Geometría Diferencial de Curvas y Superficies

Ejercicios Tema 4

M. C. González Dávila, I. Gutiérrez Sagredo, D. Iglesias Ponte

Dpto. Matemáticas Estadística e Investigación Operativa

Universidad de La Laguna

1. Calcular primera forma fundamental, operador forma, curvaturas y vectores principales, segunda forma fundamental en las siguientes superficies clasificando sus puntos según la curvatura de Gauss, deduciendo su comportamiento con respecto al plano tangente.

a) El helicoide, parametrizado como $X(u,v) = (u\cos v, u \operatorname{sen} v, av)$*, con* $a \neq 0$.

b) El toro $X(u,v) = ((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r \operatorname{sen} u)$.

c) La superficie regular simple $z = xy$*, calculando los 4 primeros ítems en el* $(0,0,0)$.

a) Calculamos primero las derivadas parciales de la parametrización local

$$X_1 = \frac{\partial X}{\partial u} = (\cos v, \operatorname{sen} v, 0), \quad X_2 = \frac{\partial X}{\partial v} = (-u \operatorname{sen} v, u\cos v, a)$$

<u>Primera forma fundamental</u>

Los coeficientes de la primera forma fundamental vienen dados por $g_{ij} = X_i \cdot X_j$. Por tanto,

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = u^2 + a^2, g_{12} = 0.$$

Por tanto, si $\vec{v} = z^1 X_1 + z^2 X_2$ y $\vec{w} = w^1 X_1 + w^2 X_2$ son vectores tangentes, la expresión matricial de la primera forma fundamental en $p = X(u,v)$ es

$$I_p(\vec{v},\vec{w}) = (z^1 z^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2+a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix}$$

Vector normal y operador forma

El vector normal es un vector unitario perpendicular al espacio tangente (que está generado por X_1 y X_2). Así

$$N = \frac{X_1 \times X_2}{||X_1 \times X_2||} = \frac{1}{\sqrt{a^2+u^2}}(a \operatorname{sen} v, -a\cos v, u)$$

El operador forma $\mathbb{S}_p$ es $-dN_{(p)}$ con lo que

$$dN(X_1) = -\frac{\partial N}{\partial u}, \qquad dN(X_2) = -\frac{\partial N}{\partial v},$$

Por tanto,

$$\mathbb{S}_p(X_1) = \frac{-a}{(\sqrt{a^2+u^2})^3}(-u \operatorname{sen} v, u\cos v, a) = \frac{-a}{(\sqrt{a^2+u^2})^3} X_2,$$
$$\mathbb{S}_p(X_2) = \frac{-a}{\sqrt{a^2+u^2}}(\cos v, a \operatorname{sen} v, 0) = \frac{-a}{\sqrt{a^2+u^2}} X_1.$$

La matrix asociada a $\mathbb{S}_p$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{-a}{\sqrt{a^2+u^2}} \\ \frac{-a}{(\sqrt{a^2+u^2})^3} & 0 \end{pmatrix}$$

2ª forma fundamental

En este caso, los coeficientes son

$$h_{ij} = N \cdot X_{ij},$$

donde X_{ij} son las derivadas segundas de la parametrización

$$h_{11} = N \cdot X_{11} = \tfrac{1}{\sqrt{a^2+u^2}}(a \operatorname{sen} v, -a\cos v, u)\cdot(0,0,0) = 0$$

$$h_{12} = N \cdot X_{12} = \tfrac{1}{\sqrt{a^2+u^2}}(a \operatorname{sen} v, -a\cos v, u)\cdot(-\operatorname{sen} v, \cos v, 0) = \frac{-a}{\sqrt{a^2+u^2}}$$

$$h_{22} = N \cdot X_{22} = \tfrac{1}{\sqrt{a^2+u^2}}(a \operatorname{sen} v, -a\cos v, u)\cdot(-u\cos v, -u \operatorname{sen} v, 0) = 0$$

