Geometría Diferencial de Curvas y Superficies

Ejercicios Tema 3

M. C. González Dávila, I. Gutiérrez Sagredo, D. Iglesias Ponte

Dpto. Matemáticas Estadística e Investigación Operativa

Universidad de La Laguna

1. Probar que el cilindro circular recto $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 = r^2 \,,\, r > 0\}$ *es una superficie regular (es superficie de nivel y superficie de revolución). Calcular parametrizaciones del mismo.*

Consideramos la función

$$\begin{array}{cccc} F & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x, y, z) & \to & x^2 + y^2 \end{array} \qquad (1)$$

Es fácil ver que $M = F^{-1}(r^2)$.

Además tenemos que $dF(x, y, z) = (2x, 2y, 0) \neq (0, 0, 0)$ para todo $(x, y, z) \in F^{-1}(r^2)$, por ser $r > 0$ (notar que $(2x, 2y, 0) = (0, 0, 0)$ si y solo si $x = y = 0$).

Veamos a continuación dos parametrizaciones del cilindro circular recto. La primera está dada por:

$$\begin{array}{ccccc} X_1^{\pm} & : & (-r, r) \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & & (u, v) & \to & (\pm\sqrt{r^2 - u^2}, u, v) \end{array} \qquad (2)$$

$$\begin{array}{ccccc} X_2^{\pm} & : & (-r, r) \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & & (u, v) & \to & (u, \pm\sqrt{r^2 - u^2}, v) \end{array} \qquad (3)$$

Es fácil comprobar que

$$\left.\frac{\partial X_1^{\pm}}{\partial u}\right|_{u_0,v_0} = (\mp\frac{u_0}{\sqrt{r^2-u_0^2}}, 1, 0), \qquad \left.\frac{\partial X_1^{\pm}}{\partial v}\right|_{u_0,v_0} = (0,0,1) \tag{4}$$

son linealmente independientes para todo $(u_0, v_0) \in (-r, r) \times \mathbb{R}$. Igualmente los vectores

$$\left.\frac{\partial X_2^{\pm}}{\partial u}\right|_{u_0,v_0} = (1, \mp\frac{u_0}{\sqrt{r^2-u_0^2}}, 0), \qquad \left.\frac{\partial X_2^{\pm}}{\partial v}\right|_{u_0,v_0} = (0,0,1) \tag{5}$$

son linealmente independientes para todo $(u_0, v_0) \in (-r, r) \times \mathbb{R}$. Es importante notar que para parametrizar todo el cilindro M con esta parametrización se necesitan las cuatro cartas $X_1^{\pm}, X_2^{\pm}$.

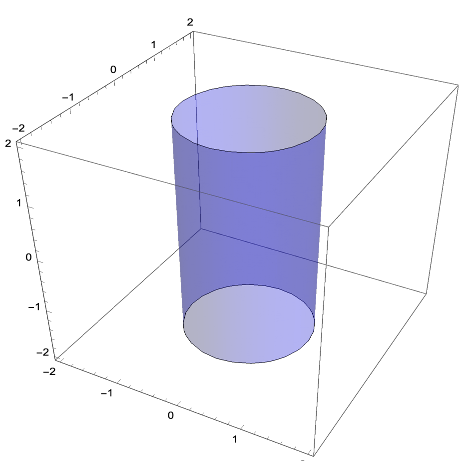
También podemos parametrizar M teniendo en cuenta que es una superficie de revolución. Consideramos la curva

$$\begin{array}{cccc} \alpha & : & (-\infty, \infty) & \to & \mathbb{R}^3 \\ & & t & \to & (r, 0, t) \end{array} \tag{6}$$

Girando esta curva alrededor del eje Z se obtiene la siguiente parametrización:

$$\begin{array}{cccc} Y_1 & : & (0, 2\pi) \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & & (\theta, t) & \to & (r\cos\theta, r\sin\theta, t) \end{array} \tag{7}$$

$$\begin{array}{cccc} Y_2 & : & (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & & (\theta, t) & \to & (r\cos\theta, r\sin\theta, t) \end{array} \tag{8}$$



En este link se puede ver como el cilindro es generado como una superficie de revolución.

