$ (ver Nota 3.4). De la relación $T_\alpha'(0) = \alpha''(0)$ se deduce que la curvatura normal

$$\kappa_n = \alpha''(0) \cdot N(0) = T_\alpha'(0) \cdot \tilde{N}_\alpha(0),$$

es igual a la curvatura normal de la sección normal,

$$\tilde{\kappa}_\alpha(0) = T_\alpha'(0) \cdot \tilde{N}_\alpha(0).$$

□

Recordando que una curva se dobla en la dirección de su normal unitaria, se tiene el siguiente resultado.

Corolario 3.8. *Sea S una superficie regular, $p \in S$, $N \colon S \to S^2$ una normal unitaria (definida localmente en un entorno U de p) y $\vec{v} \in T_pS$ unitario.*

1. *Si $\mathrm{I\!I}_p(\vec{v}) > 0$, la superficie se dobla hacia $N(p)$ en la dirección de $\vec{v}$.*
2. *Si $\mathrm{I\!I}_p(\vec{v}) < 0$, la superficie se dobla hacia el lado opuesto al que señala $N(p)$ en la dirección de $\vec{v}$.*
3. *Si $\mathrm{I\!I}_p(\vec{v}) = 0$, no podemos asegurar nada.*

Demostración. De la definición de curvatura normal

$$\mathrm{I\!I}_p(\vec{v}) = \kappa_n(0) = \pm\kappa_\alpha(0),$$

donde $\alpha \colon I \to S$ es la sección normal a S en p a lo largo de $\vec{v}$ ($\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = \vec{v}$). Recordando que una curva α se curva en la dirección de N_α, se tiene que

i) Si $\mathrm{I\!I}_p(\vec{v}) > 0$ entonces $\kappa_n(0) = \kappa_\alpha(0) > 0$ y $N(p) = \tilde{N}_\alpha(0) = N_\alpha(0)$ (ver Nota 3.4, i)), con lo que la superficie se curva hacia $N(p)$ a lo largo de $\vec{v}$.
ii) Si $\mathrm{I\!I}_p(\vec{v}) > 0$ entonces $\kappa_\alpha(0) = -\kappa_n(0) < 0$ y $N(p)\tilde{N}_\alpha(0) = -N_\alpha(0)$ (ver Nota 3.4, i)), con lo que la superficie se curva hacia $-N(p)$ a lo largo de $\vec{v}$.

□

Recordando la Proposición 2.6 y la Definición 2.11, al ser $dN_{(p)}$ autoadjunto, existe una base ortonormal $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ de T_pS (las direcciones principales) que son autovectores de las curvaturas principales κ_1, κ_2. Además tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.9 (Formula de Euler)**.** *Si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ es una base ortonormal de direcciones principales T_pS con curvaturas principales $\kappa_1 \leq \kappa_2$ entonces, para todo $\vec{v} \in T_pS$, $||\vec{v}|| = 1$, si $\theta \in (-\pi, \pi)$ es el ángulo entre $\vec{v}$ y $\vec{v}_1$ entonces*

$$\kappa_n(\vec{v}) = \mathrm{I\!I}_p(\vec{v}) = \kappa_1(p)\cos^2\theta + \kappa_2(p)\sin^2\theta. \tag{9}$$

Demostración. Como $||\vec{v}|| = 1$, al ser $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ una base ortonormal

$$\vec{v} = I_p(\vec{v}, \vec{v}_1)\vec{v}_1 + I_p(\vec{v}, \vec{v}_2)\vec{v}_2 = \cos\theta\,\vec{v}_1 + \sin\theta\,\vec{v}_2.$$

Usando ahora que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ son autovectores del operador forma,

$$\begin{aligned} \mathbb{II}_p(\vec{v}) &= -dN_{(p)}(\vec{v}) \cdot \vec{v} = -dN_{(p)}(\cos\theta\,\vec{v}_1 + \sin\theta\,\vec{v}_2) \cdot (\cos\theta\,\vec{v}_1 + \sin\theta\,\vec{v}_2) \\ &= \big(\cos\theta\,(\kappa_1(p)\vec{v}_1) + \sin\theta\,(\kappa_2(p)\vec{v}_2)\big) \cdot (\cos\theta\,\vec{v}_1 + \sin\theta\,\vec{v}_2) \\ &= \kappa_1(p)\cos^2\theta + \kappa_2(p)\sin^2\theta. \end{aligned}$$

□

4. Clasificación de puntos en una superficie

Definición 4.1. *Sea S una superficie regular y $p \in S$. Diremos que*

- *p es **elíptico** si $K(p) > 0$.*
- *p es **hiperbólico** si $K(p) < 0$.*
- *p es **parabólico** si $K(p) = 0$ y $(\kappa_1(p), \kappa_2(p)) \neq (0,0)$.*
- *p es **plano** si $\kappa_1(p) = \kappa_2(p) = 0$ (que implica $K(p) = 0$).*

Ejemplos 4.2. *i) Cualquier punto $p \in S^2(r)$ es elíptico, ya que $K(p) = -\frac{1}{r^2}$.*

ii) Dado el paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$, usando la parametrización global $X(u,v) = (u, v, v^2 - u^2)$,

$$\frac{\partial X}{\partial u} = (1, 0, -2u), \quad \frac{\partial X}{\partial v} = (0, 1, 2v), \quad N(u,v) = \frac{(2u, -2v, 1)}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}}.$$