Curvatura de Gauss

$$K(p) = \det(dN_{(p)}) = \frac{-a^2}{(a^2+u^2)^2}$$

Curvatura Media

$$H(p) = -\frac{1}{2}\text{traza}(dN_{(p)}) = 0.$$

Curvaturas Principales

Usando que $K = \kappa_1 \cdot \kappa_2$ y $H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$, como $H = 0$ se tiene que $\kappa_2 = -\kappa_1$. Sustituyendo la curvatura de Gauss,

$$\kappa_1 = \frac{a}{a^2+u^2}, \qquad \kappa_2 = -\frac{a}{a^2+u^2}$$

Direcciones principales

Son los autovectores unitarios del operador forma $\mathbb{S}_p$ asociados a las curvaturas principales (que son los autovalores). Resolviendo el sistema $\mathbb{S}_p(\vec{v})\kappa_i(p)\vec{v}$ queda

$$\vec{v}_1 = (-\sqrt{a^2+u^2}, 1)$$
$$\vec{v}_2 = (+\sqrt{a^2+u^2}, 1)$$

Clasificación de puntos

Como $K = \frac{-a^2}{(a^2+u^2)^2} < 0$, todos los puntos son hiperbólicos, con lo que la superficie está a ambos lados del plano tangente.

b) Vamos a probar en general qué ocurre en una superficie de revolución con parametrización local

$$X(t,\theta) = (r(t)\cos\theta, r(t)\operatorname{sen}\theta, z(t))$$

En este caso,

$$X_1 = (r'(t)\cos\theta, r'(t)\operatorname{sen}\theta, z'(t)), \qquad X_2 = (-r(t)\operatorname{sen}\theta, r(t)\cos\theta, 0)$$

Primera forma fundamental

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} (r'(t))^2 + (z'(t))^2 & 0 \\ 0 & (r(t))^2 \end{pmatrix}$$

Vector normal

$$N = \frac{r}{\sqrt{(z')^2 + (r')^2}}(-rz'\cos\theta, -rz'\operatorname{sen}\theta, rr')$$

2ª forma fundamental

$$h_{ij} = N \cdot X_{ij},$$

donde X_{ij} son las derivadas segundas de la parametrización

$$h_{11} = \frac{r'z''-z'r''}{\sqrt{(r')^2+(z')^2}}$$
$$h_{12} = 0$$
$$h_{22} = \frac{rz'}{\sqrt{(r')^2+(z')^2}}$$

Operador forma

$$-(g_{ij})^{-1}(h_{ij}) = -\begin{pmatrix} \frac{r'z''-z'r''}{((r')^2+(z')^2)^{3/2}} & 0 \\ 0 & \frac{z'}{r\sqrt{(r')^2+(z')^2}} \end{pmatrix}$$

Curvaturas y direcciones principales

Como la matriz del operador forma es diagonal

$$\kappa_1 = \frac{z'r'' - r'z''}{((r')^2 + (z')^2)^{3/2}}, \qquad \kappa_2 = \frac{-z'}{r\sqrt{(r')^2 + (z')^2}}$$

y las direcciones principales son

$$X_1/||X_1|| = \frac{1}{r\sqrt{(r')^2+(z')^2}}(r'(t)\cos\theta, r'(t)\operatorname{sen}\theta, z'(t))$$
$$X_2/||X_2|| = (-\frac{\operatorname{sen}\theta}{r(t)}, \frac{\cos\theta}{r(t)}, 0).$$

Curvatura de Gauss y media

$$K(p) = \kappa_1\kappa_2 = \frac{-z'(z'r'' - r'z'')}{r((r')^2 + (z')^2)^2}, \qquad H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$$

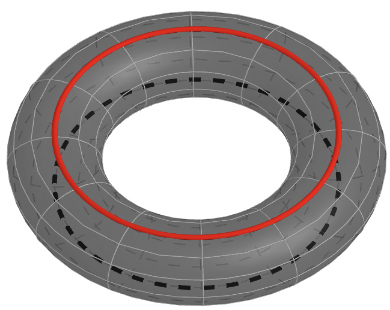
Clasificación de puntos

Si estudiamos el caso particular del toro de revolución donde $r(t) = (R + r\cos t)$ y $z(t) = r\,\mathrm{sen}\,t)$,

$$K = \frac{\cos t}{r(R + r\cos t)} = \begin{cases} > 0, & \text{si } t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \\ < 0, & \text{si } t \in (\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}), \\ = 0, & \text{si } t = \frac{\pi}{2} \text{ o } t = -\frac{\pi}{2} \end{cases},$$

donde hemos usado que $R + r\cos t > 0$.