2. Demostrar que el elipsoide $M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1\right\}$ *es una superficie regular. Comprobar que* $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $X(u, v) = (a \sin u \cos v, b \sin u \sin v, c \cos u)$, *es una parametrización de* M *cuando restringimos el dominio de definición a un adecuado abierto* $U \subset \mathbb{R}^2$*. ¿Qué parte de* M *recubre? Busca otra parametrización que junto con ésta recubra a todo* M*.*

Consideramos la función

$$\begin{array}{cccc} F & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y,z) & \to & \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} \end{array} \tag{9}$$

Se tiene que $M = F^{-1}(1)$.

Además $dF(x, y, z) = (\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}) \neq (0, 0, 0)$ para todo $(x, y, z) \in M$, ya que $(0, 0, 0) \notin M$.

Veamos que la aplicación

$$\begin{array}{cccc} X & : & (0,\pi)\times(0,2\pi) & \to & M \\ & & (u,v) & \to & (a \sin u \cos v, b \sin u \sin v, c \cos u) \end{array} \tag{10}$$

es una parametrización de M. Primero comprobamos que X está bien definida, es decir, que $Xu_0 \subset M$. Esto es cierto, ya que

$$F \circ X(u_0, v_0) = \frac{(a \sin u_0 \cos v_0)^2}{a^2} + \frac{(b \sin u_0 \sin v_0)^2}{b^2} + \frac{(c \cos u_0)^2}{c^2} = 1 \tag{11}$$

para todo $(u_0, v_0) \in (0, \pi) \times (0, 2\pi)$.

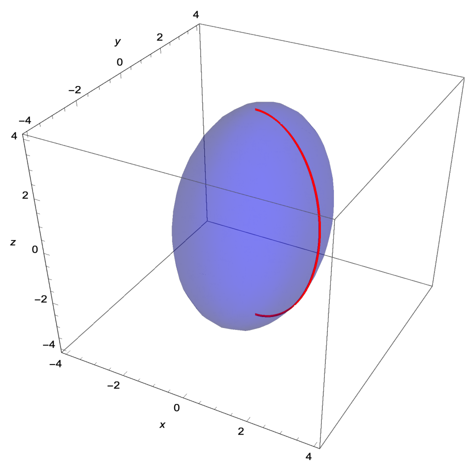
Para ver que X es regular, calculamos la matriz de su diferencial dX en las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, que en el punto (u_0, v_0) está dada por

$$\begin{pmatrix} a \cos u_0 \cos v_0 & -a \sin u_0 \sin v_0 \\ b \cos u_0 \cos v_0 & -b \sin u_0 \sin v_0 \\ -c \sin u_0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Es inmediato ver que el rango de esta matriz es 2 para todo $(u_0, v_0) \in (0, \pi) \times (0, 2\pi)$, por lo que $dX(u_0, v_0)$ es inyectivo y X es regular.

Además, de $X(u,v) = X(u',v')$ obtenemos que $u = u'$ (en $(0,\pi)$) y que $v = v'$ (en $(0,2\pi)$), por lo tanto X es inyectiva, y así X es parametrización local.

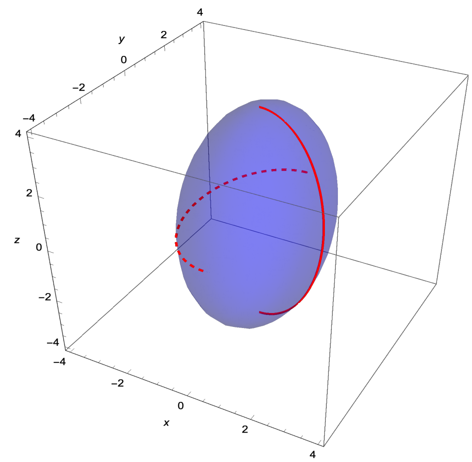
Tenemos que $X(0,v) = (0,0,c)$, $X(\pi,v) = (0,0,-c)$ y $X(u,0) = (a\sin u, 0, c\cos u)$, por lo que la carta definida previamente recubre $M - C$, donde C es la semielipse con ecuaciones $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ y $x \geq 0$.



