Geometría Diferencial de Curvas y Superficies

Ejercicios Tema 3

M. C. González Dávila, I. Gutiérrez Sagredo, D. Iglesias Ponte

Dpto. Matemáticas Estadística e Investigación Operativa

Universidad de La Laguna

1. Probar que el cilindro circular recto $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 = r^2 \,,\, r > 0\}$ *es una superficie regular (es superficie de nivel y superficie de revolución). Calcular parametrizaciones del mismo.*

2. Demostrar que el elipsoide $M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1\right\}$ *es una superficie regular. Comprobar que* $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $X(u,v) = (a \sin u \cos v, b \sin u \sin v, c \cos u)$, *es una parametrización de* M *cuando restringimos el dominio de definición a un adecuado abierto* $U \subset \mathbb{R}^2$. *¿Qué parte de* M *recubre? Busca otra parametrización que junto con ésta recubra a todo* M.

3. Demostrar que el hiperboloide de una hoja $M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1\right\}$ *es una superficie regular. Comprobar que* $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $X(u,v) = (a \sin u \cosh v, b \cos u \cosh v, c \sinh v)$ *es una parametrización de* M *cuando restringimos el dominio de definición a un adecuado abierto* $U \subset \mathbb{R}^2$. *¿Qué parte de* M *recubre? Busca otra parametrización que junto con ésta recubra a todo* M. *Observa que si* $a = b$ *se trata de una superficie de revolución.*

4. Demostrar que el hiperboloide de dos hojas $M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, -\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1\right\}$ *es una superficie regular. Hallar parametrizaciones para el mismo que lo recubran.*

5. Demuéstrese que el paraboloide hiperbólico dado por $M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}\right\}$ *es superficie regular simple doblemente reglada*[1]*, esto es, generada por dos familias de rectas.*

6. i) Probar que el cono circular en $\mathbb{R}^3$, $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, z^2 = x^2 + y^2\}$ *no es una superficie regular. ii) Comprobar que sí lo es* $N = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, z^2 = x^2 + y^2\,,\, z > 0\}$*, siendo superficie de Monge, superficie de revolución y superficie de nivel. iii) Razonar que* $M - \{(0,0,0)\}$ *es superficie regular.*

[1]Una superficie doblemente reglada es aquella para la que por cada punto pasan dos rectan que están completamente contenidas en ella.