En el caso de los puntos donde la curvatura es cero, al ser el círculo superior e inferior, la superficie queda al mismo lado del espacio tangente.



c) Una parametrización global es de la forma

$$X(u, v) = (u, v, f(u, v)), \qquad f(u, v) = uv$$

Entonces,

$$X_1 = (1, 0, f_u), \quad X_2 = (0, 1, f_v)$$

Primera forma fundamental

$$\begin{pmatrix} 1 + (f_u)^2 & f_u f_v \\ f_u f_v & 1 + (f_v)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + v^2 & uv \\ uv & 1 + u^2 \end{pmatrix}$$

Vector normal

$$N = \frac{X_1 \times X_2}{||X_1 \times X_2||} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f_u)^2 + (f_v)^2}}(-f_u, -f_v, 1) = \frac{1}{\sqrt{1 + v^2 + u^2}}(-v, -u, 1)$$

2ª forma fundamental

$$h_{11} = N \cdot X_{11} = N \cdot (0,0,f_{uu}) = \frac{f_{uu}}{\sqrt{1+(f_u)^2+(f_v)^2}} = 0$$

$$h_{12} = N \cdot X_{12} = N \cdot (0,0,f_{uv}) = \frac{f_{uv}}{\sqrt{1+(f_u)^2+(f_v)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}}$$

$$h_{22} = N \cdot X_{22} = N \cdot (0,0,f_{vv}) = \frac{f_{vv}}{\sqrt{1+(f_u)^2+(f_v)^2}} = 0$$

Operador forma

$$\frac{1}{(1+u^2+v^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} uv & -(1+u^2) \\ -(1+v^2) & uv \end{pmatrix}$$

Curvaturas principales en $(u,v) = (0,0)$

$$\kappa_1 = 1, \qquad \kappa_2 = -1$$

Direcciones principales en $(u,v) = (0,0)$

Son los autovectores de $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculando

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1), \qquad \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$$

Curvatura de Gauss

$$K(p) = \kappa_1\kappa_2 = -1$$

Con lo que el punto $(0,0,0)$ es hiperbólico.

Curvatura Media

$$H(0,0,0) = 0.$$

2. Probar que una superficie de revolución tiene curvatura de Gauss nula si y sólo si cada meridiano es un segmento de recta.

Del apartado b) del ejercicio anterior, la curvatura de Gauss es

$$K(p) = \kappa_1\kappa_2 = \frac{-z'(z'r'' - r'z'')}{r((r')^2 + (z')^2)^2}$$

Para que la curvatura se anule hay dos posibilidades:

i) $z' = 0$. En este caso, $z = z_0$ y obtenemos que la curva que genera la superficie es de la forma

$$\alpha(t) = (r(t), 0, z_0) = (0, 0, z_0) + r(t)(1, 0, 0),$$

esto es, α es un segmento de recta. Así, cada meridiano $\theta = \theta_0$ es el segmento de recta

$$X(t, \theta_0) = (0, 0, z_0) + r(t)(\cos\theta_0, \operatorname{sen}\theta_0, 0).$$

ii) $z'r'' - r'z'' = 0$. Esto es equivalente a que $(r'/z')' = 0$, es decir, existe una constante c tal que $r' = cz'$. Integrando, existen constantes c, d tal que $r(t) = cz(t) + d$. La curva quedaría

$$\alpha(t) = (cz(t) + d, 0, z(t)) = (d, 0, 0) + z(t)(c, 0, 1).$$

Esto es lo mismo que decir que todos los meridianos ($\theta = \theta_0$) son segmentos de recta,

$$\begin{aligned} X(t, \theta_0) &= ((cz(t) + d)\cos\theta_0 (cz(t) + d)\operatorname{sen}\theta_0, z(t)) \\ &= (d\cos\theta_0, d\operatorname{sen}\theta_0, 0) + z(t)(c\cos\theta_0, c\operatorname{sen}\theta_0, 1). \end{aligned}$$

3. Dada la superficie $S = \{(x, y, x^4 + y^4) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$, probar que $(0, 0, 0) \in S$ es un punto plano y que $S - \{p\}$ está contenida en un semiespacio acotado por T_pS.