Para recubrir la parte que falta podemos tomar la parametrización

$$\begin{array}{cccc} Y & : & (0,\pi)\times(0,2\pi) & \to & M \\ & & (u,v) & \to & (-a\sin u\cos v, b\cos u, c\sin u\sin v) \end{array} \tag{13}$$

que recubre $M - C'$, siendo C' la semielipse con ecuaciones $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y $x \leq 0$. Como $C \cup C' = \emptyset$, las dos parametrizaciones X e Y son suficientes para recubrir todo M.



En este link pueden verse las parametrizaciones X e Y.

3. Demostrar que el hiperboloide de una hoja $M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}$ *es una superficie regular. Comprobar que* $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $X(u,v) = (a \sin u \cosh v, b \cos u \cosh v, c \sinh v)$ *es una parametrización de* M *cuando restringimos el dominio de definición a un adecuado abierto* $U \subset \mathbb{R}^2$. *¿Qué parte de* M *recubre? Busca otra parametrización que junto con ésta recubra a todo* M. *Observa que si* $a = b$ *se trata de una superficie de revolución.*

Tenemos que $M = F^{-1}(1)$ siendo

$$\begin{array}{cccc} F & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y,z) & \to & \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2}. \end{array} \tag{14}$$

Además $dF|_p = (\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, -\frac{2z}{c^2}) \neq (0,0,0)$ para todo $p \in M$, por lo que M es superficie regular.

Veamos que la aplicación

$$\begin{array}{cccc} X & : & (0,2\pi) \times \mathbb{R} & \to & M \\ & & (u,v) & \to & (a \sin u \cosh v, b \cos u \cosh v, c \sinh v) \end{array} \tag{15}$$

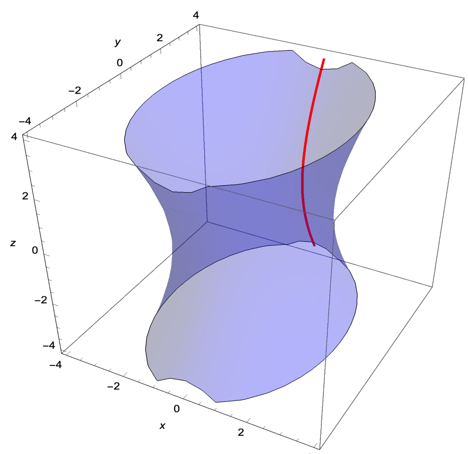
es una parametrización local de M. Primero, está claro que $X((0,2\pi) \times \mathbb{R}) \subset M$ ya que $F \circ X(u_0,v_0) = 1$ para todo $(u_0,v_0) \in \mathbb{R}^2$, y que X es diferenciable.

Para ver que X es regular, calculamos la matriz de su diferencial dX en las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, que en el punto (u_0, v_0) está dada por

$$\begin{pmatrix} a\cos u_0 \cosh v_0 & a\sin u_0 \sinh v_0 \\ -b\sin u_0 \cosh v_0 & b\cos u_0 \sinh v_0 \\ 0 & c\cosh v_0 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Es inmediato ver que el rango de esta matriz es 2 para todo $(u_0, v_0) \in (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$, por lo que $dX(u_0, v_0)$ es inyectivo y X es regular.

Además $X(u, v) = X(u', v')$ implica que $v = v'$ y $u = u' + 2k\pi$, por lo que $X : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to M$ es inyectiva. Esta parametrización recubre todo M salvo la curva $X(0, v) = (0, b\cosh v, c\sinh v)$.



Aquí puede verse como la parametrización X recubre todo el hiperboloide menos la curva $X(0, v)$.