En $p = (0,0,0)$, si $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ es una curva con $(u(0), v(0)) = 0$ ($\alpha(0) = p$) y $(u'(0), v'(0)) = (v_1, v_2)$, entonces

$$dN_{(p)}(v_1, v_2, 0) = 2v_1 - 2v_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

En consecuencia, p es un punto hiperbólico.

iii) Todo punto de un cilindro es parabólico (ver ejemplo 3 en Ejemplos 2.13).

iv) Si tomamos la superficie de revolución que se obtiene al rotar la curva $\alpha(t) = (t, 0, t^4)$, como $\alpha''(t) = (0, 0, 12t)$, su curvatura es igual a 0. Al rotar dicha curva, las curvas que se obtienen (que están contenidas en la superficie), también tienen curvatura nula en $t = 0$, de lo que se concluye que el punto $(0,0,0)$ es plano.

El corolario 3.8 y la relación entre la curvatura de Gauss y la segunda forma fundamental, sugiere el siguiente resultado.

Proposición 4.3. *Dado $p \in S$,*

i) *Si p es un punto elíptico, entonces existe $V \in Ent_S(p)$ tal que $V - \{p\}$ está contenido en uno de los dos semiespacios acotados por el plano afín tangente $p + T_pS$.*

ii) *Si p es un punto hiperbólico, entonces dado $V \in Ent_S(p)$, V tiene intersección no vacía con los dos semiespacios acotados por el plano afín tangente $p + T_pS$.*

Demostración. Sea $X: U \to S$ una parametrización local, $p \in X(U)$. Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $U = B((0,0), \epsilon)$ y $X(0,0) = p$. Definimos la función altura respecto del plano afín tangente, es decir,

$$\begin{array}{rccl} h: & U & \to & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \mapsto & (X(u,v) - p) \cdot N(p). \end{array}$$

Es evidente que $h(u,v) = 0$ si y sólo si $X(u,v)$ pertenece al plano tangente. Además $X(u,v)$ pertenece a un subespacio si y sólo si $h(u,v) > 0$ o $h(u,v) < 0$.

Haciendo el desarrollo de Taylor de h, en un entorno de $(0,0)$,

$$\begin{aligned} h(u,v) &= h(0,0) + \left(\frac{\partial h}{\partial u}_{|(0,0)} u + \frac{\partial h}{\partial v}_{|(0,0)} v \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial u \partial u}_{|(0,0)} u^2 + 2 \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v}_{|(0,0)} uv + \frac{\partial^2 h}{\partial v \partial v}_{|(0,0)} v^2 \right) + O(||(u,v)||^2) \\ &= h_{11}(p)u^2 + h_{12}(p)uv + h_{22}(p)v^2 + O(||(u,v)||^2) \\ &= \mathbb{II}_p(\vec{v}) + O(||(u,v)||^2). \end{aligned}$$

donde en la última penúltima igualdad hemos usado que $\frac{\partial h}{\partial u}_{|(0,0)} = dh_{(p)}(\partial X / \partial u) = X_u \cdot N(p) = 0$ y, derivando esta igualdad respecto de u, que $\frac{\partial^2 h}{\partial u \partial u}_{|(0,0)} = X_{uu} \cdot N(p)$ (análogamente, para las derivadas con respecto a v).

Si p es un punto elíptico, κ_1 y κ_2 tienen el mismo signo con lo que $\mathbb{II}_p$ es definido positivo o definido negativo. Usando el desarrollo de Taylor de h, en este caso existe un entorno V de p en S tal que $h(u,v)$ tiene el mismo signo para todo $(u,v) \in V - \{p\}$, es decir, todos los $h(u,v)$ pertenecen al mismo subespacio acotado por el plano afín tangente.

Si p es un punto hiperbólico, eligiendo cualquier entorno V de p, existen puntos $(u,v) \in U$ con $h(u,v) > 0$ y puntos (u,v) con $h(u,v) < 0$, es decir, V tiene intersección no vacía con los dos semiespacios acotados por el plano afín tangente. □

Para terminar, enunciaremos sin demostración, resultados que imponen condiciones cuándo S tiene curvatura de Gauss positiva.

Lema 4.4 (Teorema de Hilbert)**.** *Sea S una superficie orientable y sean $\kappa_1 \leq \kappa_2: S \to \mathbb{R}$ las funciones curvaturas principales. Si, en $p \in S$, se cumplen las condiciones*

i) *La curvatura de Gauss en p es positiva,*
ii) *κ_1 tiene un mínimo local en p,*
iii) *κ_2 tiene un máximo local en p,*

entonces p es un punto umbilical.

Teorema 4.5 (Teorema de Jellett-Liebmann)**.** *Una superficie conexa con curvatura de Gauss positiva y curvatura media constante es necesariamente una esfera.*

Teorema 4.6 (Teorema de Hilbert-Liebmann)**.** *Las únicas superficies conexas y compactas con curvatura de Gauss constante son las esferas.*