La superficie S se puede ver como $F^{-1}(0)$ con $F(x, y, z) = z - x^4 - y^4$. De la teoría sabemos que el gradiente $\nabla F(x, y, z) = (-4x^3, -4y^3, 1)$ es un vector normal al plano tangente. En particular,

$$T_{(0,0,0)}S = \{(v^1, v^2, v^3) \mid v^3 = 0\}$$

Veamos que la curvatura normal se anula para toda curva α con $\alpha(0) = (0, 0, 0)$.

Para ello, consideraremos la parametrización global $X(u, v) = (u, v, u^4 + v^4)$. Sea $(u(t), v(t))$ una curva en $\mathbb{R}^2$ con $u(0) = 0$ y $v(0) = 0$. Entonces $\alpha(t) = X(u(t), v(t)) = (u(t), v(t), u^4(t) + v^4(t))$ es una curva en S con $\alpha(0) = (0, 0, 0)$. La curvatura normal es

$$\begin{aligned} \kappa_n^\alpha(0) &= \alpha''(0) \cdot N(0) \\ &= (u''(0), v''(0), 0) \cdot (0, 0, 1) = 0 \end{aligned}$$

En conclusión, el punto es plano.

Por otra parte, si $p = (x, y, z) \in S - (0, 0, 0)$, como $(x, y) \neq (0, 0)$ y$z = x^4 + y^4 > 0$, se tiene que $S - p$ está contenido en el semiespacio $\{(x, y, z) \,|\, z > 0\}$, que es el semiespacio acotado por $T_pS = \{z = 0\}$.

4. Dada la superficie $S = \{(x, y, x^3 - 3y^2x) \,|\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$*, probar que* $(0, 0, 0) \in S$ *es un punto plano y que para todo* $V \in Ent_S(P)$ *la intersección de* V *con los subespacios semiespacios acotados por* T_pS *es distinta de vacío.*

La superficie S se puede ver como $F^{-1}(0)$ con $F(x, y, z) = z - x^3 + 3y^2x$. De la teoría sabemos que el gradiente $\nabla F(x, y, z) = (-3x^2 + 3y^2, 6xy, 1)$ es un vector normal al plano tangente. En particular,

$$T_{(0,0,0)}S = \{(v^1, v^2, v^3) \,|\, v^3 = 0\}$$

Veamos ahora que el punto es plano. Para ello, consideraremos la parametrización global $X(u, v) = (u, v, u^3 - 3v^2u)$. Sea $(u(t), v(t))$ una curva en $\mathbb{R}^2$ con $u(0) = 0$ y $v(0) = 0$. Entonces $\alpha(t) = X(u(t), v(t)) = (u(t), v(t), (u(t), v(t), u(t)^3 - 3v(t)^2u(t)))$ es una curva en S con $\alpha(0) = (0, 0, 0)$. La curvatura normal de α es

$$\begin{aligned} \kappa_n^\alpha(0) &= \alpha''(0) \cdot N(0) \\ &= (u''(0), v''(0), 0) \cdot (0, 0, 1) = 0, \end{aligned}$$

Como esto ocurre para toda α, el punto es plano.

Por otra parte, la curva $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (t, 0, t^3)$ es una curva en la superficie ya que

$$\alpha(t) = X(t, 0)$$

Para esta curva, si $t < 0$ entonces $z(t) < 0$ y si $t > 0$ entonces $z(t) > 0$. De esto concluimos que para todo $V \in Ent_S(P)$ la intersección de V con los subespacios semiespacios acotados por T_pS es distinta de vacío.