Para recubrir esta recta que falta en el hiperboloide podemos utilizar

$$\begin{array}{cccc} \tilde{X} & : & (-\pi, \pi) \times \mathbb{R} & \to & M \\ & & (u, v) & \to & (a\sin u \cosh v, b\cos u \cosh v, c\sinh v) \end{array} \tag{17}$$

Para ver que cuando $a = b$, la superficie M es de revolución, consideramos la curva

$$\alpha(t) = (a\cosh t, 0, b\sinh t). \tag{18}$$

Rotando alrededor del eje Z se obtiene la siguiente parametrización

$$\begin{array}{rcccl} Y & : & (0,2\pi)\times\mathbb{R} & \rightarrow & M \\ & & (\theta,t) & \rightarrow & (a\cos\theta\cosh t, a\sin\theta\cosh t, c\sinh t). \end{array} \tag{19}$$

Aquí se puede ver que cuando $a=b$ la superficie M es una superficie de revolución.

4. Demostrar que el hiperboloide de dos hojas $M = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, -\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\right\}$ *es una superficie regular. Hallar parametrizaciones para el mismo que lo recubran.*

Tenemos que $M = F^{-1}(1)$, siendo

$$\begin{array}{rcccl} F & : & \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y,z) & \rightarrow & -\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}. \end{array} \tag{20}$$

Por otro lado, $dF|_p = (-\frac{2x}{a^2}, -\frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}) \neq (0,0,0)$ para todo $p\in M$.

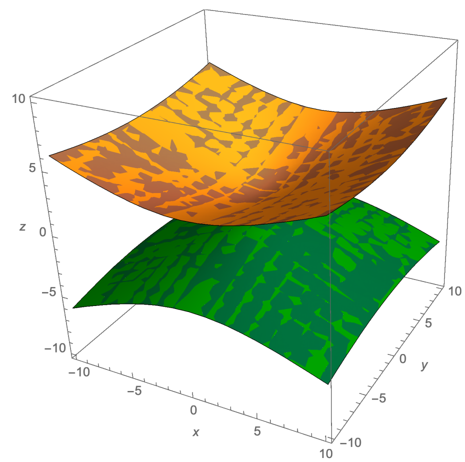
Esta superficie puede ser recubierta por las dos siguientes parametrizaciones de Monge, cada una de ellas recubriendo una de las hojas:

i) Hoja superior:

$$\begin{array}{rcccl} X^+ & : & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & M \\ & & (u,v) & \rightarrow & (u,v,c\sqrt{\dfrac{u^2}{a^2}+\dfrac{v^2}{b^2}+1}) \end{array} \tag{21}$$

ii) Hoja inferior:

$$\begin{array}{rcccl} X^- & : & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & M \\ & & (u,v) & \rightarrow & (u,v,-c\sqrt{\dfrac{u^2}{a^2}+\dfrac{v^2}{b^2}+1}) \end{array} \tag{22}$$



Aquí puede verse como las parametrizaciones X^+ y X^- recubren las hojas superior e inferior, respectivamente.

5. Demuéstrese que el paraboloide hiperbólico dado por $M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}\right\}$ *es superficie regular simple doblemente reglada*[1]*, esto es, generada por dos familias de rectas.*

La superficie M es una superficie de Monge, con una parametrización dada por

$$\begin{array}{cccc} X & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & & (u, v) & \to & (u, v, \dfrac{u^2}{a^2} - \dfrac{v^2}{b^2}) \end{array} \tag{23}$$

que claramente es diferenciable ya que $f(x, y) = \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2}$ es diferenciable. Por lo tanto $M = X(\mathbb{R}^2)$.

Para ver que M es doblemente reglada, escribimos

$$X(u, v) = (u, v, \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2}) = (u, v, (\frac{u}{a} + \frac{v}{b})(\frac{u}{a} - \frac{v}{b})), \tag{24}$$

y poniendo $u' = \frac{u}{a} - \frac{v}{b}$, $v' = \frac{u}{a} + \frac{v}{b}$, podemos escribir M como

$$M = \left\{(\frac{a}{2}u', -\frac{b}{2}u', 0) + v'(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, u') | u', v' \in \mathbb{R}\right\} = \left\{(\frac{a}{2}v', \frac{b}{2}v', 0) + u'(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, v') | u', v' \in \mathbb{R}\right\}. \tag{25}$$

[1]Una superficie doblemente reglada es aquella para la que por cada punto pasan dos rectan que están completamente contenidas en ella.

De la primera igualdad, tomando $u' = u'_0$ tenemos la recta

$$\alpha(t) = (\frac{a}{2}u'_0, -\frac{b}{2}u'_0, 0) + t(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, u'_0). \tag{26}$$

De la segunda igualdad, tomando $v' = v'_0$ tenemos la recta

$$\beta(t) = (\frac{a}{2}v'_0, \frac{b}{2}v'_0, 0) + t(\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, v'_0). \tag{27}$$

Es fácil ver que estas dos rectas son distintas, ya que sus vectores directores son diferentes:

$$\begin{vmatrix} \frac{a}{2} & \frac{b}{2} \\ \frac{a}{2} & -\frac{b}{2} \end{vmatrix} = -\frac{ab}{2} \neq 0. \tag{28}$$

6. i) Probar que el cono circular en $\mathbb{R}^3$, $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, z^2 = x^2 + y^2\}$ no es una superficie regular. ii) Comprobar que sí lo es $N = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, z^2 = x^2 + y^2\,,\, z > 0\}$, siendo superficie de Monge, superficie de revolución y superficie de nivel. iii) Razonar que $M - \{(0,0,0)\}$ es superficie regular.

i) El punto $(0,0,0) \in M$ no tiene ningún entorno homeomorfo a un abierto del plano. Esto es sencillo de ver ya que si existiese un abierto del plano U y un homeomorfismo $X : U \to V$, entonces la aplicación $X : U - \{X^{-1}(0,0,0)\} \to V - \{(0,0,0)\}$ también sería homeomorfismo. Sin embargo, $U - \{X^{-1}(0,0,0)\}$ es conexo mientras que $V - \{(0,0,0)\}$ no lo es (y la conexidad es un invariante topológico).

ii) Para ver que $N = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, z^2 = x^2 + y^2\,,\, z > 0\}$ es superficie de Monge, consideramos la función diferenciable

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^2 - \{(0,0,0)\} & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \to & \sqrt{x^2+y^2} \end{array}, \tag{29}$$

que nos permite definir la parametrización de Monge dada por

$$\begin{array}{cccc} X & : & U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0,0)\} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & & (u,v) & \to & (u, v, \sqrt{u^2+v^2}) \end{array}. \tag{30}$$

Tenemos que $X(U) = N$.

Para ver que N es superficie de revolución consideramos la curva $\alpha : (0,\infty) \to \mathbb{R}^3$ con $\alpha(t) = (t, 0, t)$, y definimos las dos parametrizaciones

$$\begin{array}{cccc} Y_1 & : & (0,\infty) \times (0, 2\pi) & \to & \mathbb{R}^3 \\ & & (t,\theta) & \to & (t\cos\theta, t\sin\theta, t) \end{array}. \tag{31}$$

y

$$Y_2 \quad : \quad \begin{array}{ccc} (0,\infty)\times(-\pi,\pi) & \to & \mathbb{R}^3 \\ (t,\theta) & \to & (t\cos\theta, t\sin\theta, t) \end{array}. \tag{32}$$

Se cumple que $Y_1((0,\infty)\times(0,2\pi)) \cup Y_2((0,\infty)\times(-\pi,\pi)) = N$.

Además N es superficie de nivel, ya que $N = F^{-1}(0)$, siendo

$$F \quad : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \to & x^2+y^2-z^2 \end{array}, \tag{33}$$

que cumple que $dF(x,y,z) = (2x,2y,2z) \neq (0,0,0)$ para todo punto de N (recordar que $(0,0,0)\notin N$).

Aquí se puede ver que el cono es una superficie de revolución. Aquí se puede ver la parametrización X y aquí la Y_1.

iii) Es fácil ver que $M - \{(0,0,0)\}$ es superficie regular, ya que $M - \{(0,0,0)\} = N \cup N^-$, con $N^- = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, z^2 = x^2+y^2\,,\, z<0\}$ y N^- admite una parametrización de Monge similar a N.